

**Разработка конечного элемента гибкого стержня с отдельным  
хранением накопленных и дополнительных поворотов для  
моделирования больших перемещений элементов конструкций  
летательных аппаратов**

**Попов В.В.<sup>1\*</sup>, Сорокин Ф.Д.<sup>1\*\*</sup>, Иванников В.В.<sup>2\*\*\*</sup>**

<sup>1</sup>*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005, Россия*

<sup>2</sup>*Научно-технический центр по роторной динамике «Альфа-Транзит», ул.  
Ленинградская, 1, Химки, Московская обл., 141400, Россия*

*\*e-mail: [vyporov.bmstu@gmail.com](mailto:vyporov.bmstu@gmail.com)*

*\*\*e-mail: [sorokin\\_fd@mail.ru](mailto:sorokin_fd@mail.ru)*

*\*\*\*e-mail: [vovkaster@gmail.com](mailto:vovkaster@gmail.com)*

**Аннотация**

Многие элементы конструкций летательных аппаратов могут быть сведены к расчетной схеме гибкого стержня, для которого характерны большие перемещения и повороты, но малые деформации. Для решения задач с такой расчетной схемой могут быть применены многие методы, однако наиболее удобным и универсальным является метод конечных элементов. В настоящей работе представлена модель конечного элемента гибкого стержня с описанием больших поворотов с помощью вектора Эйлера и связанного с ним тензора поворота. Для предотвращения проблем с поворотами системы до «особых» точек в работе используется отдельное хранение поворота накопленного и дополнительного поворота. В статье приводятся примеры решения задач с помощью разработанного конечного элемента, а

сравнение получаемых результатов с результатами других методов расчета, подтверждают его корректность.

**Ключевые слова:** гибкий стержень, конечные элементы, вектор Эйлера, тензор поворота, большие перемещения, большие повороты.

### **Введение**

Многие элементы конструкций летательных аппаратов могут быть сведены к расчетной схеме гибкого стержня, для которой характерны большие перемещения и большие повороты, но малые деформации. К таким элементам относятся лонжероны консолей крыла, стрингеры фюзеляжей, лопасти винтов и др. [1-4].

Для определения перемещений и внутренних силовых факторов в гибких стержнях разработано множество подходов, основанных на интегрировании систем нелинейных дифференциальных уравнений (ДУ) различных порядков [5-10]. Однако спектр задач, в которых возможно использование ДУ ограничен конструкциями, содержащими очень небольшое число гибких стержней, чаще всего на основе ДУ исследуется только один гибкий стержень. Если же конструкция содержит большое количество стержней и, кроме того, другие элементы, такие как пластинки, оболочки, жесткие и упругие связи, то практически неизбежным становится использование метода конечных элементов (МКЭ).

В случае малых перемещений и поворотов матрица жесткости стержневого КЭ постоянного сечения хорошо известна, она приводится практически во всех руководствах по МКЭ и изучается студентами. Этого нельзя сказать о КЭ гибкого стержня, предназначенного для учета больших перемещений и поворотов. В

отличии от случая малых перемещений и поворотов построение таких геометрически нелинейных КЭ может быть выполнено на основе множества принципиально различных подходов. Например, в [11] КЭ гибкого стержня строится с использованием независимого описания перемещений и поворотов полиномами Эрмита, что приводит к проблеме сдвигового запираания. В [12] применяется квадратичная аппроксимация элементов тензора поворота. В [13] используется векторно-тензорная теория больших поворотов, близкая к используемой в данной статье, но величина поворотов ограничена углом  $2\pi$ . В [14] положение каждого из узловых сечений КЭ задается радиусом вектором и двумя ортами, что позволяет избежать особых точек (см. ниже), но увеличивает количество кинематических параметров. В [15] модель строится на основе градиента деформаций и несимметричного тензора Пиолы-Кирхгофа. Похожий подход применяется и в [16] для формулировки криволинейных в начальном состоянии балочных элементов.

Разнообразие подходов объясняется также тем, что для описания больших поворотов в геометрии, физике и механике применяется не один десяток способов [17, 18]: матрицы поворота, векторы поворота (вектор Эйлера, вектор Родрига и др.), наборы последовательных поворотов (углы Эйлера, углы Крылова, самолетные углы и др.), кватернионы, конформное отображение комплексной сферы на себя, матрицы Паули и т.д.

The diagram shows a 3D coordinate system with a vector  $\mathfrak{g}$  pointing upwards and to the right. A curved arrow indicates a rotation around the axis defined by the vector. The vector is labeled as  $\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} \mathfrak{g}_1 \\ \mathfrak{g}_2 \\ \mathfrak{g}_3 \end{pmatrix}$ . The magnitude of the vector is labeled as  $\theta = \sqrt{\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2}$ .

## Рис. 1 Вектор Эйлера

По мнению авторов, наиболее удобным (и наиболее естественным) является описание больших поворотов с использованием вектора Эйлера [6,19,20,21]

$$\mathfrak{Q} = \theta \mathbf{e}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}$  – единичный вектор оси поворота,  $\theta$  - угол поворота.

Векторное описание поворотов основано на теореме Эйлера о том, что произвольная комбинация пространственных поворотов эквивалентна одному плоскому повороту. Вектор Эйлера как раз и задаёт этот плоский поворот (Рис.1).

Недостатком всех способов описания больших поворотов, использующих 3 кинематических параметра (углы Эйлера, углы Крылова, векторы поворота, кватернионы и др.) является наличие особых точек. Проблема состоит в том, что матрицы или тензоры, связывающие угловые скорости с производными кинематических параметров, становятся вырожденными при достижении поворотом некоторого критического значения [18]. (В задачах статики аналогом угловых скоростей выступают малые «физические» повороты, возникающие в процессе итерационного решения нелинейных алгебраических уравнений).

