УДК 532.507

Об учете влияния стохастических возмущений на решение уравнений Навье-Стокса в задаче Хагена-Пуазейля

Хатунцева О.Н.

Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва,

ул. Ленина, 4а, Королёв, 141070, Россия

e-mail: Olga.Khatuntseva@rsce.ru

Аннотация

Уравнения Навье-Стокса (УНС) являются законом сохранения импульса (или вторым законом Ньютона) для выделенного объема жидкости и описывают ускорение этого объема под действием силы, обусловленной градиентом давления и внешних сил, с одной стороны, а также вязкой силы, действующей по поверхности этого объема, с другой стороны. Несмотря на то, что численные решения УНС широко используются во многих научных и практических приложениях, доказательство о возможности (или невозможности) описания с помощью УНС турбулентного режима течения жидкости является до сих пор открытым. В частности, это связано с тем, что задачи, допускающие аналитическое решение (например, задачи Хагена-Пуазеля и Куэтта), не имеют решений, соответствующих турбулентному режиму течения.

Если задаться вопросом, какие аспекты не учитываются при моделировании турбулентности с помощью УНС исходя из первых принципов, то можно отметить, что турбулентный режим, также как и другие стохастические процессы, обладает

важным статистическим свойством – возбуждением большого количества независимых степеней свободы (пульсаций) на разных масштабах рассмотрения системы. При этом закон сохранения импульса для выделенного объема жидкости в форме УНС, записанный без учета такого процесса, нарушается, поскольку, не все суммарное воздействие, направленное на выделенный объем, идет на его ускорение: часть такого воздействия должно пойти на возбуждение дополнительных – внутренних - степеней свободы. Параметром, характеризующим связь между микро- и макропроцессами является энтропия стохастической системы и, следовательно, в таком процессе необходимо учесть производство энтропии в выделенном объеме жидкости. Исходя из этого, можно переписать уравнение Навье-Стокса, включив в их левую часть – полную производную по времени – дополнительный член, отвечающий за изменение скорости, при изменении дифференциальной энтропии выделенного объема.

Модификация уравнений Навье-Стокса за счет учета дополнительных степеней свободы, связанных с возбуждением стохастических пульсаций в потоке жидкости, позволила найти два решения задачи течения жидкости в трубе кругового сечения (задаче Хагена-Пуазеля). Одно из этих решений реализуется при любых значениях числа Рейнольдса и соответствует ламинарному режиму течения, второе – реализуется только при достаточно больших значениях числа Рейнольдса и соответствует турбулентному режиму течения. Аналитически определена постоянная Кармана в выражении, описывающем логарифмический профиль скорости в центральной части трубы.

Ключевые слова: стохастические системы, плотность вероятности, турбулентность, задача Хагена-Пуазейля.

1. Ведение

Уравнения Навье-Стокса (УНС) (совместно с уравнением неразрывности):

$$\begin{cases} \nabla\vec{V} = 0 \\ \dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\vec{V} + \vec{f} \end{cases}, \tag{1.1}$$

в виде (1.1) используются для описания процессов течения вязкой несжимаемой нетеплопроводной жидкости в самых разнообразных сферах науки и техники. УНС являются законом сохранения импульса (или вторым законом Ньютона) для выделенного объема жидкости и описывают ускорение этого объема под действием силы, обусловленной градиентом давления $-\nabla P/\rho$ и внешних сил $\vec{f}$, с одной стороны, а также вязкой силы, действующей по поверхности этого объема $\nu\Delta\vec{V}$, с другой стороны.

В случае детерминированного – ламинарного режима течения жидкости корректность использования УНС для описания такого процесса не вызывает сомнений. Однако, при переходе к стохастическому – турбулентному режиму течения жидкости - вопрос о возможности описания такой системы с помощью УНС, несмотря на свою многолетнюю историю, остается открытым, и по сей день.

В силу своей сложности УНС имеют аналитические решения в ограниченном круге задач - для очень простых геометрий. Одной из таких задач является описание течения несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения (течение Хагена-

Пуазейля).

Единственным аналитическим решением этой задачи в стационарном случае является выражение [1]:

$$V(r)/U_0 = 1 - \tilde{r}^2\,, \tag{1.2}$$

где $U_0 = R^2 \Delta P/(4\nu\rho l)$ - скорость жидкости в центре трубы, ΔP - падение давления на длине трубы l, ν - вязкость жидкости, $\tilde{r} = r/R$, R – радиус трубы. Это решение при любых значениях числа Рейнольдса задает параболический профиль скорости, соответствует ламинарному режиму течения и является устойчивым в линейном приближении [2-4]. Данный вывод плохо соотносится с огромным количеством экспериментов в трубах, в которых при достаточно больших числах Рейнольдса практически невозможно “удержать” жидкость в ламинарном состоянии - происходит потеря устойчивости и переход к турбулентному режиму течения [1-4]. В этом режиме величины скорости в каждой точке течения в каждый момент времени принимают случайные значения. Изменяется и осредненный профиль скорости: он становится более насыщенным в пристеночной области трубы, а в центральной части трубы продольное значение скорости уменьшается по сравнению с ламинарным режимом и осредненный по времени профиль скорости становится логарифмическим. В качестве попыток разрешения возникающих противоречий в вопросах устойчивости течения в трубе кругового сечения обычно выдвигаются предположения о неустойчивости ламинарного течения к конечным возмущениям. Однако в такой постановке не вполне понятным остается отсутствие других (помимо ламинарного) квазистационарных аналитических решений УНС, к переходу к которым и должны стремиться режимы течения при потере устойчивости. Решению данной проблемы и посвящена эта работа.

2. Применение метода расширения фазового пространства с использованием стохастической переменной для описания турбулентности.

Зададимся вопросом, какие аспекты не учитываются при моделировании турбулентности с помощью УНС?

