

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ТОЧНОСТИ БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ.

В.В. Сурков, Б.В. Сухинин, В.И. Ловчаков, Е.И. Феофилов

Рассматривается аналитический способ синтеза оптимальных по точности быстродействующих регуляторов многомерных систем. Приводится пример, иллюстрирующий применение предлагаемого способа аналитического конструирования регуляторов.

Постановка задачи.

Проблема проектирования оптимальных многомерных автоматических систем с высокой точностью и быстродействием в условиях действия на объект регулирования большого числа дестабилизирующих факторов является сложной и многогранной. Для успешного решения этой проблемы необходимо использование современной теории оптимальных процессов с разрывным (релейным) управлением [1]. Однако отсутствие единого подхода к проблеме создания оптимальных по точности быстродействующих приводов, несовершенство существующих методов, их сложность, трудность реализации на практике привели к необходимости поиска новых эффективных и достаточно простых, инженерных путей проектирования, учитывающих одновременно весь комплекс противоречивых требований, характерных для электромеханических систем.

Для подавляющего большинства электроприводов, используемых в электромеханических системах можно записать с достаточной точностью обыкновенное векторное нелинейное уравнение:

$$\dot{X}(t) = A(X) + B(X) \cdot U(t), \quad (1)$$

где $X \in R^n$, $U \in R^m$; $A(X) = A_1 \cdot X + A_2(X)$ – матрица-столбец с элементами $a_i(X) \equiv a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ представляющими собой полиномиальные или (и) кусочно-линейные функции от составляющих вектора состояния объекта; $B(X) = B_1 + B_2(X)$ – матрица с элементами-функциями $b_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$ также полиномиального или (и) кусочно-линейного вида. Предполагается, что $\text{rank } B = m$. Вектор управления $U(t)$ в общем случае принадлежит следующему замкнутому множеству:

$$U^m = \{u_p : u_p(t) \in [-U_{p\max}, U_{p\max}] \mid p = 1, 2, \dots, m\}, \quad (2)$$

причем, как правило, предполагается, что управляющие воздействия нормированы ϵ , следовательно, $U_{p\max} = 1$. Область U^m допустимых управлений определяется двумя условиями:

классом допустимых (непрерывных или кусочно-непрерывных) функций и дополнительными ограничениями (2) эксплуатационного или конструктивного характера, накладываемыми на $U(t)$ внутри данного класса.

Многомерные стационарные объекты, описываемые уравнением (1), предполагаются управляемыми. В соответствии с результатами известных работ для управляемости объекта (1) в некоторой ограниченной области фазового пространства, содержащей точку $X = 0$, необходимо и достаточно управляемости линеаризованного объекта:

$$\text{rank}[B_1, B_1 A_1, \dots, B_1 A_1^{n-1}] = n. \quad (3)$$

В дальнейшем условие (3) считается выполненным.

При формулировке задач оптимального управления электроприводами обычно требуется определить допустимое управление $U(t)$ при наличии ограничения (2), переводящее объект (1) из произвольного начального $X(0) = X_0$ в нулевое конечное состояние $X(T) = 0$ с минимальным критерием качества, который в общем виде можно записать:

$$J = \int_0^T f_0(X) dt, \quad f_0(X) = q_0 + X^T Q X + D^T |X| + |M^T X|. \quad (4)$$

Здесь q_0 - коэффициент, q_0 , при $q_0 = 0$, $T \rightarrow \infty$; Q и D , M - определено положительные симметричная матрица размерности $n \times n$ и векторы столбцы размерности $n \times 1$ весовых коэффициентов соответственно, часть из которых может быть равна нулю. При этом на координаты вектора состояния X ограничения не накладываются.