Углы Эйлера не применимы при нулевом угле нутации, углы Крылова не позволяют перейти рубеж  $\pi/2$ , для вектора Родрига поворот ограничен величиной  $\pi$ , для вектора Эйлера – величиной  $2\pi$ . Таким образом, интервал углов, практически для всех способов описания больших поворотов ограничен некоторыми границами. Исключение составляет способ, использующий матрицу поворота, но она содержит не 3, а 9 независимых кинематических параметров (иногда их количество снижают до

б), что весьма неудобно при использовании в МКЭ. Выполненный обзор показывает, что для описания поворотов, превосходящих величину  $2\pi$ , традиционные подходы в чистом виде не применимы и требуется их модификация. Особенно остро эта проблема проявляется в задачах роторной динамики, где необходимо рассматривать многие десятки тысяч полных оборотов ( $\theta > 20000\pi$ ).

### **Инкрементный способ описания больших поворотов**

Предлагаемая модификация позволяет описывать неограниченно большие повороты, причем базовый способ описания поворотов может быть любым. Основная идея модификации основана на том, что как в задачах статики, так и в задачах динамики приращения поворотов всегда малы. В задачах статики большие приращения поворотов могут вызвать расхожимость итерационного процесса, а в задачах динамики малость приращения поворотов обусловлена тем, что на одном полном обороте должно укладываться не менее 20 шагов интегрирования. В связи с этим предлагается хранить большую и малую часть поворота отдельно: большую в виде тензора (или матрицы), а малую – в виде вектора Эйлера.

Подчеркнем, что речь не идет о линеаризации. И тензор поворота и вектор Эйлера дают равноправное и полноценное геометрически нелинейное описание поворотов. Тензор поворота связан с вектором Эйлера следующим соотношением, которое можно рассматривать как тензорную функцию векторного аргумента [6]:

$$\mathbf{L}(\mathfrak{g}) = \mathbf{E} \cos(|\mathfrak{g}|) + \frac{1 - \cos(|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|^2} \mathfrak{g}\mathfrak{g} + \frac{\sin(|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|} \mathfrak{g} \times \mathbf{E}, \quad (2)$$

где  $\mathfrak{Q}$  - вектор Эйлера;  $L(\mathfrak{Q})$  – функция, вычисляющая тензор поворота по заданному вектору Эйлера;  $E$  – единичный тензор;  $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}$  – диадное произведение векторов  $\mathfrak{Q}$ ;  $\mathfrak{Q}\times E$  – кососимметричный тензор с сопутствующим вектором  $\mathfrak{Q}$ .

В начале шага итерационного процесса, либо шага интегрирования по времени положение и повороты всех узлов конструкции заданы. Это значит, что известны тензоры (матрицы) поворотов всех узлов. В процессе итераций либо численного интегрирования накопленную часть поворота произвольного узла (в виде тензора  $R_0$ ) предлагается оставлять неизменной, а изменять только дополнительную часть (в виде вектора Эйлера  $\mathfrak{Q}$ ). По завершению шага (итераций, либо интегрирования) вектор Эйлера с помощью функции (2) превращается в тензор дополнительного поворота и перемножается с тензором накопленного поворота. Этот алгоритм удобно представить в виде следующей таблицы (Табл.1).

Табл. 1 Алгоритм припасовывания малого поворота к большому

	Накопленный поворот	Вектор Эйлера
Начало шага	$R_0$	$0$
Конец шага	$R_0$	$\mathfrak{Q}$
Припасовывание малого поворота к большому и сброс малого поворота	$R_0 \rightarrow L(\mathfrak{Q}) \cdot R_0$	$\mathfrak{Q} \rightarrow 0$

Под шагом в таблице подразумевается либо шаг численного интегрирования, либо шаг итерационного процесса. В начале шага вектор Эйлера (малый поворот)

всегда равен нулю. После выполнения шага малый поворот припасовывается к большому и становится его частью. Следующий шаг опять начинается с нулевого вектора Эйлера. Фактически вектор Эйлера живет только на одном шаге.

Дополнительный поворот не может сильно измениться за один шаг численного метода. Традиционное ограничение в задачах динамики – изменение поворота не более чем на  $10^\circ$ - $20^\circ$  за один шаг интегрирования. Более того, припасовывание дополнительного поворота к накопленному повороту может производиться даже на итерациях неявного метода интегрирования (метод Ньюмарка и др.). В этом случае дополнительный поворот  $\vartheta$  играет роль невязки и всегда по модулю близок к нулю, а его малость обеспечивает отсутствие особых точек.

### **Представление произвольного движения КЭ как наложения малых деформаций на жесткое перемещение**

Рассмотрим небольшой участок гибкого стержня (КЭ), совершивший перемещение из начального недеформированного состояния (I) в актуальное деформированное состояние (III) (Рис. 2). Перемещение стержня описывается с помощью векторов линейных перемещений центров крайних сечений стержня  $\mathbf{u}_a$  и  $\mathbf{u}_b$ , тензоров больших поворотов сечений  $\mathbf{R}_{0a}$  и  $\mathbf{R}_{0b}$ , и векторов малых дополнительных поворотов сечения  $\vartheta_a$  и  $\vartheta_b$  (эти векторы в начале шага точно равны нулю).

По исходному предположению деформации малы, поэтому изменение геометрии (искривление) стержня не может быть большим и переход из (I) в (III)

близок к жесткому смещению. Выделим близкое к состоянию (III) промежуточное состояние (II), в которое стержень попал бы, если бы он не деформировался, а только совершал жесткое движение. Это состояние называется «теньвым» [22], так как оно воображаемое и его выбор не однозначен. В иностранной литературе ([18,20,22-27] и др.) КЭ, построенные с использованием промежуточного теневого состояния, называют **corotational finite elements**. Теневое состояние можно связать с актуальным положением одного из узлов, но тогда узлы будут не равноправными. В данной статье теневое состояние выбирается комбинированием среднего для двух узлов жесткого поворота (без учета  $\vartheta_a$ ,  $\vartheta_b$ ) и среднего по узлам перемещения именно с целью сохранения равноправности узлов КЭ.

