УДК: 519.6 + 517.586

Интегральные представления функций Лежандра P_α^β, возникающие при преобразовании Пуассона*

И. А. Шилин, В. А. Вестяк

Аннотация

С помощью преобразования Пуассона, переводящего однородные функции на конусе в соответствующие функции на двуполостном гиперболоиде, получены новые интегральные представления функций Лежандра, которые применяются при использовании метода Фурье или метода разделения переменных в начально-краевых задачах Дирихле и Неймана для уравнений Пуассона в области двугранного угла. Эти задачи, в свою очередь, напрямую связаны с нелинейными задачами обтекания, о подъемной силе и колебаниях крыла самолета.

Ключевые слова

функция Лежандра; представления групп; группа Лоренца; преобразование Пуассона.

1. Введение

Положим, что в линейном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ определена квадратичная формула

$$q(x) := x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2.$$

Обозначим полярную к q билинейную форму $\hat{q}$. Группа Лоренца $SO(n,1)$ сохраняет эту форму и расслаивает $\mathbb{R}^{n+1}$ на орбиты, из которых выделим два класса орбит. К первому классу отнесем конус

$$C := \{x \mid q(x) = 0\}.$$

Второй класс будем считать составленным из двуполостных гиперболоидов

$$H(r) := \{x \mid q(x) = r^2\},$$

* Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы "Научные и научно-педа-гогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы.

получающихся при всех $r > 0$.

Группа $SO(n,1)$ содержит две связные компоненты. Одна из таких компонент содержит тождественное преобразование и будет рассматриваться в этой работе — обозначим эту подгруппу символом G. Действие $x \longmapsto g^{-1}x$ группы G транзитивно на конусе C. Пусть $\sigma \in \mathbb{C}$. Обозначим D_σ линейное подпространство в $C^\infty(C)$, состоящее из σ-однородных функций. Будет удобным на протяжении работы придерживаться ограничения $-n+1 < \mathrm{re}\,\sigma < 0$, которое обеспечит сходимость интегралов. Символом T_σ обозначим представление группы G в пространстве D_σ левыми сдвигами:

$$T_\sigma(g)[f(x)] := f(g^{-1}x).$$

Пусть γ — произвольный контур на конусе C, по одному разу пересекающий любую образующую. Всякая точка $x \in \gamma$ может быть представлена в виде

$$\{x_i = F_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Отсюда всякая точка $x \in C$ допускает представление

$$\{x_i = tF_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

и, соответственно, обозначая $\tilde{G}$ подгруппу в G, действующую транзитивно на γ, имеем

$$dx = t^{n-3}\,dt\,d\gamma, \tag{2}$$

где $d\gamma$ обозначает $\tilde{G}$-инвариантную меру на контуре γ.

Для каждой пары $(D_\sigma, D_{\tilde{\sigma}})$ определим билинейные функционалы

$$\mathsf{F}_\gamma : (D_\sigma, D_{\tilde{\sigma}}) \longrightarrow \mathbb{C}, \ (f_1, f_2) \longmapsto \int\limits_\gamma f_1(x) f_2(x)\,d\gamma,$$

где γ имеет тот же смысл, что и в предыдущем абзаце.

Функционал F_γ на самом деле не зависит от γ, если $\tilde{\sigma} = -\sigma - n + 1$. Это следует из формулы (2), однородности функций f_1 и f_2 и, наконец, того факта, что G-инвариантную меру на C можно записать в виде

$$dx = \frac{dx_{\zeta(1)} \ldots dx_{\zeta(n-1)}}{|x_{\zeta(n)}|}, \tag{3}$$

где $\zeta \in \mathbf{S}_n$.

Положим $f \in D_\sigma$ и $y \in H(1)$. Интегральное преобразование

$$\Pi(f)(y) := \mathsf{F}_\gamma(\hat{q}^{-\sigma-n+1}(y,x), f)$$

назовем преобразованием Пуассона [1].