Применительно к задаче (1), (2), (4) можно записать уравнение Беллмана:

$$\min_U [f_0(X) + (\text{grad } S)^T \cdot (A + BU)] = 0,$$

где $S(X)$ - функция Беллмана, $\text{grad } S$ - вектор столбец. Так как вектор управления входит только в последнее слагаемое, то

$$U = -\text{sign}[B^T \text{grad } S].$$

При решении той же задачи с использованием принципа максимума Понтрягина составляется гамильтониан

$$H_p(P, X, U) = f_0(X) + P^T A + P^T B U,$$

где $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ - вектор вспомогательных переменных. И здесь вектор управления входит только в последнее слагаемое, поэтому

$$U = -\text{sign}[B^T P].$$

Оба метода приводят к управлению, которое можно записать в виде:

$$U = -\text{sign}[\Psi(X)]. \quad (5)$$

Здесь $\Psi = [\psi_1(X), \psi_2(X), \dots, \psi_m(X)]^T$ - вектор функций переключения регулятора, причем $\Psi = 0$ - поверхность переключения.

Стандартное решение рассмотренных задач подразумевает подстановку управления (5) в уравнения Беллмана или гамильтониана, что приводит к необходимости решать либо нелинейное уравнение Беллмана в частных производных, либо нелинейную двухточечную краевую задачу. Это представляет известные математические трудности, связанные с отсутствием, за редким исключением, общих аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений. В настоящее время нельзя указать общего рецепта для решения. Каждый конкретный случай требует особого исследования, как правило, с дополнительным привлечением метода фазового пространства. Такие решения получены лишь для некоторых практических задач второго - третьего порядков.

Поскольку доказано, что функция переключения существует, будем искать не оптимальное управление U , а функцию Ψ , стоящую под знаком sign в выражении управления (5).

Сформулируем задачу оптимального управления: Определить функцию переключения $\Psi(X)$ оптимального управления (5), которое при наличии ограничения (2), переводит объект (1) из произвольного начального $X(0) = X_0$ в нулевое конечное состояние $X(T) = 0$ с минимальным критерием (4).

Методы и алгоритм решения.

Найдем скорость проникновения [1], то есть проекцию вектора относительной скорости изображающей точки на нормаль к поверхности переключения $\Psi = 0$ с учетом уравнений объекта (1):

$$\dot{\Psi} = G \cdot \dot{X} = GA + GBU. \quad (6)$$

Здесь строки матрицы $G = \{\partial \Psi / \partial X\}$ размерности $m \times n$ являются градиентами функций $\psi_i(X)$. Для i -той поверхности переключения из основного функционального уравнения (6) следует

$$\dot{\psi}_i(X) = G_i A + G_i B U'_i + G_i B U''_i \cdot u_i,$$

где $G_i = [\text{grad}(\psi_i)]^T$, $U'_i = [u_1, u_2, \dots, u_i = 0, \dots, u_m]^T$, $U''_i = [0, 0, \dots, u_i = 1, \dots, 0]^T$, причем $U = U'_i + U''_i \cdot u_i$, т.е. вектор столбец U''_i содержит только одно ненулевое значение в i -той строке, равное единице. По отношению к i -тому управлению запишем последнее уравнение в виде:

$$\dot{\psi}_i(X) = G_i \cdot \dot{X} = f_i(X, U'_i) + \varphi_i(X) \cdot u_i. \quad (7)$$

В уравнении (7)

$$u_i = -\text{sign} \psi_i(X). \quad (8)$$

$$f_i(X, U'_i) = G_i(A + BU'_i), \quad \varphi_i(X) = G_iBU''_i. \quad (9)$$

При необходимости вектор U'_i может быть выражен из уравнения (1) через координаты вектора состояния объекта и их производные: $U'_i = U'_i(X, \dot{X})$.

Согласно полученному основному функциональному уравнению (7) производная i -той функции переключения равна скорости проникновения i -той поверхности переключения $\psi_i(X) = 0$, а сама i -тая функция переключения может быть найдена из дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Отметим, что для объекта управления (1) можно записать m функциональных уравнений (7) относительно функций переключения. Таким образом, основное функциональное уравнение позволяет осуществить декомпозицию многомерной задачи на m однотипных задач, которые могут решаться независимо. Поэтому в дальнейшем будем для сокращения записи опускать индекс i в уравнениях (7) - (9). Очевидно, что исследовать уравнение (7) и получить закон i -того оптимального управления проще, чем решать краевую задачу $2n$ порядка.