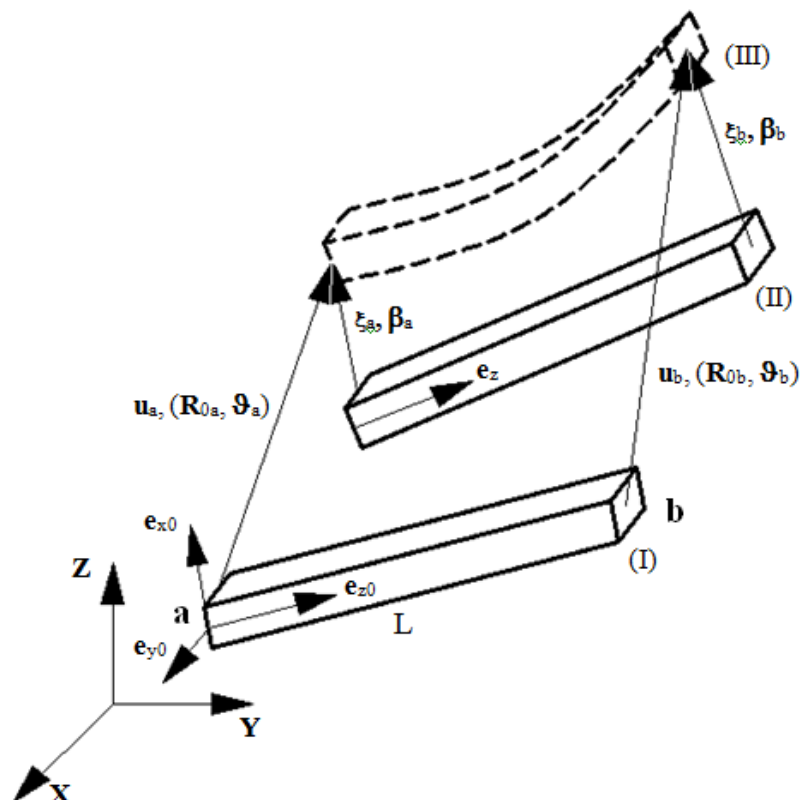


Рис. 2 Участок гибкого стержня в исходном (I), теньвом (II) и актуальном (III) состояниях



Тензоры  $\mathbf{R}_{0a}$  и  $\mathbf{R}_{0b}$  описывают близкие повороты, поэтому можно выделить из них большой средний поворот и малый дополнительный (одинаковый для обоих узлов, но противоположный по направлению)

$$\mathbf{R}_{0b} = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_m \text{ и } \mathbf{R}_{0a} = \mathbf{R}_1^T \cdot \mathbf{R}_m. \quad (3)$$

где  $\mathbf{R}_m$  – тензор среднего поворота,  $\mathbf{R}_1$  – тензор малого дополнительного поворота.

Из (3) следует

$$\mathbf{R}_{0b} \cdot \mathbf{R}_{0a}^T = (\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_m) \cdot (\mathbf{R}_m^T \cdot \mathbf{R}_1) = \mathbf{R}_1^2. \quad (4)$$

Вектор поворота  $\mathfrak{R}_1$ , соответствующий тензору  $\mathbf{R}_1$ , выделяется из тензора  $\mathbf{R}_1^2$  с помощью операции вычисления векторного инварианта [7]

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{1}{4} \left( \frac{2|\mathfrak{R}_1|}{\sin(2|\mathfrak{R}_1|)} \right) (\mathbf{R}_{0b} \cdot \mathbf{R}_{0a}^T)_{\times} \quad (5)$$

Скалярные множители в числителе и знаменателе (5) удобно находить в два этапа:

$$|\mathfrak{R}_1| = \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{1}{2} \left| (\mathbf{R}_{0b} \cdot \mathbf{R}_{0a}^T)_{\times} \right| \right) \quad (6)$$

По найденному из соотношений (5) вектору  $\mathfrak{R}_1$  восстанавливается тензор малого поворота  $\mathbf{R}_1$  и далее на основе соотношений (3) тензор среднего поворота  $\mathbf{R}_m$ :

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{L}(\mathfrak{R}_1) \text{ и } \mathbf{R}_m = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_{0a}. \quad (7)$$

Найденное значение среднего поворота позволяет полностью определить положение КЭ в теновом состоянии (II). При переходе из (I) в (II) стержень

совершает большое жесткое поступательное перемещение на вектор  $\mathbf{u}_m = \frac{\mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b}{2}$  и затем большой жесткий поворот с тензором  $\mathbf{R}_m$  вокруг центральной точки КЭ.

При дальнейшем переходе из (II) в (III) малы не только деформации, но также малы относительные перемещения и повороты. Так как малые дополнительные повороты  $\vartheta_a$  и  $\vartheta_b$  (переменные на шаге) не учитывались на этапе выделения теневого состояния (переход из (I) в (II)), то они должны быть учтены на этапе выделения малых перемещений и поворотов (переход из (II) в (III)).

При рассмотрении только поворотов процесс перехода из (I) в (III) можно интерпретировать следующим образом: весь стержень совершает большой поворот с тензором  $\mathbf{R}_m$ , далее сечение «а» стержня поворачивается на малый вектор  $(\vartheta_a - \vartheta_1)$ , сечение «b» - на малый вектор  $(\vartheta_b + \vartheta_1)$ . Таким образом относительные повороты узлов стержня равны

$$\beta_a = \vartheta_a - \vartheta_1 \text{ и } \beta_b = \vartheta_b + \vartheta_1. \quad (8)$$

Отметим, что в общем случае векторное суммирование поворотов недопустимо [19], но в выражении (8) эта операция вполне корректна, так как относительные повороты весьма малы.