Турбулентный режим, также как и другие стохастические процессы, обладает важным статистическим свойством – возбуждением большого количества независимых степеней свободы (пульсаций) на разных масштабах рассмотрения системы. При этом закон сохранения импульса для выделенного объема жидкости (в форме УНС), записанный без учета такого процесса, нарушается, поскольку, не все суммарное воздействие, направленное на выделенный объем, идет на его ускорение: часть такого воздействия должно пойти на возбуждение дополнительных – внутренних - степеней свободы, обладающих (следуя предположению Колмогорова для мелкомасштабной развитой турбулентности) свойством изотропного распределения. Параметром, характеризующим связь между микро- и макропроцессами является энтропия [5] и, следовательно, в таком процессе необходимо учесть производство энтропии в выделенном объеме жидкости.

Поскольку температура при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения практически не изменяется и, следовательно, броуновское движение молекул жидкости также остается практически неизменным, то, можно считать, что изменение энтропии, в основном, идет за счет случайных возмущений скорости на масштабах, превышающих масштаб теплового движения молекул. Поэтому в качестве выражения для энтропии необходимо использовать зависимость, описывающую вероятность возбуждения случайных возмущений скорости на различных масштабах рассмотрения, то есть выражение для дифференциальной энтропии (см., например, [5]):

$$S(t,\vec{r};\tau) = -\int \varphi[p(t,\vec{r};\tau)] \ln \varphi[p(t,\vec{r};\tau)] d[p(t,\vec{r};\tau)]. \tag{2.1}$$

В выражении (2.1) функция $\varphi[p(t,\vec{r};\tau)]$ - это плотность вероятности реализации возмущения скорости величины $p(t,\vec{r};\tau)$ в заданный момент времени t в рассматриваемой точке пространства $\vec{r}$ на временн*о*м масштабе рассмотрения τ.

Расширяя фазовое пространство дополнительной переменной, характеризующей энтропию S: $(t,\vec{r}) \to (t,\vec{r},S)$, ускорение выделенного объема жидкости, на который действуют силы, стоящее в правой части УНС, можно записать в виде:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t, \vec{r}+\Delta\vec{r}, S+\Delta S) - \vec{V}(t,\vec{r},S)}{\Delta t}.$$

Добавляя и одновременно вычитая векторы в этом выражении, его можно переписать в виде:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\vec{V}(t+\Delta t,\vec{r}+\Delta\vec{r},S+\Delta S) - \vec{V}(t,\vec{r}+\Delta\vec{r},S+\Delta S)}{\Delta t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\vec{V}(t,\vec{r}+\Delta\vec{r},S+\Delta S) - \vec{V}(t,\vec{r},S+\Delta S)}{\Delta t} + \frac{\vec{V}(t,\vec{r},S+\Delta S) - \vec{V}(t,\vec{r},S)}{\Delta t} \right].$$

В результате можно заметить, что при выполнении условий: $\Delta\vec{r} \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0$, $\Delta S \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0$, в полученном выражение для ускорения выделенного объема жидкости первое слагаемое равно: $\partial\vec{V}/\partial t$; второе слагаемое: $\partial\vec{V}/\partial\vec{r}\cdot\partial\vec{r}/\partial t=\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}$; третье слагаемое: $\partial\vec{V}/\partial S\cdot\partial S/\partial t$.

Таким образом, учет влияния производства энтропии в выделенном объеме жидкости на его ускорение, приведет к изменению левых частей уравнений Навье-Стокса, характеризующих ускорение выделенного объема жидкости и представляющих собой полные производные по времени. В расширенном фазовом пространстве их можно записать, включив дополнительный член, отвечающий за изменение скорости, при производстве энтропии S в выделенном объеме:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial S}\frac{dS}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{V}+\vec{f}\,, \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) можно представить в виде:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial\varphi}\frac{1}{\delta S/\delta\varphi}\frac{dS}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{V}+\vec{f}\,. \tag{2.3}$$

Производная $\delta S/\delta\varphi$, входящая в уравнение (2.3), может быть определена как функциональная производная. Найдем ее значение:

$$\left\langle\frac{\delta S}{\delta\varphi},h\right\rangle=-\frac{d}{d\,\text{э}}\int\left(\varphi(p)+\text{э}\,h(p)\right)\ln\left(\varphi(p)+\text{э}\,h(p)\right)dp\Big|_{\text{э}=0}=-\int\left(\ln\varphi(p)+1\right)h(p)dp=\left\langle-\left(\ln\varphi(p)+1\right),h\right\rangle.$$

Откуда следует, что $\delta S/\delta\varphi=-\ln\varphi(p)-1$. Поскольку, $-\left(\ln\varphi+1\right)\delta\varphi=\delta\left(-\varphi\ln\varphi\right)$, то, обозначив, $\tilde{s}(p)=-\varphi(p)\ln\varphi(p)$, перепишем уравнение (2.3) в виде

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tilde{s}}\frac{dS}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{V}+\vec{f}\,. \tag{2.4}$$

Из уравнений (2.3)-(2.4), в частности, видно, что дополнительный член, отвечающий за учет гидродинамических стохастических возмущений, является ненулевым только при условии ненулевого производства энтропии в рассматриваемой системе.

Производство энтропии: dS/dt можно охарактеризовать временным масштабом τ, на котором происходит изменение энтропии стохастической системы на единицу. Поэтому, уравнение (2.4) можно представить в виде:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tilde{s}}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{V}+\vec{f}\ . \qquad (2.5)$$

Решением уравнения (2.5) (с граничными и начальными условиями, соответствующими конкретной задаче) будет являться значение скорости $\vec{V}=\vec{V}(t,\vec{r},\tilde{s};\tau)=\vec{V}(t,\vec{r},\tilde{s}(\varphi);\tau)$, реализующейся с вероятностью φ, при усреднении на интервале рассмотрения τ в момент времени t, в точке $\vec{r}(x,y,z)$.

Для того чтобы корректно в общем случае описывать дополнительное слагаемое в левой части модифицированного уравнения Навье – Стокса (2.5), необходимо построить замыкающую модель стохастических процессов и метод их описания [6-7]. Однако в тех случаях, когда дополнительный член уравнения существенно влияет на вид решения, но, при этом, само решение практически не зависит от дополнительной переменной (в данном случае $\tilde{s}$), можно обойтись без построения такой модели. Как будет показано ниже, задача описания течения несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения относится как раз к такому случаю. Поэтому, обратимся сразу непосредственно к ее решению.