Уравнения (7) и (8) определяют множество допустимых законов управления, обеспечивающих перевод объекта (1) из произвольного начального состояния в окрестность многообразия $\psi(X) = 0$. Очевидно, для того, чтобы управление (8) для объекта (1) было оптимальным по критерию (5) при ограничении (2) необходимо и достаточно определить матрицу коэффициентов $G = \{\partial \Psi / \partial X\}$ или, что то же самое, необходимо и достаточно определить структуру коэффициентов $f(X, U')$ и $\varphi(X)$ функционального уравнения (7). Сформулируем требования к $f(X, U')$ и $\varphi(X)$ для получения оптимального по быстродействию управления в виде следующих утверждений. Их доказательство можно найти в [2].

Утверждение 1: Для оптимального по быстродействию управления необходимо, чтобы коэффициенты $f(X, U')$ и $\varphi(X)$ функционального уравнения для функции переключения (9) удовлетворяли условию

$$|f(X, U')| \geq \varphi(X) > 0. \quad (10)$$

Утверждение 2: Для оптимального по быстродействию управления неосциллирующими объектами необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $f(X, U')$ и $\varphi(X)$ функционального уравнения для функции переключения (9) удовлетворяли условию

$$|f(X, U')| = \varphi(X) > 0. \quad (11)$$

Следствие 1: При выполнении условия (11), в момент первого переключения размерность пространства состояний объекта управления скачкообразно уменьшается на единицу, причем $\psi(X) = 0$ и $\dot{\psi}(X) = 0$.

Следствие 2: При выполнении условия (11), с момента первого переключения при движении вдоль $\psi(X) = 0$ при $\dot{\psi}(X) = 0$ возникает новое управление

$$u^2 = -\text{sign}[f(x_2, x_3, \dots, x_n, U')]. \quad (12)$$

Следствие 3: Если функцию $f(X, U')$ в новом управлении (12), а следовательно и в уравнении (7) принять за новую функцию переключения $\psi^2(x_2, x_3, \dots, x_n) = f(X, U')$, то по отношению к функции переключения ψ^2 справедливы все рассмотренные выше утверждения. Например, при применении последовательно утверждения 2, фазовое пространство постепенно сжимается до единицы, а последнее управление $u^n = -\text{sign}[x_n]$ переводит объект (1) по линии переключения в начало координат.

Рассмотренный подход к решению задач оптимального управления дает возможность аналитически синтезировать оптимальные по быстродействию управления.

Пример.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального торможения математического маятника (осциллирующего объекта) [3] с двумя параметрами управления u_1 и u_2 :

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u_2, \quad (13)$$

причем управления удовлетворяют ограничениям $|u_1(t)| \leq 1$ и $|u_2(t)| \leq 1$.

Поскольку система уравнений (13) второго порядка, то имеем два интервала для каждого управления. Последнее оптимальное управление на втором интервале для $u_1^2 = -\text{sign}[x_1]$ переводит объект (13) по линии переключения в начало координат. Тогда на первом интервале в соответствии с (7) $\dot{\psi}_1(X) = x_1 + \varphi_1(X) \cdot u_1$. Воспользуемся вначале условием (11), при этом $|x_1| = \varphi_1(X)$ и $\dot{\psi}_1(X) = x_1 + |x_1| \cdot u_1$ или в силу уравнений объекта (13):

$$\dot{\psi}_1(X) = -\dot{x}_2 + (x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2)\text{sign}(x_1) + u_2 + u_1u_2\text{sign}(x_1) - u_2\dot{x}_1\text{sign}(x_1). \quad (14)$$