Малые относительные перемещения находятся как разности радиусов векторов положения точек в актуальном (III) и теновом (II) состояниях, при этом цепочки векторных сумм начинаются из центра КЭ в исходном состоянии (I):

$$\begin{aligned}
\xi_a &= \left( -\mathbf{e}_{z0} \frac{L}{2} + \mathbf{u}_a \right) - \left( \mathbf{u}_m - \mathbf{R}_m \cdot \mathbf{e}_{z0} \frac{L}{2} \right) = \frac{\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b}{2} + (\mathbf{R}_m - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{e}_{z0} \frac{L}{2} \\
\xi_b &= \left( \mathbf{e}_{z0} \frac{L}{2} + \mathbf{u}_b \right) - \left( \mathbf{u}_m + \mathbf{R}_m \cdot \mathbf{e}_{z0} \frac{L}{2} \right) = -\xi_a \\
\mathbf{u}_m &= \frac{\mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b}{2}
\end{aligned} \tag{9}$$

где  $\mathbf{u}_m$  – вектор среднего перемещения;  $L$  – длина КЭ; остальные обозначения представлены на рис. 2.

Глобальный вектор  $12 \times 1$  обобщенных перемещений, составленный на основе соотношений (8) и (9), разбивается на однородную и неоднородную части

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \xi_a \\ \beta_a \\ \xi_b \\ \beta_b \end{pmatrix} = \mathbf{y}_0 + [\mathbf{H}] \mathbf{y}, \tag{10}$$

где

$$[\mathbf{H}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{E} & \mathbf{0} & -\frac{1}{2} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} +(\mathbf{R}_m - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{e}_{z0} \frac{L}{2} \\ -\vartheta_1 \\ -(\mathbf{R}_m - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{e}_{z0} \frac{L}{2} \\ +\vartheta_1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_a \\ \vartheta_a \\ \mathbf{u}_b \\ \vartheta_b \end{pmatrix} \tag{11}$$

Неоднородная часть  $\mathbf{y}_0$  определяется лишь накопленными поворотами, поэтому она полностью известна в начале шага и не меняется на итерациях или в процессе численного интегрирования на один шаг по времени. Вектор  $\mathbf{y}$  – это комбинация больших неизвестных полных перемещений и неизвестных малых дополнительных поворотов.

### Энергия деформации КЭ

Энергия деформации определяется лишь относительными перемещениями и поворотами:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T [\mathbf{K}_{II}] \mathbf{z} \quad (12)$$

где  $[\mathbf{K}_{II}]$  – матрица жесткости стержня в теневом положении. Она определяется матрицей жесткости  $[\mathbf{K}_{local}]$  в локальных координатах стержня и двумя последовательными поворотами ( $\mathbf{R}_0$  – поворот из глобальной системы координат в локальную,  $\mathbf{R}_m$  – поворот из исходного состояния (I) в теневое (II))

$$[\mathbf{K}_{II}] = [\mathbf{R}_{all}] [\mathbf{K}_{local}] [\mathbf{R}_{all}]^T$$

$$[\mathbf{R}_{all}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{II}] & & & \\ & [\mathbf{R}_{II}] & & \\ & & [\mathbf{R}_{II}] & \\ & & & [\mathbf{R}_{II}] \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{R}_{II}] = [\mathbf{R}_m] [\mathbf{R}_0] \quad (13)$$

В соотношении (13) и ниже квадратные скобки используются двояким образом: либо это обозначение квадратной матрицы произвольного размера, либо обозначение операции перехода от тензора второго ранга к матрице  $3 \times 3$ .

Матрица  $[\mathbf{K}_{local}]$  общеизвестна, в случае использования гипотезы плоских сечений она равна

$$[\mathbf{K}_{local}] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_x}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EJ_x}{L^3} & 0 & -\frac{6EJ_x}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EJ_x}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_x}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_x}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_x}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_k}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_k}{L} \\ -\frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & \frac{12EJ_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_x}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_x}{L^3} & 0 & \frac{6EJ_x}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EJ_x}{L^2} & 0 & \frac{2EJ_x}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_x}{L^2} & 0 & \frac{4EJ_x}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_y}{L} & 0 & -\frac{6EJ_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_y}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_k}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_k}{L} \end{bmatrix}$$

где  $E$ ,  $G$  – модули упругости первого и второго рода;  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_k$  – осевые моменты инерции и геометрическая жесткость на кручение поперечного сечения.

Если в расчете требуется учесть поперечные сдвиги («балка Тимошенко») и/или рассматривается стержень переменного сечения, то достаточно заменить показанную матрицу жесткости  $[\mathbf{K}_{local}]$  на более общую. Таким образом, предлагаемая методика представляет собой универсальный способ перехода от задач с малыми перемещениями и поворотами к задачам, в которых перемещения и повороты большие, но деформации малые.

Матрица поворота  $[\mathbf{R}_0]$  показывает начальное положение стержня относительно глобальных неподвижных координат и вычисляется через координаты главных ортов стержня  $\mathbf{e}_{x0}$ ,  $\mathbf{e}_{y0}$ ,  $\mathbf{e}_{z0}$  в исходном состоянии (столбцы матрицы – главные орты)

$$[\mathbf{R}_0] = \begin{bmatrix} e_{x01} & e_{y01} & e_{z01} \\ e_{x02} & e_{y02} & e_{z02} \\ e_{x03} & e_{y03} & e_{z03} \end{bmatrix} \quad (14)$$

### Касательная матрица жесткости и вектор узловых сил КЭ

В геометрически нелинейных задачах матрицы жесткости КЭ строятся по специальным правилам. Задача статики в случае упругого поведения материала и потенциальных внешних силах эквивалентна нахождению положения минимума полного потенциала. При поиске минимума система линейных уравнений, вытекающая из метода Ньютона, имеет вид

$$\left[ \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{y}^2} \right] \Delta \mathbf{y} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{P}^{(e)} \quad (15)$$

где  $\mathbf{P}^{(e)}$  – вектор внешних обобщенных сил.