2. Формулы, получающиеся из связи между «сферическим» и параболическим» базисами

Обозначим γ_1 пересечение конуса C с плоскостью $x_0 = 1$. Всякая точка *x* на γ_1 зависит от сферических параметров $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$ по формулам

$$x_s = \prod_{i=1}^{n-s} \sin\phi_i \cdot \cos\phi_{n-s+1}, \quad s \neq 0,$$

при предположении, что угол ϕ_{n-s+1} существует. Здесь $\phi_{n-1} \in [0; 2\pi)$ и $\phi_1, \ldots, \phi_{n-2} \in [0; \pi)$.

Подгруппа $H_1 \simeq SO(n)$ действует транзитивно на γ_1, а каждая подстановка $\zeta \in \mathbf{S}_n$ определяет H_1-инвариантную на γ_1 меру

$$d\gamma_1 = \frac{d\gamma_{\zeta(1)} \ldots d\gamma_{\zeta(n-1)}}{|x_{\zeta(n)}|}.$$

В сферических координатах такая мера выражена формулой 9.1.1.(9) [2].

Пусть γ_2 — пересечение конуса C и гиперплоскости $x_0 + x_n = 1$. Каждую точку x на γ_2 с помощью координат $r, \phi_1, \ldots, \phi_{n-2}$ зададим по формулам

$$x_0 = \frac{1+r^2}{2}, \qquad x_n = \frac{1-r^2}{2},$$
$$x_s = r \prod_{i=1}^{n-s-1} \sin\phi_i \, \cos\phi_{n-s}, \quad s \notin \{0, n\}$$

(если угол ϕ_{n-s} существует), где $r \geqslant 0, \phi_{n-2} \in [0; 2\pi)$ и $\phi_1, \ldots, \phi_{n-3} \in [0; \pi)$.

Обозначим H_2 подгруппу в G, действующую транзитивно на γ_2. H_2 состоит из матриц

$$n(b) = \begin{pmatrix} (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}) & b^{\mathrm{T}} & b^{\mathrm{T}} \\ -b & 1 - b^* & -b^* \\ b & b^* & b^* \end{pmatrix},$$

в которых $b = (b_1, \ldots, b_{n-1})$ и $b^* = \frac{1}{2}(b_1^2 + \ldots + b_{n-1}^2)$.

Нетрудно вывести, что H_2-инвариантная мера на γ_2 имеет вид

$$d\gamma = r^{n-2}\, dr \prod_{i=1}^{n-2} \sin^{n-i-2}\phi_i \, d\phi_i.$$

Пусть теперь $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $k_0 \geqslant k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_{n-2} \geqslant 0$, $l_1 \geqslant \ldots \geqslant l_{n-2} \geqslant 0$, $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_{n-2} \geqslant 0$, $K = (k_0, k_1, \ldots, k_{n-3}, \pm k_{n-2})$, $L = (l_1, \ldots, l_{n-3}, \pm l_{n-2})$, и $M = (m_1, \ldots, m_{n-3}, \pm m_{n-2})$. Нам понадобятся в пространстве D_σ базисы

$$\{f_K^{\sigma 1}(x) = N'_K \, x_0^{\sigma - k_0} \, \Xi_K^{n\sigma}(x) \mid K = (k_0, k_1, \ldots, k_{n-3}, \pm k_{n-2}) \in \mathbb{Z}^{n-1}, k_i \geqslant k_{i+1} \geqslant 0\},$$

$$\{f^{\sigma 2}_{(L,\lambda)}(x) = N''_{(L,\lambda)}\,(x_0+x_n)^{\sigma+\frac{n-3}{2}}\,\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{l_1}\,\left(\frac{\lambda r_{n-1}}{2}\right)^{\frac{3-n}{2}-l_1}\cdot J_{l_1+\frac{n-3}{2}}\left(\frac{\lambda r_{n-1}}{x_0+x_n}\right)\,\Xi^{n-1,\sigma}_L(x)$$
$$\mid\ L=(l_1,\ldots,l_{n-3},\pm l_{n-2})\in\mathbb{Z}^{n-2}, l_i\geqslant l_{i+1}\geqslant 0\},$$

$$\{f^{\sigma 2}_{(M,\mu)}(x) = N'''_{(M,\mu)}\,(x_n)^{\sigma+\frac{n-3}{2}}\,r_{n-1}^{\frac{3-n}{2}-m_1}\,P^{\frac{3-n}{2}-m_1}_{-\frac{1}{2}+\mu}\left(\frac{x_0}{x_n}\right)\,\Xi^{n-1,\sigma}_M(x)$$
$$\mid\ M=(m_1,\ldots,m_{n-3},\pm m_{n-2})\in\mathbb{Z}^{n-2}, m_i\geqslant m_{i+1}\geqslant 0\},$$