3. Описание течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения (течение Хагена-Пуазейля).

Для решения этой задачи достаточно рассмотреть систему уравнений, состоящую из уравнения неразрывности (которое остается неизменным) и модифицированных УНС:

$$\begin{cases} \nabla \vec{V} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla P + \nu \Delta \vec{V} \end{cases}.$$

Задачу будем решать в классической постановке [1]. А именно, ограничимся рассмотрением изменения скорости только в поперечном сечении. Тогда уравнение сохранения импульса с учетом уравнения неразрывности, а также добавочного члена для описания стохастических пульсаций скорости при квазистационарном (когда $\partial V / \partial t = 0$) течении вязкой несжимаемой жидкости, можно переписать в виде соотношения:

$$\frac{1}{\tau}\frac{\partial V}{\partial \tilde{s}} = \frac{\Delta P}{\rho l} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right), \tag{3.1}$$

где $V = V(r, \tilde{s})$ - квазистационарная компонента скорости в поперечном направлении в расширенном стохастическом пространстве с дополнительной переменной $\tilde{s}$, ΔP - падение давления на длине трубы l, ν - вязкость жидкости, τ - принятый временной масштаб рассмотрения системы.

Уравнение (3.1) будем решать, используя граничные условия – “прилипание” жидкости на стенке трубы в отсутствии пульсаций: $V(r, \tilde{s})\big|_{\substack{r=R \\ \tilde{s}=0}} = 0$, а также равенство нулю, в отсутствии пульсаций, производной скорости в поперечном направлении в центре тубы: $\partial V(r,\tilde{s})/\partial r|_{\substack{r=0\\ \tilde{s}=0}} = 0$.

Уравнение (3.1) можно упростить, введя вместо временного масштаба рассмотрения системы τ безразмерный коэффициент γ $(0 < \gamma \le 1)$ - параметр, характеризующий пространственный масштаб рассмотрения системы, и воспользовавшись соотношением:

$$\tau = \frac{\gamma R}{U_0} = \frac{\gamma R^2}{\nu \operatorname{Re}}, \quad \text{где} \quad \operatorname{Re} = \frac{RU_0}{\nu} = \frac{R^3 \Delta P}{4\nu^2 \rho l} \text{ - число Рейнольдса.}$$

Подставляя зависимость $\tau(\gamma)$ и вводя безразмерные переменные: $\tilde{r} = r/R$, $\tilde{V}(\tilde{r},\tilde{s}) = V(\tilde{r},\tilde{s})/U_0$, приходим к уравнению:

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\gamma}{\operatorname{Re}} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{4\gamma}{\operatorname{Re}}. \tag{3.2}$$

Сделав в нем замену: $\tilde{V}(\tilde{r},\tilde{s}) = u(\tilde{r},\tilde{s}) - \tilde{r}^2$, запишем

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{s}} = \frac{\gamma}{\operatorname{Re}} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial u}{\partial \tilde{r}} \right). \tag{3.3}$$

Решая уравнение (3.3) методом разделения переменных: $u(\tilde{r},\tilde{s}) = F(\tilde{r})N(\tilde{s})$, получим два соотношения:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{d\tilde{s}} = a \quad \text{и} \quad \frac{d}{d\tilde{r}}\left(\tilde{r} \frac{dF}{d\tilde{r}} \right) = \frac{a \operatorname{Re}}{\gamma} \tilde{r} F, \tag{3.4}$$

где $a = a(\gamma, \operatorname{Re})$ - произвольная константа при любых фиксированных значениях параметров γ и Re.

Нетрудно заметить, что нулевое значение константы a соответствует решению уравнений Навье-Стокса для течения несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения без учета дополнительных стохастических переменных (1.2). Это будет первое решение задачи описания течения несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения с учетом стохастических возмущений скорости для любых значений числа Рейнольдса.

В случае $a \neq 0$, решением первого уравнения (3.4) являются функции $N(\tilde{s}) = N_0 e^{\pm|a|\tilde{s}}$, где $N_0 = const$, $a = \pm|a|$.

Второе уравнение (3.4) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2F}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{dF}{d\tilde{r}} \mp \frac{|a|\operatorname{Re}}{\gamma}F = 0. \qquad (3.5)$$

в котором знак «-» соответствует условию: $a > 0$, знак «+» - условию: $a < 0$.

Если $|a|\operatorname{Re}/\gamma >> 1$ и $\tilde{r} \to 1$, то с точностью до $O\left(\left(|a|\operatorname{Re}/\gamma\right)^{-1}\right)$, решения уравнения (3.5) можно записать в виде:

$$F(\tilde{r}) = \frac{F_0}{\sqrt{\tilde{r}}}\left|ch\left(\sqrt{|a|\operatorname{Re}/\gamma}(\tilde{r}+c)\right)\right|, \text{ при } a > 0; \quad F(\tilde{r}) = \frac{F_0}{\sqrt{\tilde{r}}}\left|\cos\left(\sqrt{|a|\operatorname{Re}/\gamma}(\tilde{r}+b)\right)\right|, \text{ при } a < 0.$$

Здесь c и b – константы интегрирования. Поэтому,

$$\tilde{V}(\tilde{r},\tilde{s}) = N(\tilde{s})F(\tilde{r}) - \tilde{r}^2 = \frac{u_0}{\sqrt{\tilde{r}}}\left|ch\left(\sqrt{|a|\operatorname{Re}/\gamma}(\tilde{r}+c)\right)\right|e^{|a|\tilde{s}} - \tilde{r}^2, \text{ при } a > 0;$$

$$\tilde{V}(\tilde{r},\tilde{s}) = N(\tilde{s})F(\tilde{r}) - \tilde{r}^2 = \frac{u_0}{\sqrt{\tilde{r}}}\left|\cos\left(\sqrt{|a|\operatorname{Re}/\gamma}(\tilde{r}+b)\right)\right|e^{-|a|\tilde{s}} - \tilde{r}^2, \text{ при } a < 0.$$

Здесь $u_0 = N_0 F_0$.