Так как выражение (14а) внешне полностью соответствует обычному уравнению МКЭ при поиске неизвестных приращений перемещений  $\Delta \mathbf{y}$ , то из этого

следует, что матрица вторых производных энергии деформаций  $\left[ \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{y}^2} \right]$  играет такую же роль как матрица жесткости, а матрица-столбец первых производных, взятых с

обратным знаком  $\left( -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}} \right)$ , – такую же роль как вектор сил. В русскоязычной

литературе такие матрицы называют касательными матрицами жесткости, в иностранной литературе используется термин «tangent stiffness matrix», поэтому иногда встречается сочетание «тангентная матрица жесткости», которое не является общепринятым. Таким образом, вычисление касательной матрицы жесткости КЭ

сводится к двукратному дифференцированию энергии деформаций по обобщенным перемещениям, а вычисление вектора упругих сил КЭ – к однократному.

Подстановка вектора малых перемещений, найденного из (10), в выражение (12) с последующим разделением на малые первого и второго порядка, позволяет представить энергию деформаций в следующем виде

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{y}_0^T [\mathbf{K}_{II}] \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}^T [\mathbf{H}]^T [\mathbf{K}_{II}] \mathbf{y}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T [\mathbf{H}]^T [\mathbf{K}_{II}] [\mathbf{H}] \mathbf{y} \quad (16)$$

Дифференцирование по вектору перемещений дает выражение для вектора упругих сил и основной части касательной матрицы жесткости

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}} = -[\mathbf{H}]^T [\mathbf{K}_{II}] (\mathbf{y}_0 + [\mathbf{H}] \mathbf{y}) \\ [\mathbf{K}_{\text{tang1}}] &= \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{y}^2} = [\mathbf{H}]^T [\mathbf{K}_{II}] [\mathbf{H}] \end{aligned} \quad (17)$$

Тестовые расчеты больших перемещений криволинейных гибких стержней, выполненные с использованием выражений (17), показали, что для некоторых сочетаний конфигураций и нагрузок итерационный процесс расходится, даже при очень малых шагах нагружения. Причина численных проблем заключается в том, что найденная в (17) матрица жесткости  $[\mathbf{K}_{\text{tang1}}]$ , не учитывает специфические эффекты, проявляющиеся только в нагруженном стержне (Рис. 3).

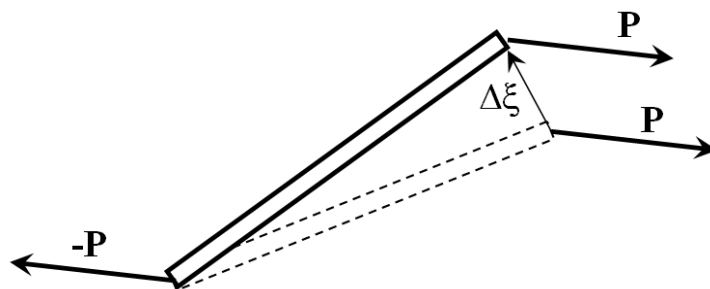


Рис. 3 Изменение момента пары сил при вариациях перемещений стержня

На рис. 3 показано, что изменение перемещений одного из узлов в случае наличия существенной внутренней силы приводит к появлению дополнительного момента (за счёт изменения плеча пары сил). Такое же изменение момента получается, если условно принять стержень неподвижным (штриховая линия на рис. 3), а повернуть силы  $\mathbf{P}$  на тот же угол, на который повернулся стержень. Отмеченные наблюдения и численные эксперименты приводят к выводу, что при варьировании (17) следует обязательно учитывать ту часть поворотов матрицы  $[\mathbf{K}_{II}]$ , которая приводит к эффектам, отмеченным на рис. 3 (в приведенных выше выкладках  $[\mathbf{K}_{II}]$  зависит от начальных поворотов узлов  $\mathbf{R}_{0a}$  и  $\mathbf{R}_{0b}$ , но не от дополнительных поворотов  $\vartheta_a$  и  $\vartheta_b$ ). То есть, дополнительные повороты  $\vartheta_a$  и  $\vartheta_b$  следовало бы учесть и при нахождении теневого состояния (II). Однако это невозможно реализовать из-за чрезмерного увеличения сложности результирующих выражений, а использование компьютерной аналитики приводит к нечитаемому компьютерному коду, который не поддается анализу и который невозможно будет модифицировать в дальнейшем.

В связи со сказанным выше, дополнительный учет эффектов от вращения КЭ был выполнен приближенно. Рассматривалась вторая вариация энергии деформации, но в предположении, что компоненты вектора упругих сил изменяются только за счет поворотов

$$\Delta^2 U = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \vartheta_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \vartheta_b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{P}_a \\ \Delta \mathbf{M}_a \\ \Delta \mathbf{P}_b \\ \Delta \mathbf{M}_b \end{pmatrix} \approx -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \vartheta_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \vartheta_b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Delta \varphi_m \times \mathbf{P}_a \\ \Delta \varphi_m \times \mathbf{M}_a \\ \Delta \varphi_m \times \mathbf{P}_b \\ \Delta \varphi_m \times \mathbf{M}_b \end{pmatrix} \approx -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \vartheta_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \vartheta_b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Delta \varphi_m \times \mathbf{P}_a \\ \mathbf{0} \\ \Delta \varphi_m \times \mathbf{P}_b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (18)$$



где  $\Delta\varphi_m$  – приращение среднего поворота КЭ в теневом состоянии при малых вариациях углов поворотов узлов;  $\mathbf{P}_a, \mathbf{M}_a, \mathbf{P}_b, \mathbf{M}_b$ , - векторы узловых сил и моментов.

$$\Delta\varphi_m = \frac{\Delta\vartheta_a + \Delta\vartheta_b}{2} \quad (19)$$

С учетом (19) векторные произведения в (18) преобразуются следующим образом

$$\Delta\varphi_m \times \mathbf{P}_a = -\mathbf{P}_a \times \Delta\varphi_m = -(\mathbf{P}_a \times \mathbf{E}) \cdot \Delta\varphi_m = -\frac{1}{2}(\mathbf{E} \times \mathbf{P}_a) \cdot (\Delta\vartheta_a + \Delta\vartheta_b) \quad (20)$$