в которых $r_j^2=x_0^2+\ldots+x_j^2$,

$$\Xi^{n\sigma}_T(x)=N_T\prod_{i=1}^{n-3} r_{n-i}^{t_i-t_{i+1}}\,C^{\frac{n-i}{2}-1}_{t_i-t_{i+1}}\left(\frac{x_{n-i}}{r_{n-i}}\right)\,(x_2\pm x_1)^{t_{n-2}}$$

и соответствующие нормирующие константы $N_T, N'_K, N''_{(L,\lambda)}$ и $N'''_{(M,\mu)}$ определены формулами 9.3.6.(5), 9.4.1.(7), 10.3.4.(9) и 11.3.3.(5) [2].

Определим числа $c^{\sigma 12}_{K,(L,\lambda)}$ формулой

$$f^{\sigma 1}_K(x)=\sum_L\int\limits_0^{+\infty} c^{\sigma 12}_{K,(L,\lambda)}\,f^{\sigma 2}_{(L,\lambda)}\,d\lambda. \tag{4}$$

Из ортогональности функций $\Xi^{n\sigma}_T$ получаем свойство

$$\mathsf{F}_\gamma(f^{\sigma 1}_K, f^{-\sigma-n-1,1}_{-\tilde{K}})=\delta_{K\tilde{K}}.$$

Отсюда сразу следует, что

$$c^{\sigma 12}_{K,(L,\lambda)}=\mathsf{F}_\gamma(f^{\sigma 1}_K, f^{-\sigma-n-1,2}_{(-L,\lambda)}).$$

Если $\gamma=\gamma_2$, то из формулы

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,C^\nu_m(x)\,C^\nu_n(x)\,dx=0,\quad m\neq n,\ \nu>-\frac{1}{2}$$

получается

Лемма 1. *Если* $\sum\limits_{i=1}^{n-2}(k_i-l_i)^2\neq 0$, *то* $c^{\sigma 12}_{K,(L,\lambda)}=0$.

Рассмотрим противоположную ситуацию.

Лемма 2. *Если* $\sum\limits_{i=1}^{n-2}(k_i-l_i)^2=0$, *то*

$$c^{\sigma 12}_{K,(L,\lambda)} = 2^{-\sigma+n+3k_1-3}\,\pi^{-1}\,\mathbf{i}^{k_1}\,(n+2k_0-2)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\ \sqrt{(k_0-k_1)!}\,\lambda^{k_1}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+k_1\right)\times$$
$$\times\ \Gamma\left(\frac{n}{2}+k_1-1\right)\,\Gamma^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)\,\Gamma^{-1}(n+2k_1-2)\times$$
$$\times\ \Gamma^{-\frac{1}{2}}(n+k_0+k_1-2)\,\sum_{m=0}^{k_0-k_1}(-1)^m\,(m!)^{-1}\times$$
$$\times\ \Gamma(n+k_0+k_1+m-2)\,\Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2}+k_1+m\right)\times$$
$$\times\ \Gamma^{-1}(k_0-k_1-m-1)\,\Gamma^{-1}(-\sigma+k_1+m)\,G^{21}_{13}\left(\frac{\lambda^2}{4}\ \middle|\ \begin{matrix}-m\\ -\sigma+k_1-1,\,\frac{n-3}{2}+k_1\end{matrix}\right).$$

Доказательство. При предположении $\gamma=\gamma_2$ получаем интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} r^{\frac{n-1}{2}+l_1}\,(r^2+1)^{\sigma-k_1}\,C^{\frac{n}{2}-k_1-1}_{k_0-k_1}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)\,J_{\frac{n-3}{2}+l_1}(\lambda r)\,dr,$$