В соответствии с утверждением 2 как только $\psi_1(X) = 0$ при $\dot{\psi}_1(X) = 0$,

$$u_1 = u_1^2 = -\text{sign}[x_1]. \quad (15)$$

Подставляя u_1 из (15) в уравнение (14) и интегрируя его, получим квазиоптимальный по быстродействию закон управления u_1 :

$$u_1 = -\text{sign}[\psi_1] = -\text{sign}\left[-x_2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \cdot \text{sign}(x_1) - |x_1| \cdot u_2\right] \quad (16)$$

Аналогично определяется закон управления u_2 :

$$u_2 = -\text{sign}[\psi_2] = -\text{sign}\left[x_1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \cdot \text{sign}(x_2) + |x_2| \cdot u_1\right] \quad (17)$$

Результаты моделирования системы (13) с квазиоптимальными по быстродействию законами управления (16), (17) приведены на рис.1.

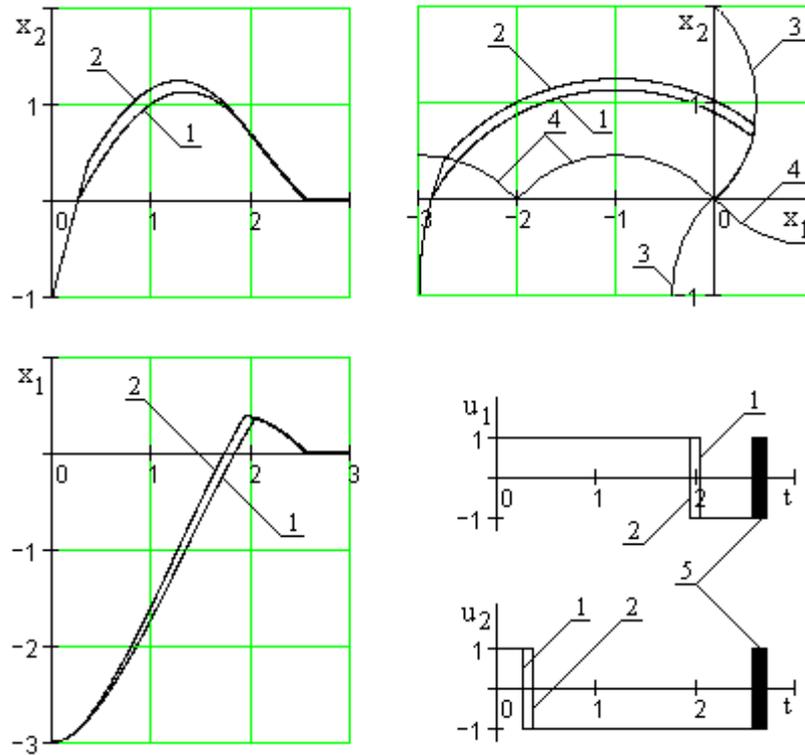


Рис.1. Графики фазовых траекторий и сигналов системы (13) с законами управления: 1 - квазиоптимальные (16), (17) или (18), (19) или (20), (21); 2 - оптимальные (22), (23). Линии переключения: 3 - $\psi_1 = 0$; 4 - $\psi_2 = 0$. 5 - начало скользящего режима.

Произведения $|x_2| \cdot u_1$ и $|x_1| \cdot u_2$ в законах управления (17) и (16) можно упростить, если воспользоваться рис.1, из которого следует, что в самом начале второго интервала для u_1 , знак u_2 отрицателен и противоположен знаку x_1 : $u_2 = -\text{sign}(x_1)$, а в самом начале второго интервала для u_2 , знак u_2 положителен и совпадает со знаком x_2 : $u_1 = \text{sign}(x_2)$. Такой же вывод можно получить, если рассмотреть линии переключения $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = 0$ (рис.1) с учетом выражений (16) и (17) при различных управлениях $u_2 = \pm 1$ и $u_1 = \pm 1$. Подставляя $u_2 = -\text{sign}(x_1)$ в (16) и $u_1 = \text{sign}(x_2)$ в (17), получим:

$$u_1 = -\text{sign}[\psi_1] = -\text{sign}\left[-x_2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \cdot \text{sign}(x_1) + x_1\right], \quad (18)$$

$$u_2 = -\text{sign}[\psi_2] = -\text{sign}\left[x_1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \cdot \text{sign}(x_2) + x_2\right]. \quad (19)$$

Структурная схема объекта (13) с законами управления (18) и (19) приведена на рис.2, а графики фазовых траекторий и сигналов системы - на рис 1.