В результате подстановки (20) в (18) удастся представить вторую вариацию энергии КЭ через приращения перемещений и поворотов

$$\Delta^2 U \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{u}_a \\ \Delta\vartheta_a \\ \Delta\mathbf{u}_b \\ \Delta\vartheta_b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{P}_a & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{P}_a \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{P}_b & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{P}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{u}_a \\ \Delta\vartheta_a \\ \Delta\mathbf{u}_b \\ \Delta\vartheta_b \end{pmatrix} \quad (21)$$

Симметричная часть матрицы в (21) и есть искомая дополнительная часть касательной матрицы жесткости

$$[\mathbf{K}_{\text{tang2}}] = \frac{1}{4}([\mathbf{S}] + [\mathbf{S}]^T)$$

$$[\mathbf{S}] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \times \mathbf{P}_a & \mathbf{0} & \mathbf{E} \times \mathbf{P}_a \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \times \mathbf{P}_b & \mathbf{0} & \mathbf{E} \times \mathbf{P}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Блоки матрицы  $[S]$  записаны как тензоры, но переход от тензоров к матрицам  $3 \times 3$  для каждого блока выполняется элементарно. Полная касательная матрица жесткости складывается из основной и дополнительной частей

$$[K_{\text{tang}}] \approx [K_{\text{tang1}}] + [K_{\text{tang2}}]. \quad (23)$$

Отметим сравнительную простоту предложенного алгоритма составления матрицы  $[K_{\text{tang}}]$  на фоне многочисленных альтернативных подходов.

### **Тестовые примеры и контроль результатов**

В качестве первого тестового примера рассматривалась задача из работы [11] (стр.134), решение которой первоначально была опубликовано К.-J. Vathe и S. Volourchi в 1979 году и потом использовалось для тестирования в очень многих работах по рассматриваемой теме. Криволинейный стержень квадратного поперечного сечения с осью в виде дуги окружности (арка) был заделан на одном краю и нагружен силой  $f$  из своей плоскости на другом краю (Рис. 4). Радиус кривизны оси стержня  $R=100\text{м}$ , дуга окружности  $\varphi=45^\circ$ , поперечное сечение – квадрат со стороной  $a=1\text{м}$ , модуль упругости  $E=10\text{МПа}$ , коэффициент Пуассона  $\mu=0$ . Результаты расчета перемещений крайней точки арки, полученные в работе [11] для нескольких величин силы  $f$ , представлены в таблице на рис. 4.

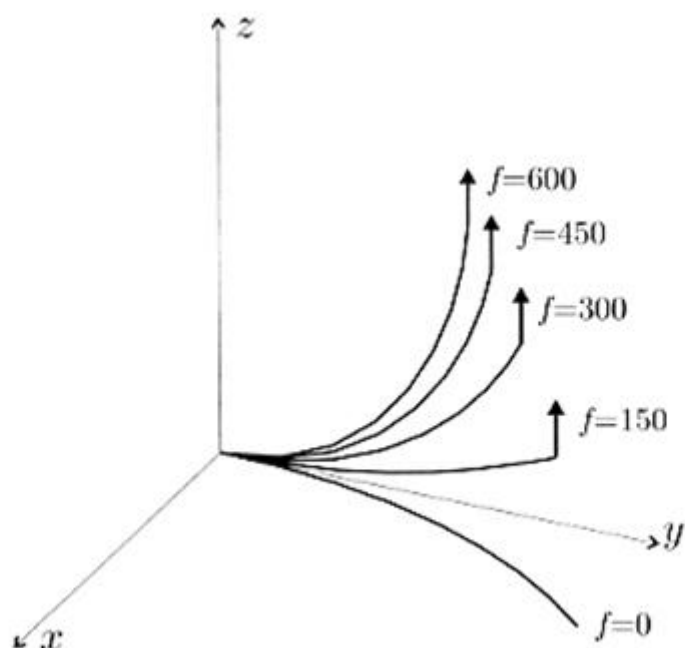


Рис. 4 Конфигурация нагруженного стержня при различных значениях силы  $f$ , [Н];  
 перемещения в таблице даны в метрах (по результатам работы [11])

Для тестирования разработанного КЭ та же арка разбивалась на 16 конечных элементов. Нагрузка прикладывалась порциями по 75Н. Инкрементные приспособывания малых поворотов к большим производились непосредственно в ходе итерационного процесса метода Ньютона. После каждой итерации векторы малых дополнительных поворотов сечений  $\vartheta_a$ ,  $\vartheta_b$  преобразовывались в тензоры (матрицы), которые перемножались с тензорами больших накопленных поворотов  $\mathbf{R}_{0a}$ ,  $\mathbf{R}_{0b}$  и «растворялись» в них. Так как в результате приспособывания дополнительные повороты в конце предыдущей итерации были включены в состав накопленных поворотов, то в начале следующей итерации векторы  $\vartheta_a$ ,  $\vartheta_b$  всегда равны нулю.

Полученная в ходе тестирования КЭ конфигурация арки при нагрузке 600Н показана на рис. 5.

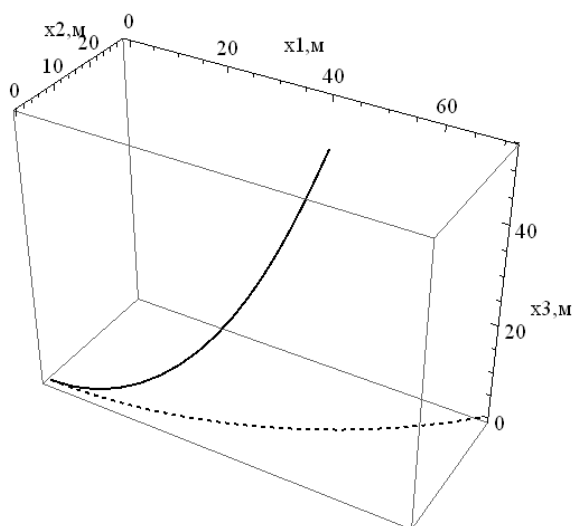


Рис. 5 Конфигурация нагруженного стержня в исходном (пунктирная линия) и в деформированном (сплошная линия) состояниях, полученная с помощью разработанного КЭ гибкого стержня (сила 600Н)

Координаты крайней точки при нагрузке 600Н равны  $r = (46.84, 15.56, 53.66)$ , м что очень хорошо совпадает с результатами из [20] –  $r = (47.04, 15.55, 53.50)$ , м.