который вычисляется с учетом равенства

$$r^k\,J_k(\lambda r) = 2^k\,\lambda^{-k}\,G^{10}_{02}\left(\left(\frac{\lambda r}{2}\right)^2\ \middle|\ k,0\right)$$

по формулам 8.932(1), 8.932.(2) [3] и 20.5.(4) [4]. □

Теорема 1.

$$P^{-\frac{n}{2}+1}_{-\sigma-\frac{n}{2}}(\operatorname{ch}\alpha) = 2^{2n-\frac{9}{2}}\,\pi^{-\frac{3}{2}}\,\sqrt{n-2}\,\operatorname{sh}^{\frac{n}{2}-1}\alpha\times$$
$$\times\ e^{(\sigma+n-1)\alpha}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\,\Gamma^{-1}(-\sigma)\,\Gamma^{-\frac{1}{2}}(n-2)\times$$
$$\times\ \int\limits_0^{+\infty}\lambda^{-n+3}\,G^{21}_{13}\left(\frac{\lambda^2}{4}\ \middle|\ \begin{matrix}0\\ -\sigma-1,0,\frac{n-3}{2}\end{matrix}\right)\,G^{21}_{13}\left(\frac{(\lambda e^{-\alpha})^2}{4}\ \middle|\ \begin{matrix}0\\ \sigma-\frac{n-1}{2},0,\frac{n-3}{2}\end{matrix}\right)\,d\lambda.$$

Доказательство. Предположим, что выполняются равенства $k_1=l_1,\ldots,k_{n-2}=l_{n-2}$. Из разложения (4) получаем

$$\Pi(f^{\sigma 1}_K) = \int\limits_0^{+\infty} c^{\sigma 12}_{K,(L,\lambda)}\,\Pi(f^{\sigma 2}_{(L,\lambda)})\,d\lambda.$$

Если $\Pi(f^{\sigma 1}_K)=\mathsf{F}_{\gamma_1}(\hat q^{-\sigma-n+1}(y,x),f^{\sigma 1}_K)$ и $\Pi(f^{\sigma 2}_{(L,\lambda)})=\mathsf{F}_{\gamma_2}(\hat q^{-\sigma-n+1}(y,x),f^{\sigma 2}_{(L,\lambda)})$, то для случая $y=(\alpha,0,\ldots,0,\alpha)$ выводим равенство

$$(-1)^{k_0}\, 2^{\frac{n-3}{2}}\, \pi^{\frac{1}{2}}\, (k_0!)^{-1}\, N'_K\, \mathrm{sh}^{-\frac{n}{2}+1}\alpha\, \Gamma(-\sigma-n+2)\times$$
$$\times\ \Gamma(n+k_0-2)\, \Gamma^{-1}(n-2)\, \Gamma^{-1}(-\sigma-n+k_0+2)\, P^{-\frac{n}{2}+1}_{-\sigma-\frac{n}{2}}(\mathrm{ch}\,\alpha)=$$
$$=\int\limits_0^{+\infty} C(K,n,\sigma,\alpha,\lambda)\lambda^{3-n}\, G^{21}_{13}\left(\frac{(\lambda e^{-\alpha})^2}{4}\,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ \sigma-\frac{n-1}{2},0,\ \frac{n-3}{2},\ 0 \end{matrix}\right) d\lambda,$$

в котором точный вид «константы» $C(K,n,\sigma,\alpha,\lambda)$ здесь опускается для простоты формулы. Для завершения доказательство остается взять $K=(0,\ldots,0)$. □

Рассмотрим частный случай $SO(2,1)$ группы $SO(n,1)$. Для этого случая $K\equiv k$ и $(L,\lambda)\equiv\lambda$.