Из условия “прилипания” на стенке трубы в отсутствии стохастических возмущений: $\tilde{V}(\tilde{r},\tilde{s})\Big|_{\substack{\tilde{s}=0\\ \tilde{r}=1}} = 0$, следует, что $u_0 = 1$, $b = c = -1$. Таким образом, учитывая четность функций косинуса и гиперболического косинуса, в пристеночной области трубы, можно записать соотношения для безразмерной скорости в виде:

$$\tilde{V}(\tilde{r},\tilde{s})=\frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}}\left|ch\left(\sqrt{|a|\,\mathrm{Re}/\gamma}\,(1-\tilde{r})\right)\right|e^{|a|\tilde{s}}-\tilde{r}^{2},\quad \text{при } a>0, \tag{3.6}$$

$$\tilde{V}(\tilde{r},\tilde{s})=\frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}}\left|\cos\left(\sqrt{|a|\,\mathrm{Re}/\gamma}\,(1-\tilde{r})\right)\right|e^{-|a|\tilde{s}}-\tilde{r}^{2},\quad \text{при } a<0. \tag{3.7}$$

Уравнения (3.6)-(3.7) можно переписать, используя динамические параметры скорости V_* и расстояния y_* (см., например, [1]):

$$V_*=\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}=\sqrt{\frac{R\Delta P}{2\rho l}}=\sqrt{\frac{2\nu}{R}U_0}=\frac{2U_0}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}$$

здесь σ - отнесенная к единице площади стенки сила трения,

$$\frac{y_*}{R}=\frac{y_*V_*}{\nu}\cdot\frac{\nu}{RV_*}\sim\frac{1}{\sqrt{2RU_0/\nu}}=\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}},\qquad V_*y_*/\nu\sim 1.$$

В результате получим

$$\frac{V(y,\tilde{s})}{V_*}\sim\frac{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\frac{yV_*}{\nu}}}\left|ch\left(\sqrt{\frac{|a|}{2\gamma}}\frac{yV_*}{\nu}\right)\right|e^{|a|\tilde{s}}-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\frac{yV_*}{\nu}\right)^{2}\right),\ a>0, \tag{3.8}$$

$$\frac{V(y,\tilde{s})}{V_*}\sim\frac{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\frac{yV_*}{\nu}}}\left|\cos\left(\sqrt{\frac{|a|}{2\gamma}}\frac{yV_*}{\nu}\right)\right|e^{-|a|\tilde{s}}-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\frac{yV_*}{\nu}\right)^{2}\right),\ a<0, \tag{3.9}$$

где $y=R-r$.

В точке $y=y_*$, в отсутствии стохастических возмущений (при $\tilde{s}=0$), выполняются условия: $V\big|_{\substack{\tilde{s}=0\\ y=y_*}}=V_*$, $V_*y_*/\nu\sim 1$. Разложив функции скоростей, определяемых выражениями (3.8)-(3.9), в этой точке, при значении $\tilde{s}=0$, в ряд Тейлора с точностью до $O(1/(2\,\mathrm{Re}))$, получим соотношения:

$$1 \sim \left(1+\frac{1}{2\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\right) ch\left(\sqrt{\frac{|a|}{2\gamma}}\right), \text{ при } a>0; \qquad 1 \sim \left(1+\frac{1}{2\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{|a|}{2\gamma}}\right), \text{ при } a<0.$$

При выполнении условия $|a|/(2\gamma)<1$, последние два выражения можно переписать в виде:

$$1=\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\right)\left(1+\frac{|a|}{4\gamma}\right)+O\left(\frac{1}{2\,\mathrm{Re}};\left(\frac{|a|}{2\gamma}\right)^2\right), \text{ при } a>0,$$

$$1=\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\right)\left(1-\frac{|a|}{4\gamma}\right)+O\left(\frac{1}{2\,\mathrm{Re}};\left(\frac{|a|}{2\gamma}\right)^2\right), \text{ при } a<0.$$

Полученные выражения сводятся к соотношению:

$$-1 \approx \pm |a|\sqrt{2\,\mathrm{Re}}/(2\gamma), \tag{3.10}$$

где знак «+» соответствует случаю, когда $a>0$; знак «-» - случаю, когда $a<0$.

Очевидно, что выражение (3.10) имеет смысл только в том случае, когда в правой части стоит знак «-» (поскольку $\gamma>0$). Следовательно, параметр a может иметь только отрицательные значения, и выражения для скорости должны определяться соотношениями (3.7), (3.9).

Значение параметра a, найденное из уравнения (3.10), представимо в виде:

$$a \approx -2\gamma/\sqrt{2\,\mathrm{Re}}. \tag{3.11}$$

Подставляя его в уравнение (3.7), получим соотношение:

$$\tilde{V}(\tilde{r},\tilde{s}) \approx \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}}\left|\cos\left(\sqrt[4]{2\,\mathrm{Re}}(1-\tilde{r})\right)\right| e^{-\frac{2\gamma}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\tilde{s}} - \tilde{r}^2, \quad \text{где} \quad \tilde{r} \to 1. \tag{3.12}$$

Из уравнения (3.12) видно, что с увеличением числа Рейнольдса модуль показателя экспоненты будет уменьшаться. И, следовательно, при достаточно больших значениях числа Рейнольдса изменением стохастической переменной можно пренебречь. Поэтому, выбор записи уравнения Навье-Стокса в расширенном фазовом пространстве в виде уравнения типа (2.5) без учета уравнений, описывающих эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве, является оправданным при достаточно больших числах Рейнольдса.