Кроме того, полученные значения координат практически совпадают с результатами решения нелинейной краевой задачи для системы ДУ, предложенной в работе [9]:  $r = (46.8976, 15.5606, 53.5986)$ , м. Однако многие авторы, которые стремились получать аналогичные результаты с четырьмя и более значащими цифрами, пришли к несколько иным числам, например, в работе [27] при разбиении той же арки на 32 КЭ получено  $r = (47.15, 15.68, 53.47)$ , м. Интересно отметить, что различные варианты построения КЭ, рассмотренные в [27], и разное количество КЭ (8 или 32) не меняют первых четырех значащих цифр в  $r$ . Как видим, абсолютного совпадения с решением системы ДУ здесь нет, наблюдаются отличия во втором-третьем знаке при желательной точности в четыре и более знаков.

Отмеченное различие можно было бы считать не существенным при решении практических задач, но в тестовой задаче ожидалось гораздо лучшее соответствие решениям ДУ.

В результате численных экспериментов авторы данной статьи пришли к выводу, что в [27] и еще нескольких работах **содержится ошибка** при задании геометрической жесткости сечения на кручение  $J_k$ . Так, если принять для квадратного сечения неверное значение  $J_k=2J_x= 0,167a^4$ , то система ДУ из [9] дает  $r=(47.15, 15.6851, 53.4686), м$ , что совпадает с результатами [27], но не соответствует решению системы ДУ при правильном значении  $J_k=0,141a^4$ . Так как ДУ в сочетании с современными компьютерными пакетами позволяют получить очень высокую точность (до нескольких десятков знаков), то правильным ответом в этой «культовой» задаче следует признать результат решения ДУ:  $r=(46.90, 15.56, 53.60), м$  (поперечные сдвиги и осевые деформации при получении этого результата не учитывались).

Второй тест проводился на задаче о расчете конфигурации деформированной винтовой пружины при действии на неё изгибающего момента. Пружина на одном конце была полностью заделана, а на другом нагружена моментом, плоскость действия которого проходит через ось пружины. Сечение пружины – квадрат со стороной  $a=0,7 мм$ , количество витков  $n=10$ , угол подъема  $\gamma = \frac{\pi}{24} рад$ , модуль упругости  $E=2,6 \cdot 10^4 мм$ , коэффициент Пуассона  $\mu=0.3$ , изгибающий момент  $M=7 Н \cdot мм$ .

При расчете пружина разбивалась на 100 одинаковых КЭ (10 КЭ на один виток). Внешняя нагрузка (момент) прикладывалась малыми порциями по 0,2 Н·мм – всего 35 шагов нагружения. Полученная конфигурация показана на рис. 6.

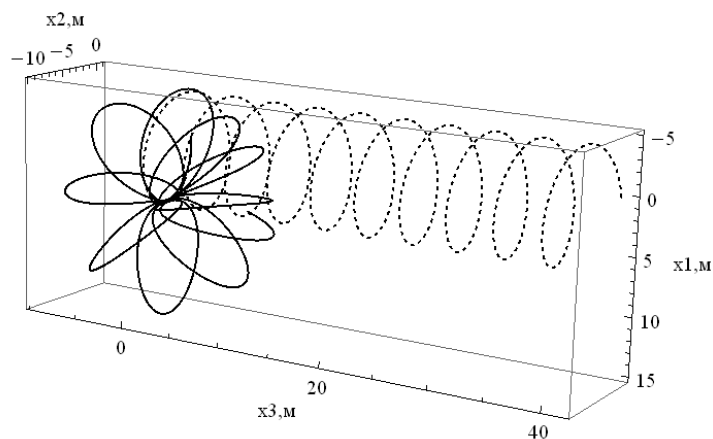


Рис. 6 Конфигурация пружины в исходном (пунктирная кривая) и деформированном (сплошная кривая) состояниях, полученная с помощью разработанных КЭ гибкого стержня

Координаты крайней точки в деформированном состоянии равны  $r = (6.31423, 1.04908, 5.53497)$ , мм . Эта же задача решалась с помощью геометрически нелинейной системы ДУ гибких стержней [6, 9]. Найденная из решения ДУ конфигурация деформированной пружины визуально не отличима от конфигурации на рис. 3 и поэтому здесь не показана. Координаты крайней точки в деформированном состоянии, полученные численным интегрированием системы ДУ, равны  $r = (6.31517, 1.04921, 5.53508)$ , мм.

Расхождение этих координат с результатами, полученными с использованием разработанного КЭ, составляют не более 0,1%. Таким образом, и второй тест также демонстрирует хорошую точность разработанного КЭ. И в первом и во втором тесте

КЭ продемонстрировал хорошую сходимость итерационного процесса (3-4 итерации на один шаг нагружения).

### **Заключение**

В статье приведен вывод касательной матрицы жесткости и вектора упругих сил геометрически нелинейного КЭ гибкого стержня с отдельным хранением большой и малой части поворотов. Выражения для матрицы жесткости и вектора сил представлены в удобном замкнутом виде и несложно программируются. Элемент построен с использованием векторно-тензорной теории конечных поворотов и описывает большие перемещения и повороты на фоне малых деформаций. Отдельное хранение большой постоянной и малой переменной части поворота позволяет избежать особых точек и достигать углов поворота больших, чем  $2\pi$ .

Разработанные алгоритмы вычисления матрицы жесткости и вектора сил проверялись сопоставлением с результатами, полученными другими методами. На основании тестовых примеров можно сделать заключение о хорошей точности и численной устойчивости предложенного КЭ.