Теорема 2. *При* $-1<\sigma<0$ *и* $\alpha\neq 0$ *имеют место формулы*

$$P^{-l+\frac{1}{2}}_{\sigma+\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\,\alpha)=(-1)^{l-1}\, 2^{-\sigma-\frac{l}{2}-\frac{9}{4}}\, \pi^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\ e^{-\alpha}\ \sin(-\pi\sigma)\, \mathrm{sh}^{l+\frac{1}{2}}\alpha\, \left(\frac{\mathrm{ch}\,\alpha+1}{\mathrm{ch}\,\alpha-1}\right)^{\frac{l}{2}+\frac{1}{4}}\times$$
$$\times\ \Gamma(\sigma-l+1)\, \Gamma\left(l-\frac{3}{2}\right)\, \Gamma^{-1}\left(l+\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^{\infty}\rho^{-\sigma-1}\, K_{\sigma+1}(\rho e^{-\alpha})\times$$
$$\times\ \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^n\, \Gamma^{-2}(s+1)\, \Gamma^{-1}(s-\sigma)\, G^{21}_{13}\left(\frac{\rho^2}{4}\,\middle|\, \begin{matrix} -s \\ -\sigma-1,\ 0 \end{matrix}\right)\ d\rho, \tag{5}$$

$$P^{\frac{1}{2}}_{2\sigma+\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,\alpha+1}{2}}\right)=2^{-\sigma+\frac{1}{2}}\, 3^{-1}\, \pi^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\ e^{-\alpha}\ \sin(\pi\sigma)\, \mathrm{sh}\,\alpha\, (\mathrm{ch}\,\alpha-1)^{-\frac{5}{4}}\, (\mathrm{ch}\,\alpha+1)^{\frac{3}{2}}\, \Gamma(\sigma+1)\times$$
$$\times\int\limits_0^{\infty}\rho^{-\sigma-1}\, K_{\sigma+1}(\rho e^{-\alpha})\ \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^n\, \Gamma^{-2}(s+1)\, \Gamma^{-1}(s-\sigma)\, G^{21}_{13}\left(\frac{\rho^2}{4}\,\middle|\, \begin{matrix} -s \\ -\sigma-1,\ 0 \end{matrix}\right)\ d\rho, \tag{6}$$

$$P^{-\frac{1}{2}}_{2\sigma-\frac{5}{2}}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,\alpha+1}{2}}\right)=2^{-\sigma-2}\, \pi^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\ e^{-\alpha}\ \sin(\pi\sigma)\, \mathrm{sh}\,\alpha\, (\mathrm{ch}\,\alpha-1)^{-\frac{1}{4}}\, (\mathrm{ch}\,\alpha+1)^{\frac{3}{4}}\, \Gamma(\sigma)\times$$
$$\times\int\limits_0^{\infty}\rho^{-\sigma-1}\, K_{\sigma+1}(\rho e^{-\alpha})\ \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^n\, \Gamma^{-2}(s+1)\, \Gamma^{-1}(s-\sigma)\, G^{21}_{13}\left(\frac{\rho^2}{4}\,\middle|\, \begin{matrix} -s \\ -\sigma-1,\ 0 \end{matrix}\right)\ d\rho. \tag{7}$$

Доказательство. Из разложения

$$f^{\sigma 2}_{(L,\lambda)}(x)=\sum_K c^{-\sigma-n+1,1,2}_{K,(L,\lambda)}\, f^{\sigma 1}_K(x) \tag{8}$$

получаем

$$\Pi(f^{\sigma 2}_{(L,\lambda)}) = \sum_K \Pi(f^{\sigma 1}_K).$$

Полагая $\gamma = \gamma_2$ в левой части этого равенства и $\gamma = \gamma_1$ в правой части, выводим следующее представление для гипергеометрической функции Гаусса:

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left(-\sigma-\frac{1}{2}, \sigma+\frac{3}{2}; \frac{1}{2}+l; \frac{1-\operatorname{ch}\alpha}{2}\right) \\
&= (-1)^{l-1}\,2^{-\sigma-\frac{5}{2}}\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\alpha}\operatorname{sh}\alpha\,\sin(-\pi\sigma)\,\times \\
&\times\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha+1}{\operatorname{ch}\alpha-1}\right)^{\frac{l}{2}+\frac{1}{4}}\Gamma(\sigma+1-l)\,\Gamma\left(l-\frac{3}{2}\right)\int\limits_0^\infty \lambda^{-\sigma-1}K_{\sigma+1}(\lambda e^{-\alpha})\,\times \\
&\times\sum_{s=0}^\infty (-1)^n\,\Gamma^{-2}(s+1)\,\Gamma^{-1}(s-\sigma)\,G^{21}_{13}\left(\frac{\lambda^2}{4}\,\middle|\,\begin{matrix}-s\\ -\sigma-1,\ 0\end{matrix}\right)\,d\lambda.
\end{aligned}
$$