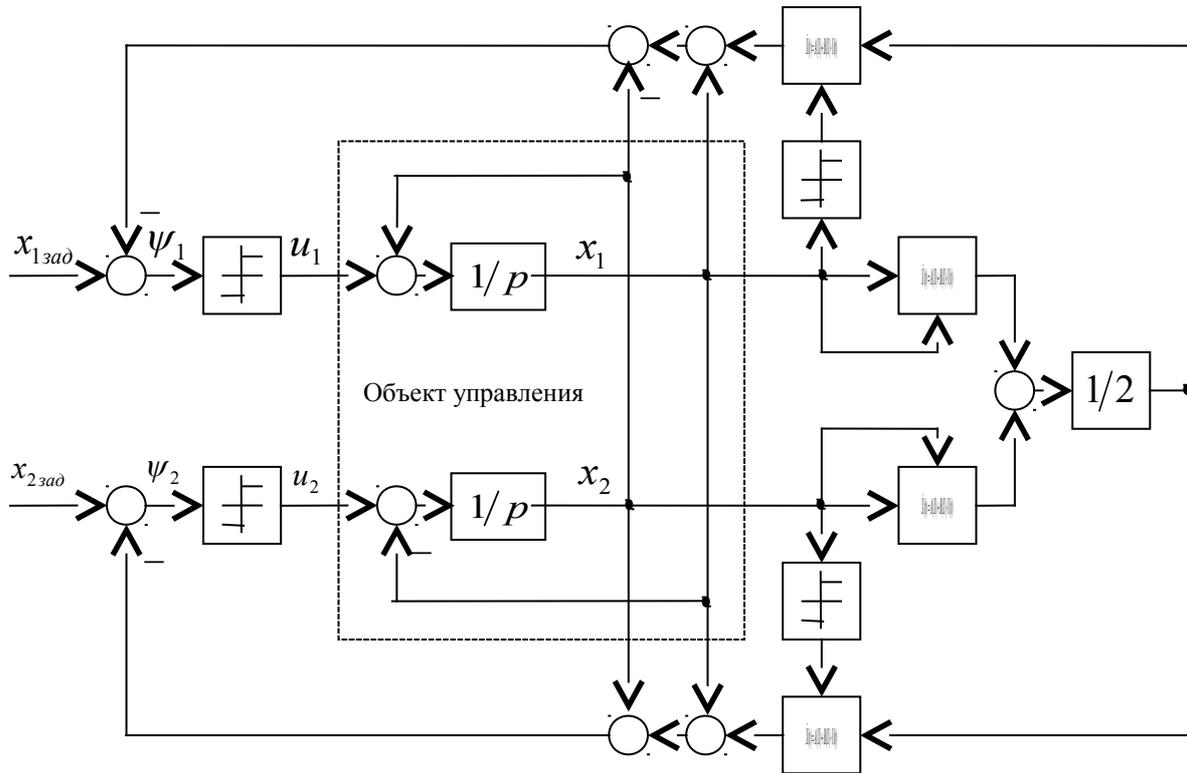


Рис.2. Структурная схема объекта (13) с законами управления (18), (19).

$x_{1зад}$, $x_{2зад}$ - задающие воздействия, \times - блок умножения.