Уравнение (3.9), при подстановке параметра a, при условии $y \to 0$ преобразуется к виду:

$$\frac{V(y,\tilde{s})}{V_*} \approx \frac{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\frac{yV_*}{\nu}}}\left|\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2\,\mathrm{Re}}}\frac{yV_*}{\nu}\right)\right|e^{-\frac{2\gamma}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\tilde{s}}-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\frac{yV_*}{\nu}\right)^2\right). \qquad (3.13)$$

Если записать это выражение для области $y \le y_*$ с той же точностью, с которой осуществлялся поиск решения уравнений (3.12)-(3.13), то есть до $O\left(1/\sqrt{2\,\mathrm{Re}}\right)$, то получим соотношение:

$$\frac{V(y,\tilde{s})}{V_*} = \frac{5}{4}\frac{yV_*}{\nu} - \frac{1}{4}\left(\frac{yV_*}{\nu}\right)^2 - \gamma\tilde{s} + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\right).$$

В приведенной постановке задачи, масштаб рассмотрения системы не должен превышать обезразмеренной динамической длины: $\gamma \le y_*/R = 1/\sqrt{2\,\mathrm{Re}}$. Поэтому, полученное выражение с точностью до $O\left(1/\sqrt{2\,\mathrm{Re}}\right)$ представимо в виде:

$$\frac{V(y,\tilde{s})}{V_*} = \frac{5}{4}\frac{yV_*}{\nu} - \frac{1}{4}\left(\frac{yV_*}{\nu}\right)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\right), \qquad (3.14)$$

которое в линейном (по величине yV_*/ν) приближении сводится к выражению:

$$\frac{V(y,\tilde{s})}{V_*} \approx \frac{V(y)}{V_*} \approx \frac{5}{4}\frac{yV_*}{\nu}. \qquad (3.15)$$

Этот результат хорошо соотносится с экспериментальными данными для линейной зависимости безразмерной скорости течения жидкости вблизи поверхности стенок трубы в случае реализации турбулентного режима [2-3]: $V(y)/V_* \sim yV_*/\nu$.

Исследовав, таким образом, течение жидкости вблизи стенки трубы и учитывая то, что параметр a должен оставаться постоянным во всей области течения, то есть определяться соотношением (3.11), можно перейти к рассмотрению зависимости скорости течения жидкости от радиуса для всего диапазона значений: $0 \le \tilde{r} \le 1$, при больших значениях числа Рейнольдса. А именно, подставив значение $a\,\mathrm{Re}/\gamma = -\sqrt{2\,\mathrm{Re}}$ во вторую зависимость (3.4), перейдем к уравнению:

$$\frac{d}{d\tilde{r}}\left(\tilde{r}\,\frac{dF}{d\tilde{r}}\right) + \sqrt{2\,\mathrm{Re}}\,\tilde{r}F = O\left(\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\right) \tag{3.16}$$

с граничными условиями: $F(\tilde{r})\big|_{\tilde{r}=1} = 1$, $dF(\tilde{r})/d\tilde{r}\big|_{\tilde{r}=1} = -1/2$, $dF(\tilde{r})/d\tilde{r}\big|_{\tilde{r}=0} = 0$.

Интересно отметить, что масштаб рассмотрения системы γ не вошел в уравнение для описания стохастического (турбулентного) режима течения жидкости (3.16), то есть это уравнение с точностью до $O\left(1/\sqrt{2\,\mathrm{Re}}\right)$ является инвариантным относительно масштаба рассмотрения системы. Однако учет существования таких масштабов, на которых происходит необратимое изменение состояния стохастической системы (и на котором производится усреднение стохастических возмущений), позволил перейти от уравнения типа: $\frac{d}{d\tilde{r}}\left(\tilde{r}\,\frac{dF}{d\tilde{r}}\right) = 0$ (в ламинарном случае) к уравнению (3.16). Исследуем его подробнее.

Выражение (3.12) и уравнение (3.16) должны одинаково описывать скорость течения жидкости вблизи стенки трубы. Из соотношения (3.12) можно найти значение производной функции $F(\tilde{r})$ в точке $\tilde{r} = 1 - \gamma > 1 - 1/\sqrt[4]{2\,\mathrm{Re}}$ при больших значениях числа Рейнольдса:

$$\left.\frac{\partial F(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}}\right|_{\tilde{r}=1-\gamma} = \left.\frac{\partial\left(\left.\tilde{V}(\tilde{r},\tilde{s})\right|_{\tilde{s}=0} + \tilde{r}^2\right)}{\partial \tilde{r}}\right|_{\tilde{r}=1-\gamma} = -\frac{1}{2} + \left(\sqrt{2\,\mathrm{Re}} - \frac{3}{4}\right)\gamma + O\left(\sqrt{2\,\mathrm{Re}}\,\gamma^2\right),$$

и значение производной в точке $\tilde{r} = 1$:

$$\left.\frac{\partial F(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}}\right|_{\tilde{r}=1} = \left.\frac{\partial\left(\left.\tilde{V}(\tilde{r},\tilde{s})\right|_{\tilde{s}=0} + \tilde{r}^2\right)}{\partial \tilde{r}}\right|_{\tilde{r}=1} = -\frac{1}{2}.$$

Видно, что для любого значения δ, для значения γ из диапазона $0 < \gamma < 1/\sqrt[4]{2\,\mathrm{Re}}$, существуют такие значения числа Рейнольдса: $2\,\mathrm{Re} \geq (\delta/\gamma)^2$, что в точках $\tilde{r} = 1$ и $\tilde{r} = 1 - \gamma$, координаты которых отличаются на малую (но фиксированную) величину масштаба рассмотрения системы γ, производные скорости и функции $F(\tilde{r})$ скачком меняют свои значения на величину не меньшую, чем значение δ. Таким образом, уравнение (3.16) не имеет решений в классе C^1 для произвольных значений числа Рейнольдса, если определен минимальный масштаб, на котором происходят необратимые изменения состояния стохастической системы – масштаб рассмотрения системы γ. При исследовании турбулентных течений в численном эксперименте такой масштаб может быть связан с сеточным разрешением пространства.

Необходимо отметить, что уравнение (3.16) при больших значениях числа Рейнольдса заменой: $x = \tilde{r}\sqrt[4]{2\,\mathrm{Re}}$, сводится к дифференциальному уравнению Бесселя нулевого порядка относительно функции $F(x)$. График функции Бесселя похож на синусоиду, колебания которой затухают пропорционально $1/\sqrt{x}$, хотя на самом деле нули функции расположены не периодично.