По формуле 7.3.1.(88) [4] получаем (5). Взяв $l = 0$, согласно формуле 7.3.1.(35) [4] имеем (6). Полагая $l = 1$ и используя формулу 7.3.1.(40) [4], выводим представление (7). □

3. Формулы, получающиеся из связи между «сферическим» и «гиперболическим» базисами

Введем обозначение γ_{3+} для пересечения конуса C с плоскостью $x_n = 1$. Обозначение γ_{3-} зарезервируем для пересечения конуса C и плоскости $x_n = -1$. Пусть $\gamma_3 := \gamma_{3+} \cup \gamma_{3-}$. Контур γ_3 является однородным пространством группы $H_3 \simeq SO(n-1,1)$. Если x принадлежит γ_3, то

$$x_n = \pm 1, \qquad x_0 = \operatorname{ch} t,$$
$$x_s = t\prod_{i=1}^{n-s-1}\sin\phi_i\cdot\cos\phi_{n-s}, \quad s \notin \{0, n\}$$

(предполагается существование угла ϕ_{n-s}), где $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{n-2} \in [0; 2\pi)$ и $\phi_1, \ldots, \phi_{n-3} \in [0; \pi)$.

Всякая подстановка $\zeta \in \mathbf{S}_n$ определяет H_3-инвариантную меру

$$d\gamma_4 = \frac{dx_{\zeta(1)}\ldots dx_{\zeta(n-1)}}{|x_{\zeta(n)}|}$$

на гиперболическом контуре γ_3, поэтому соответствующая инвариантная мера имеет вид

$$d\gamma_3 = \operatorname{ch}^{n-2}t\,dt\prod_{i=1}^{n-2}\sin^{n-i-2}\phi_i\,d\phi_i.$$

Рассмотрим коэффициенты $c^{\sigma 13}_{K,(M,\mu)}$, возникающие в разложении

$$f^{\sigma 3}_{(M,\mu)}(x) = \sum_K c^{\sigma 13}_{K,(M,\mu)}\,f^{\sigma 1}_K(x). \tag{9}$$

Из ортогональности функций $\Xi_T^{n\sigma}$ выводится следующее утверждение.

Лемма 3. *Если* $\sum\limits_{i=1}^{n-2}(k_i-m_i)^2\neq 0$, *то* $c^{\sigma 13}_{K,(M,\mu)}=0$.

По аналогии с предыдущим случаем рассмотрим теперь другую ситуацию.

Лемма 4. *Если* $\sum\limits_{i=1}^{n-2}(k_i-m_i)^2=0$, *то*

$$
\begin{aligned}
c^{\sigma 13}_{K,(M,\mu)} &= (x_n)^{k_0-k_1}\,2^{-\frac{3}{2}}\,\pi^{-\frac{1}{2}}\,\mu^{\frac{1}{2}}\,\sqrt{n+2k_0-2}\,\times\\
&\quad\times\,\sqrt{(k_0-k_1)!}\,\mathrm{ch}^{\frac{1}{2}}(\pi\mu)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-k_0-1\right)\,\Gamma\left(\frac{-\sigma+k_0-k_1+1+\mu}{2}-\frac{n}{4}\right)\\
&\quad\cdot\Gamma\left(\frac{-\sigma+k_0-k_1+1-\mu}{2}-\frac{n}{4}\right)\left|\Gamma\left(\frac{n}{2}+k_1-1+\mu\right)\right|\Gamma^{-1}\left(\frac{-\sigma+k_0}{2}\right)\times\\
&\quad\times\,\Gamma^{-1}\left(\frac{-\sigma+k_0+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{k_0-k_1+1}{2}\right)\times\\
&\quad\times\,{}_4F_3\left(\left.\begin{matrix}\frac{\sigma-k_0}{2}+1,\ \frac{\sigma-k_0+1}{2},\ \frac{k_1-k_0}{2},\ \frac{k_1-k_0+1}{2}\\ \frac{n+5}{4}+\frac{\sigma+k_1-k_0+\mu}{2},\ \frac{n+5}{4}+\frac{\sigma+k_1-k_0-\mu}{2},\ \frac{n}{2}+2k_1-k_0+2\end{matrix}\right|\,1\right).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Для вычисления интеграла $c^{\sigma 13}_{K,(M,\mu)}=\mathsf{F}_{\gamma_3}(f^{\sigma 3}_{(M,\mu)},f^{\sigma 1}_K)$ воспользуемся формулами