Стоит отметить, что в большинстве работ других авторов балочные модели выводятся из общих соотношений теории упругости, на которые накладываются определенные допущения по размерам и кинематике рассматриваемого объекта. Такой подход универсален (применим не только к балкам), но не может похвастаться простотой в понимании и легкостью в численной реализации. В настоящей же работе предлагается отличная парадигма: конечный элемент строится на основе сопряженного, хорошо знакомого прародителя. Иными словами,

классическая балочно-стрепневая матрица жесткости оборачивается математикой, отвечающей за большие повороты и перемещения. В этом смысле предложенный элемент имеет общие точки соприкосновения с коротационной концепцией построения КЭ, разработанной в [28].

Еще одним важным преимуществом предложенной балочной модели является симметричность ее тангентных матриц, что крайне важно для численной реализации, т.к. позволяет, во-первых, применять более эффективные алгоритмы решения СЛАУ, а, во-вторых, существенно улучшить сходимость итераций метода Ньютона-Рафсона [29]. Далеко не все геометрически нелинейные балочные модели (как, например, [30]) обладают этим свойством.

Дальнейшее развитие данной работы возможно путем применения данного КЭ к решению задач динамики. В предложенном виде замкнутые соотношения для касательной матрицы жесткости и вектора упругих сил КЭ вполне применимы при статических расчетах элементов конструкций летательных аппаратов, имеющих вид гибких стержней.

### **Библиографический список**

1. Братухина А.И. Об усталостной прочности лопасти несущего винта вертолета при действии ветровых нагрузок // Труды МАИ, 2001, №4: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34669>
2. Братухина А.И. Некоторые особенности исследования динамической прочности лопастей несущего винта с бесшарнирным креплением при полете в беспокойной атмосфере // Труды МАИ, 2001, №4: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34668>



3. Загордан А.А. Исследование работоспособности упругого отклоняемого носка крыла под действием внешних нагрузок // Труды МАИ, 2010, №38:  
<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=14145>
4. Комаров В.А., Кузнецов А.С., Лаптева М.Ю. Оценка эффекта учета деформаций крыла на ранних стадиях проектирования // Труды МАИ, 2011, №43:  
<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=24759>
5. Светлицкий В.А. Механика стержней. Статика. - М.: Высшая школа, 1987. - 320 с.
6. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней. - СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2008.- 95 с.
7. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней.- СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2007. - 101 с.
8. Бадиков Р.Н. Расчётно-экспериментальное исследование напряжённо-деформированного состояния и резонансных режимов вращения винтовых пружин в пружинных механизмах: дис. ...канд. техн. наук. - М.: 2009. - 166 с.
9. Сорокин Ф.Д. Прямое тензорное представление уравнений больших перемещений гибкого стержня с использованием вектора конечного поворота // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 1994. № 1. С. 164-168.
10. Левин В.Е., Пустовой Н.В. Механика деформирования криволинейных стержней. – Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2008. - 208 с.
11. Geradin M., Cardona A. Flexible Multibody Dynamics – A Finite Element Approach. Wiley, New York. 2000. 327 p.

12. Лалин В.В., Яваров А.В. Построение и тестирование конечного элемента геометрически нелинейного стержня Бернулли-Эйлера // Жилищное строительство. 2013. №5. С. 51-55.
13. Семенов П.Ю. Стержневой конечный элемент для расчетов с большими перемещениями и вращениями // Труды II международной конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела». Казань, НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2009. С. 24-29.
14. Левяков С.В. Нелинейный пространственный изгиб криволинейных стержней с учетом поперечного сдвига // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. №2. С.128-136.
15. Pimenta P. M., Yoho T. Geometrically exact analysis of spatial frames. // *Applied Mechanics Reviews*. 1993. V. 46. N. 1. P. 118-128.
16. Ibrahimbegović A. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1995. V. 122. N. 1-2. P. 11-26.
17. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. - М.: Наука, 1992. - 280 с.
18. Bremer H. Elastic multibody dynamics: a direct Ritz approach. Springer. 2008. 449 p.
19. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. - СПб.: Нестор, 2001. - 276 с.
20. Rankin C. C., Brogan F. A. An Element Independent Corotational Procedure for the Treatment of Large Rotation // *Journal of Pressure Vessel Technology-Transactions of The ASME*. 1986. V. 108. N 2. P. 165-174.

21. Crisfield M. A. *Nonlinear Finite Element Analysis of Solid and Structures*. John Wiley & Sons, Chichester. 1996. V. 2. 493 p.
22. Felippa C. A. *A Systematic Approach to the Element-Independent Corotational Dynamics of Finite Elements*. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado. 2000. 42p.
23. Belytschko T., Glaum L. W. *Application of Higher Order Corotational Stretch Theories to Nonlinear Finite Element Analysis // Computers & Structures*. 1979. V. 10. N 1-2. P. 175-182.
24. Battini J. - M., Pacoste C. *Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems // Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2002. V. 191. P. 1755-1789.
25. Hsiao K. - M., Horng H. - J., Chen Y. - R. *A corotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures // Comput. Structures*. 1987. V. 27. N 6. P. 769-781.
26. Crisfield M. A. *A consistent co-rotational formulation for non-linear three-dimensional beam elements // Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 1990. V. 81. P. 131-150.
27. Meiera C., Wall W., Popp A. *Geometrically Exact Finite Element Formulations for Curved Slender Beams: Kirchhoff-Love Theory vs. Simo-Reissner Theory // Cornell University Library*, 2016. URL: <https://arxiv.org/abs/1609.00119> (дата обращения: 19.10.2016)
28. Felippa C. A., Haugen, B. *A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1994. V. 194. N. 21. P. 2285-2335.

29. Simo J. C., Vu-Quoc L. A three-dimensional finite strain rod model. Part II: Computational aspects. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996. V. 58. N. 1. P. 79-116.
30. Simo J. C. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1995. V. 49. N. 1. P. 55–70.