Переходя обратно к переменной $\tilde{r}$, его решение можно записать в виде:

$$F(\tilde{r}) = J_0(\tilde{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+1)} \left(\sqrt[4]{\mathrm{Re}/8} \cdot \tilde{r}\right)^{2m} .$$

С изменением числа Рейнольдса, решение в виде функции Бесселя (найденное как разложение в ряд в окрестности точки $\tilde{r} = 0$) будет изменять свое значение на стенке трубы (при $\tilde{r} = 1$), что недопустимо с точки зрения выполнения граничных условий. Таким образом, можно констатировать, что для произвольных значений числа Рейнольдса гладких решений уравнения (3.16), удовлетворяющих его граничным условиям, в общем случае не существует.

Однако, во внешней области пограничного слоя, экспериментально наблюдаемые продольные полосчатые структуры, по-видимому, могут быть следствием решения в виде затухающих (в поперечном направлении) колебаний, описываемых функцией Бесселя.

Общее решение уравнения (3.16) может быть найдено либо численными методами (см., например, [8]), либо с помощью аналитических оценок с определенной (неисчезающей) степенью погрешности.

Для того чтобы перейти от гладкого аналитического решения уравнения (3.16) в пристеночной части трубы к рассмотрению всей области течения, нужно рассмотреть при разложении выражения (3.13) в ряд Тейлора по параметру yV_*/ν в области: $0 < y/R < 1/\sqrt{2\mathrm{Re}}$ ($yV_*/\nu < 1$), как линейный, так и квадратичный члены, то есть соотношение (3.14). Это соотношение можно представить в виде:

$$\frac{V}{V_*} = \frac{5}{4} y_0^+ \left(\frac{y^+}{y_0^+} - \frac{1}{2} \left(\frac{y^+}{y_0^+} \right)^2 \right) + \frac{5}{4} y_0^+ \left(\frac{y^+}{y_0^+} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y_0^+}{5} \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}} \right),$$

где $y^+ = yV_*/\nu$, $y_0^+ = y_0 V_*/\nu$.

В области $y^+ > 1$ скорость может зависеть от отношений $\left(y^+/y_0^+\right)^m$, в которых степень m больше или равна трем. Выражение, стоящее в скобках первого слагаемого в правой части последнего соотношения, является разложением функции логарифма в окрестности точки $y^+ = y_0^+$ до квадратичного члена включительно. Поэтому в области $y^+ > 1$, последнее выражение можно переписать в виде:

$$\frac{V}{V_*} \approx \frac{5}{4} y_0^+ \ln\left(\frac{y^+}{y_0^+} \right) + \frac{5}{4} y_0^+ \left(\frac{y^+}{y_0^+} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y_0^+}{5} \right) + O\left(\left(\frac{y^+}{y_0^+} \right)^m \right), \quad \text{где} \quad m \geq 3. \qquad (3.17)$$

Если приближаться к точке $y^+ = 1$ (границе вязкого подслоя) со стороны центральной части трубы, то скорость V/V_* должна стремиться к значению минус единица. Именно в этом случае на границе вязкого подслоя, во-первых, реализуется доказанное выше скачкообразное изменение производной скорости по радиальной координате, во-вторых, смогут генерироваться вихри с характерным значением абсолютной линейной скорости вращения $|V/V_*| \sim 1$, которые будут полностью диссипировать непосредственно вблизи стенки трубы (в вязком подслое). Кроме того, эти вихри могут быть источником турбулентности в основной области течения.

Из этих рассуждений и выражения (3.17) следует соотношение:

$$-\frac{5}{4}y_0^+\ln\left(y_0^+\right)+\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2y_0^+}-\frac{1}{5}\right)+O\left(\left(\frac{1}{y_0^+}\right)^3\right)\sim -1\,.$$

Нетрудно видеть, что этой зависимости удовлетворяет значение $y_0^+ \sim 2$. Учитывая это, а также то, что в области: $y^+ = yV_*/\nu > 1$, кубический член разложения логарифма: $1/3\cdot\left(y^+/y_0^+\right)^3 \approx 1/3\cdot\left(y^+/2\right)^3 = y^{+3}/24$, превосходит величину квадратичного слагаемого, входящего в выражение (24): $\left(y^+/y_0^+\right)^2\left(1/2-y_0^+/5\right)\approx\left(y^+/2\right)^2\left(1/2-2/5\right)=y^{+2}/40$, выражение (3.17) можно переписать в виде: $V/V_* \approx 5/2\cdot\ln\left(y^+/2\right)+O\left(\left(y^+/2\right)^m\right)$ или

$$\frac{V}{V_*}\approx\frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{yV_*}{\nu}\right)+b\,,\quad \text{где } \kappa=0.4\,;\ b=-\frac{5}{2}\ln 2+O\left(\left(\frac{yV_*}{2\nu}\right)^m\right),\ m\geq 3\,. \tag{3.18}$$

Поскольку при приближении к центру трубы (при больших значениях переменной y: $yV_*/\nu \to \sqrt{2\,\mathrm{Re}}$) производная скорости должна стремиться к нулю, то значение b в выражении (3.18) должно в этой области стремиться к константе. Для того чтобы понять, где находятся границы области течения, скорость которого описывается выражением (3.18), в предположении, что $b \approx const$, достаточно подставить соотношение:

$$F(\tilde r)\underset{\mathrm{Re}>>1}{\approx}\tilde V(\tilde r,\tilde s)\Big|_{\tilde s=0}+\tilde r^2=\frac{2}{\kappa\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\ln\left(1-\tilde r\right)+\tilde r^2+\frac{2\ln\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}{\kappa\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}+\frac{2}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}b\,,$$

в уравнение (3.16). В результате, получим выражение:

$$-\frac{1}{\kappa\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\frac{1}{\left(1-\tilde r\right)^2}+\left(2+b+\frac{1}{\kappa}\ln\left(\sqrt{2\,\mathrm{Re}}\left(1-\tilde r\right)\right)\right)\tilde r+\frac{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}{2}\tilde r^3=O\left(\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}}}\right).$$

Из него следует, что в области: $0\leq\tilde r\leq\left(2\,\mathrm{Re}\right)^{-n}$, где $n>1/6$, выражение (3.18), в предположении, что $b\approx const$, удовлетворяет уравнению (3.16) с точностью не хуже, чем

$$O\left((2\,\mathrm{Re})^{-k}\right), \quad \text{где} \quad k = 3n - 1/2 > 0. \qquad (3.19)$$

При $\mathrm{Re} \sim 10^4$ и $n \to 1/6$, область течения, скорость которого описывается выражением (3.18) в пределах погрешности (3.19), составляет порядка двадцати процентов от радиуса трубы. При $\mathrm{Re} \sim 10^6$ и $n \to 1/6$, область течения, скорость которого описывается выражением (3.18) в пределах погрешности (3.19), составляет порядка десяти процентов от радиуса трубы.