$$
C_a^i(x)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^i\,(\alpha)_{a-i}}{i!\,(a-2i)!}\,(2x)^{a-2i}
$$

и 7.132.7 [4]. □

Теорема 3.

$$
\begin{aligned}
P^{\sigma+\frac{n-1}{2}}_{-\frac{1}{2}+\mathbf{i}\mu}(\pm\mathrm{th}\,\alpha) &= 2^{\frac{n}{2}-1}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,\sin^{-1}(-\pi\sigma)\,\mathrm{ch}^{\frac{n-1}{2}}\alpha\,\mathrm{sh}^{-\frac{n}{2}+1}\alpha\,\times\\
&\quad\times\,N'_K\,(N'''_{(O,\mu)})^{-1}\,\Gamma^{-1}(n-2)\,\Gamma^{-1}\left(-\frac{n}{2}-\sigma+1+\mathbf{i}\mu\right)\left(-\frac{n}{2}-\sigma+1-\mathbf{i}\mu\right)\\
&\quad\cdot\sum_{k_0}(-1)^{k_0}\,c^{\sigma 13}_{K,(M,\mu)}\,(k_0!)^{-1}\,\Gamma(n+k_0-2)\,\Gamma^{-1}(\sigma-k_0+1)\,P^{-\frac{n}{2}-k_0+1}_{\sigma+\frac{n}{2}-1}(\mathrm{ch}\,\alpha),
\end{aligned}
$$

где знаки $+$ и $-$ перед α и в матричных элементах $c^{\sigma 13}_{K,(M,\mu)}$ выбираются синхронно.

Доказательство. Из (9) получаем

$$
\Pi(f^{\sigma 3}_{(M,\mu)})=\sum_K c^{\sigma 13}_{K,(M,\mu)}\,\Pi(f^{\sigma 1}_K).
$$

Остается положить $\Pi(f^{\sigma 3}_{(M,\mu)})=\mathsf{F}_{\gamma_3}(\hat q^{-\sigma-n+1}(y,x),f^{\sigma 3}_{(M,\mu)})$ и $\Pi(f^{\sigma 1}_K)=\mathsf{F}_{\gamma_1}(\hat q^{-\sigma-n+1}(y,x),f^{\sigma 1}_K)$. □

4. Формулы, получающиеся из связи между «сферическим» и «гиперболическим» базисами

Рассмотрим теперь коэффициенты $c^{\sigma 23}_{(L,\lambda),(M,\mu)}$ разложения

$$f^{\sigma 2}_{(L,\lambda)}(x) = \sum_{M} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c^{\sigma 23}_{(L,\lambda),(M,\mu)}\, f^{\sigma 3}_{(M,\mu)}(x)\, d\mu.$$

По аналогии с предыдущими случаями получается

Лемма 5. *Если* $\sum\limits_{i=1}^{n-2}(l_i - m_i)^2 \neq 0$, *то* $c^{\sigma 23}_{(L,\lambda),(M,\mu)} = 0$.