Запишем законы управления (18) и (19) в следующей форме:

$$u_1 = -\text{sign}\{[(x_1 + \text{sign}(x_1))^2 + (x_2 - \text{sign}(x_1))^2 - 2] \cdot x_1\}, \quad (20)$$

$$u_2 = -\text{sign}\{[(x_1 + \text{sign}(x_2))^2 + (x_2 + \text{sign}(x_2))^2 - 2] \cdot x_2\}. \quad (21)$$

Из (20), (21) следует, что каждая из линий переключения $\psi_1(X) = 0$ и $\psi_2(X) = 0$ в случае квазиоптимального по быстродействию управления состоит всего лишь из двух кривых, равных четверти дуги окружностей с радиусом равным $\sqrt{2}$, с центрами в точках $(-1; 1)$, $(1; -1)$ и прямой $x_1 = 0$ за пределами дуг для $\psi_1(X) = 0$ и с центрами в точках $(1; 1)$, $(-1; -1)$ и прямой $x_2 = 0$ за пределами дуг для $\psi_2(X) = 0$ (рис.1).

Для получения оптимального по быстродействию управления консервативной системой (13) необходимо воспользоваться знаком больше в условии (10) на первых интервалах, что существенно затрудняет решение задачи. Как известно, точное решение для линий переключения состоит из бесконечной серии четверти дуги окружностей [3]. С учетом этого оптимальные управления (20), (21) примут вид:

$$u_1 = -\text{sign}\{[(x_1 + \text{sign}(x_1))^2 + (x_2 - k_2(x_2) \cdot \text{sign}(x_1))^2 - 2] \cdot x_1\}, \quad (22)$$

$$u_2 = -\text{sign}\{[(x_1 + k_1(x_1) \cdot \text{sign}(x_2))^2 + (x_2 + \text{sign}(x_2))^2 - 2] \cdot x_2\}, \quad (23)$$

где $k_i = 2 \cdot \text{int}\left(\frac{|x_i| + 2}{2}\right) - 1$; $i = 1, 2$; $\text{int}(x)$ - целая часть x .

На рис.1. приведены результаты моделирования системы (13) с квазиоптимальным (20), (21) и оптимальным (22), (23) по быстродействию законами управления. Из рис.1 следует, что в системе (13) с оптимальным управлением (22), (23) амплитуда координат в переходном процессе несколько больше, чем с квазиоптимальным управлением (16), (17) или (18), (19) или (20), (21), а время регулирования - несколько меньше (разность времен регулирования меньше 1 %). С увеличением начальных отклонений координат от положения равновесия различия становятся меньше. С точки зрения технической реализации квазиоптимальный по быстродействию закон управления (18), (19) более предпочтителен, чем оптимальный (22), (23).

Предлагаемый в настоящей работе подход к решению задач оптимального быстродействия многомерных систем позволяет достаточно просто аналитически синтезировать квазиоптимальные по быстродействию управления для колебательных объектов. При этом, несмотря на более простую реализацию квазиоптимального регулятора, время регулирования практически не отличается от времени регулирования при быстродействующем управлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садовой А.В., Сухинин Б.В., Сохина Ю.В. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами. - Киев: ИСИМО, 1996. - 298 с.
 2. Сурков В.В. Аналитический синтез агрегированных оптимальных по быстродействию регуляторов. – <http://www.mai.ru/Труды МАИ>. – 2001, №4
 3. Бор-Раменский А.Е., Воронецкий А.Е., Святославский В.А. Быстродействующий электропривод. - М.: Энергия, 1969.- 168 с.
-

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

*Сурков Виктор Васильевич, доцент кафедры электротехники и электрооборудования
Тульского государственного университета, к.т.н.*

*Сухинин Борис Владимирович, профессор кафедры электротехники и электрооборудования
Тульского государственного университета, зав. кафедрой, д.т.н.*

*Ловчаков Владимир Иванович, профессор кафедры электротехники и электрооборудования
Тульского государственного университета, д.т.н.*

*Феофилов Евгений Иванович, доцент кафедры электротехники и электрооборудования
Тульского государственного университета, к.т.н.*