Экспериментальное выражение для логарифмического профиля скорости в трубе в этой области имеет вид [1]: $V(y)/V_*\big|_{\mathrm{Re}>>1} \approx 2.5\ln(yV_*/\nu) + 5.5$ и составляет порядка пятнадцати процентов от радиуса трубы.

Выражение (3.18) качественно (с точностью до постоянной Кармана: $\kappa = 0.4$) описывает осредненный профиль скорости течения жидкости при больших числах Рейнольдса в центральной части трубы. Логарифмической вид функции (3.18) и линейный вид функции (3.15) для зависимости скорости от расстояния до стенки трубы в центральной и пристеночной областях, соответственно, при больших числах Рейнольдса, качественно совпадают с экспериментальными и теоретическими данными в случае реализации турбулентного характера течения жидкости в трубах кругового сечения.

Необходимо отметить, что, несмотря на то, что для труб кругового сечения, как было сказано выше, имеется единственное аналитическое решение УНС, соответствующее параболическому профилю скорости, в численных расчетах (и при прямом численном моделировании, и в приближенных методах) при больших значениях числа Рейнольдса получают вполне качественные решения, соответствующие логарифмическому профилю скорости, хотя влияние особенностей их подходов на решение УНС довольно сильно отличается друг от друга.

В приближенных методах нахождения решений УНС (методах осреднения по Рейнольдсу, методах крупных вихрей) [9-18] при описании течения при больших числах Рейнольдса параметры, характеризующие течения, разбивают на средние значения и пульсационные добавки, и добавляют уравнения, моделирующие замыкание осредненных моментов пульсации в УНС, тем самым изменяя сами уравнения.

Разгадка феномена одинакового влияния на решение уравнений Навье-Стокса и расширения фазового пространства, используемого в данной работе, и осредненных численных методов, по-видимому, состоит в том, что и в том, и в другом случае в уравнениях появляются дополнительные слагаемые. В методе, использующем расширение фазового пространства с помощью дополнительной стохастической переменной, – это дополнительный член в выражении для полной производной: $\frac{1}{\tau}\frac{\partial V}{\partial \tilde{s}}$, а в осредненных численных методах дополнительными членами выступают пульсационные моменты и замыкающие уравнения для их описания. Однако описание динамики жидкости в расширенном фазовом пространстве избавляет от необходимости “угадывать” или “подбирать” величину “правильного” масштаба задаваемых возмущений и моделей для их корреляций благодаря тому, что, выбор вида уравнения (группы симметрии) производится из “первых принципов”.

Еще более сложным и интересным является вопрос о возникновении стохастических (или хаотических) решений в методе прямого численного моделирования УНС [19]. Отвечая на него, многие исследователи ссылаются на практику численного интегрирования системы уравнений Лоренца, в результате которой в определенном диапазоне параметров находятся решения, которые в фазовом пространстве образуют странный аттрактор.

Попытаемся разобраться в этом вопросе [20]. Начало исследованиям динамических систем, проявляющих свойства хаоса положила работа Лоренца, численно исследовавшего систему дифференциальных уравнений (СДУ), описывающих конвекцию жидкости:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - xz - y, \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad \text{где } \sigma = 10,\ b = 8/3,\ r = 28 \text{ -параметры.} \qquad (3.20)$$

Им была обнаружена чрезвычайно высокая чувствительность СДУ (3.20) к начальным данным, а также найдено «притягивающее» решение множество в виде странного аттрактора, обладающего фрактальной структурой в узком диапазоне вариации параметров σ, b и r.

В дальнейшем были обнаружены другие системы дифференциальных уравнений, обладающих аналогичными свойствами. Природа хаотичности таких СДУ до конца не выяснена, несмотря на многочисленные работы, посвященные этой проблеме. Основное, что всегда подчеркивается в этих работах – это отсутствие аналитических решений таких СДУ, наличие не менее трех уравнений в системе и отличие хаоса, порождаемого системой и описываемой СДУ, от стохастического –

полностью недетерминированного процесса. Для решений СДУ вводится термин – детерминированный хаос. Попробуем понять природу детерминированного хаоса, порождаемого численным решением СДУ. Рассмотрим СДУ в общем трехмерном случае:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = g(x, y, z). \\ \dot{z} = \varphi(x, y, z) \end{cases} \tag{3.21}$$

Условие совместности уравнений, входящих в СДУ (3.21), можно представить в виде:

$$t_1 - t_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{f(x, y, z)} = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{g(x, y, z)} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\varphi(x, y, z)}.$$

Или по-другому,

$$\int_{x_0 y_0 z_0}^{x_1 y_1 z_1} \frac{\partial^2 (f^{-1})}{\partial y \partial z} dxdydz = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x_1 y_1 z_1} \frac{\partial^2 (g^{-1})}{\partial x \partial z} dxdydz = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x_1 y_1 z_1} \frac{\partial^2 (\varphi^{-1})}{\partial x \partial y} dxdydz .$$

Откуда следует, что для достаточно гладких функций $f(x, y, z) \neq 0$, $g(x, y, z) \neq 0$ и $\varphi(x, y, z) \neq 0$ должно выполняться условие совместности:

$$\frac{\partial^2 (f^{-1})}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 (g^{-1})}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 (\varphi^{-1})}{\partial x \partial y}. \tag{3.22}$$

Если обратиться к СДУ (3.20), то можно увидеть, что для функций: $f(x, y, z) = -\sigma x + \sigma y$, $g(x, y, z) = rx - xz - y$, $\varphi(x, y, z) = xy - bz$, это условие в глобальном смысле не выполняется.