и

Лемма 6. *Если* $\sum\limits_{i=1}^{n-2}(k_i - m_i)^2 = 0$, *то*

$$\begin{aligned} c^{\sigma 23}_{(L,\lambda),(M,\mu)} = {} & 2^{-\sigma-l_1-1}\, \pi^{-\frac{3}{2}}\, \mu^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{ch}^{\frac{1}{2}}(\pi\mu) \times \\ & \times\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left|\Gamma\left(\frac{n}{2} + l_1 - 1 + \mathbf{i}\mu\right)\right| \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\mu\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} - \mathbf{i}\mu\right) \times \\ & \times \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{C}\,(s!)^{-1}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} + s + \mathbf{i}\mu\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + s - \mathbf{i}\mu\right) \times \\ & \times\, \Gamma(\sigma - l_1 - s + 1)\, \Gamma^{-1}\left(\frac{n-1}{2} + l_1 + s\right) G^{11}_{13}\left(\frac{\lambda^2}{4}\ \middle|\ \begin{matrix} -s \\ -\sigma - 1, \frac{n-3}{2} - l_1, 0 \end{matrix}\right), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{C} = \begin{cases} (-1)^s\, \mathbf{i}^{l_1}, & x_0 = 1, \\ \mathbf{i}^{-2\sigma+3l_1}, & x_0 = -1. \end{cases}$$

Доказательство. Используя свойство ортогональности многочленов Гегенбауэра, формулу 2.7.12(6) [3] и связь между обобщенной гипергеометрической функцией ${}_pF_q$ и функцией Мейера, вычисляем интеграл $c^{\sigma 23}_{(L,\lambda),(M,\mu)} = \mathsf{F}_\gamma(f^{\sigma 2}_{(L,\lambda)}, f^{\sigma 3}_{(M,\mu)})$ вдоль контура $\gamma = \gamma_3$. □

Теорема 4.

$$\begin{aligned} P^{-\sigma-\frac{n-1}{2}}_{-\frac{1}{2}+\mathbf{i}\mu}(\mathrm{th}\,\alpha) = {} & 2^{\sigma+2n-4}\, \pi\, e^{(\sigma+n-1)\alpha)}\, \mathrm{ch}^{\frac{n-1}{2}}\alpha \times \\ & \times\, \sin^{-1}(\pi(\sigma+n-1))\, N''_{(O,\lambda)}\, (N'''_{(O,\mu)})^{-1}\, \Gamma^{-1}(-\sigma - n + 2) \times \\ & \times\, \Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2} + \sigma + \mathbf{i}\mu\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{n}{2} + \sigma - \mathbf{i}\mu\right) \times \\ & \times \int\limits_{0}^{+\infty} \lambda^{-2n+6}\, c^{\sigma 23}_{(L,\lambda),(M,\mu)}\, G^{11}_{13}\left(\left(\frac{\lambda e^{-\alpha}}{2}\right)^2\ \middle|\ \begin{matrix} 0 \\ \sigma - n - 1, \frac{n-3}{2}, 0 \end{matrix}\right) d\lambda. \end{aligned}$$

Доказательство. Из разложения

$$f^{\sigma 3}_{(M,\mu)}(x) = \sum_L \int\limits_0^{+\infty} c^{\sigma 23}_{(L,\lambda),(M,\mu)} \, f^{\sigma 2}_{(L,\lambda)} \, d\lambda,$$

получается формула

$$\Pi(f^{\sigma 3}_{(M,\mu)}) = \int\limits_0^{+\infty} c^{\sigma 23}_{(L,\lambda),(M,\mu)} \, \Pi(f^{\sigma 2}_{(L,\lambda)}) \, d\lambda. \qquad (10)$$

Выбирая $\gamma = \gamma_3$ в левой части и $\gamma = \gamma_2$ в правой части равенства (10), применяем формулы 18.2.(3) и 20.5.(4) [3] при предположении $y = (\alpha, 0, \dots, 0, \alpha)$ и $M = L = (0, \dots, 0)$. □

Библиографический список

1. *Vilenkin N. Ja., Klimyk A. U.* Representation of Lie groups and special functions. — Vol. 2. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 607 p.
2. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965. — 588 с.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. — Том 2. — М.: Наука, 1970. — 328 с.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1986. — 800 с.

Сведения об авторах

Шилин Илья Анатольевич, доцент Московского авиационного института (государственного технического университета), к. ф.-м. н, тел:: +7 499 158-46-47,e-mail:

ilyashilin@li.ru

Вестяк Владимир Анатольевич, заведующий кафедрой Московского авиационного института (государственного технического университета), к. ф.-м. н, доцент, тел: +7 499 158-46-47, e-mail:: vovavest@rambler.ru.