Следовательно, можно констатировать отсутствие глобальных решений СДУ (3.20) для гладких функций в пространстве (t, x, y, z). При численном итерационном определении производных по времени $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$ в СДУ (3.20) в силу структуры правых частей уравнений, нарушающих условие совместности (3.22), на каждом итерационном шаге (в областях, где это условие нарушается) может происходить “перескок” с одной траектории решения на другую, порождая численный хаос. Такой же результат, разумеется, может быть получен и для СДУ, содержащих больше трех уравнений.

Решений в виде странного аттрактора при численном интегрировании двухмерной СДУ не возникает, поскольку систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

всегда можно определить без введения дополнительной переменной – времени - только в пространстве (x,y):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = F(x,y).$$

Заметим, что для возникновения странного аттрактора при численном решении СДУ (3.21) условие нарушения совместности является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным, поскольку также важно, чтобы траектория решения СДУ время от времени возвращалась в окрестность заданной точки. Это условие определяет вид правых частей СДУ – они должны быть такими, чтобы растяжение фазового пространства траекторий в одних направлениях компенсировалось сжатием в других. СДУ типа Лоренца такими свойствами обладают.

Таким образом, артефакт, возникающий при численном интегрировании СДУ (3.20), (3.21) в виде странного аттрактора может быть результатом отсутствия выполнения условия совместности (3.22) и, как следствие, результатом множественных “перескоков” с одной траектории решения на другую, с одной стороны, и ограничением объема в фазовом пространстве решений, с другой.

Вернемся к уравнениям Навье-Стокса. Без дополнительного уравнения теплопроводности они, вообще говоря, не сводятся к уравнениям Лоренца, и у них не выполняется условие ограничения объема в фазовом пространстве. Однако отсутствие выполнения последнего условия можно компенсировать вынужденными гармоническими возмущениями граничных условий, которые периодически возвращают в ограниченную область фазового пространства численные решения при хаотических “перескоках” с одной траектории на другую, не давая «уходить» им ни в ноль, ни на бесконечность.

По-видимому, именно таким образом и получают решения УНС сильно напоминающие эмпирические турбулентные режимы в методах прямого численного моделирования, где в качестве граничных условий задаются периодические возмущения, например, на оси трубы [19]. Без задания таких периодических граничных условий переход к “турбулентному” режиму в методах прямого численного моделирования не происходит.

Кроме того, при численных расчетах всегда существует масштаб, который задает минимально возможный шаг по времени. Существование двух временных масштабов (максимального и минимального) при определенных условиях, например, достаточно больших значениях числа Рейнольдса, позволяет наиболее эффективно возбуждать колебания и на промежуточных временных масштабах.

Вероятно поэтому, уравнения Навье-Стокса, вывод и форма которых соответствует описанию детерминированных режимов течения жидкости, при интегрировании их численными методами с использованием дополнительных – гармонических - граничных условий позволяют получать решения, хорошо совпадающие с экспериментальными данными для турбулентных режимов течения. Однако в этом случае корректнее было бы говорить не об интегрировании УНС, а о моделировании стохастического процесса на аналоговом принципе.

Все это говорит о том, что в вопросах описания турбулентности еще много загадок, требующих своего разрешения.

Заключение.

Полностью детерминированный подход к описанию жидкости с помощью уравнений Навье-Стокса, не учитывающий возбуждения внутренних (стохастических) степеней свободы на мезо- и макромасштабах и соответствующего изменения энтропии жидкости, приводит к результату абсолютной устойчивости параболического профиля скорости течения в трубе кругового сечения при любых числах Рейнольдса для бесконечно малых возмущений. В отличие от него, разработанный метод описания стохастических систем с использованием модифицированных уравнений Навье-Стокса, записанных в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной, описывающей производство энтропии стохастической системы, позволяет при больших числах Рейнольдса найти два решения этой задачи: одно из которых, соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному. Первое решение во всей области течения жидкости характеризуется параболическим профилем скорости, второе - в центральной области характеризуется логарифмическим профилем скорости с множителем, обратно пропорциональным постоянной Кармана, который определяется в настоящей работе аналитически.

Библиографический список

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. Т.6. - 731 с.

2. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. - М.: Физмалит, 2005. - 288 с.

3. Монин А.С., Яглом А.М. Статическая гидромеханика. - М.: Наук. Часть 1, 1965. - 640 с. Часть 2, 1967. - 720 с.

4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 712 с.

5. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Физическая кинетика. - М: Наука, 2002. - 536 с.

6. Хатунцева О.Н. О влиянии учета изменения плотности вероятности случайных величин на динамику стохастического процесса // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2012. Т. 13. № 3. URL: www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-11-20-010.pdf .

7. Хатунцева О.Н. Описание динамики марковских процессов в расширенном пространстве переменных // Ученые записки ЦАГИ. 2011. Т. XLII. № 1. С. 62 - 85.

8. Green P.J. Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination // Biometrika, 1995, no. 82, pp. 711 – 732.

9. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=75565

10. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 70. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=44440

11. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=58536

12. Ву М.Х., Попов С.А., Рыжов Ю.А. Проблемы моделирования течения в осевых вентиляторах аэродинамических труб // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29361

13. До С.З. Численное моделирование вихрей в течении Куэтта-Тейлора сжимаемого газа // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=49670

14. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Верификация численной модели взаимодействия прямоугольной пластины с поверхностью воды // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=49676

15. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Численное моделирование поведения трехслойной прямоугольной пластины при вертикальном ударе о жидкость // Труды МАИ. 2013. № 69. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=43066

16. Махров В.П., Глущенко А.А., Юрьев А.И. Влияние гидродинамических особенностей на поведение свободной поверхности жидкости в высокоскоростном потоке // Труды МАИ. 2013. № 64. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=36423

17. Горбатенко С.А., Махров В.П., Юрьев А.И. Об особенностях кавитационного обтекания тел большого удлинения в вертикальном потоке // Труды МАИ. 2013. № 64. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=36459

18. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=34840

19. Никитин Н.В. Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах кругового сечения // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 6. С. 14 – 26.

20. Хатунцева О.Н. О природе детерминированного хаоса в математике // Естественные и технические науки. 2017. № 11. С. 255 - 257.