

Силовые трубки и биповерхности в электромагнетизме

Р.И.Храпко

Для адекватного¹ изображения электромагнитного поля не достаточно силовых линий Фарадея. Необходимо использовать поверхности. Поверхности позволяют наглядно изображать, например, порождение магнитного поля током или порождение скалярного потенциала электрическим полем. Однако, строго говоря, следует использовать не линии, а трубки, не поверхности, а биповерхности. Для пояснения этого используется представление о дифференциальных формах и псевдо формах. Интеграл типа закона Био-Савара от формы называется порождением этой формы. Показывается, что порождение порождения равно нулю. Поэтому порожденное поле называется стерильным полем. Сопряжение переводит замкнутые формы в стерильные и наоборот. Это открывает возможность построения цепочек форм. Сопряжение отличается от операции Ходжа отсутствием дуализации.

1. Силовые линии или силовые трубки?

Трудно переоценить методическое и эвристическое значение силовых линий, которые были введены в электромагнетизм Майклом Фарадеем. Например, порождение электростатического поля плотностью заряда описывается математически формулой

$$\mathbf{D}(x) = \int \frac{\rho(x') \mathbf{r}(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')} \quad \text{или} \quad D^i(x) = \int \frac{\rho(x') r^i(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')}, \quad (1)$$

выражающей интегральный закон Кулона. Но наглядно, графически это изображается силовыми линиями электрической индукции \mathbf{D} , выходящими из тех мест, где расположена плотность заряда ρ .

Тем не менее, на наш взгляд, нельзя пренебрегать тем фактом, что в действительности индукция \mathbf{D} , так же, как плотность заряда ρ , плотность электрического тока \mathbf{j} , напряженность магнитного поля \mathbf{H} , являются тензорными плотностями веса +1. Чтобы подчеркнуть это, в серьезной литературе для величин \mathbf{D} , \mathbf{j} , \mathbf{H} используют готический шрифт. Так сделано и в известной монографии [1].² Но в настоящей работе мы будем использовать значок \wedge на уровне нижних или верхних индексов для обозначения плотностей веса +1 или -1. Таким образом, формула (1) имеет вид:

$$\mathbf{D}_{\wedge}(x) = \int \frac{\rho_{\wedge}(x') \mathbf{r}_{\wedge}(x, x') dV_{\wedge}'}{4\pi r^3(x, x')} \quad \text{или} \quad D_{\wedge}^i(x) = \int \frac{\rho_{\wedge}(x') r_{\wedge}^i(x, x') dV_{\wedge}'}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (1)$$

¹ Адекватное = вполне соответствующее действительности.

² Переводчик книги [1], И.А.Кунин, использовал в [2] латинские буквы, надписывая над ними значок \wedge .

Математически тензорные плотности отличаются от тензоров тем, что при замене координат закон их преобразования содержит модуль якобиана [1, 2]. Например, электрическая индукция преобразуется согласно формуле

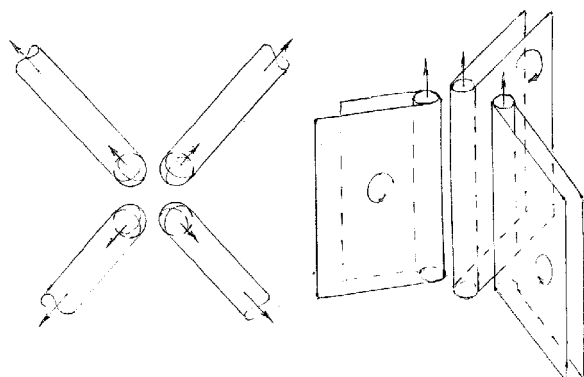
$$D_{\wedge}^i = D_{\wedge}^{\prime i} \cdot \partial_{i'}^i |\Delta'|.$$

Здесь $\partial_{i'}^i$ - матрица преобразования координат: $\partial_{i'}^i = \partial x^i / \partial x^{i'}$. $\Delta' = \text{Det}(\partial_{i'}^i)$ обозначает определитель обратной матрицы.³ Элемент объема dV_{\wedge} является, как известно, скалярной плотностью веса - 1. Двухточечный радиус-вектор $\mathbf{r}_{\wedge}(x, x')$ здесь является векторной плотностью веса + 1 в точке x .

Очень важно, что тензорные плотности отличаются от тензоров и графическим изображением. Так векторная плотность веса + 1 геометрически интерпретируется как цилиндр с внутренней ориентацией [1, 2], а не как вектор-стрелка. Поэтому поле $\mathbf{D}_{\wedge}(x)$ должно изображаться с помощью трубок, а не силовых линий.

Скалярная плотность веса + 1 интерпретируется как объем с внутренней ориентацией [1, 2]. При этом ориентация поверхности объема внешняя. Поэтому поле $\rho_{\wedge}(x)$ следует изображать с помощью разбросанных шариков, из которых торчат ориентационные стрелки.

Плотность заряда порождает индукцию по формуле (1). Геометрически это выглядит так. Силовые трубки $\mathbf{D}_{\wedge}(x)$ начинаются на шариках $\rho_{\wedge}(x)$. Ориентационные стрелки геометрических величин $\mathbf{D}_{\wedge}(x)$ и $\rho_{\wedge}(x)$ при этом совпадают. Это изображено на рисунке 1 слева.



³ Мы применяем систему меченых индексов. Штрихи несут индексы, а не коренные буквы. При этом штрихи в интегралах (1) отмечают переменную точку x' , а не иную систему координат.

Рис. 1. Слева плотность заряда ρ_{\wedge} в виде шариков порождает трубки индукции \mathbf{D}_{\wedge} .

Справа трубки плотности тока \mathbf{j}_{\wedge} порождают биповерхности напряженности \mathbf{H}_{\wedge} .

С другой стороны, шарики $\rho_{\wedge}(x)$ являются концами силовых трубок $\mathbf{D}_{\wedge}(x)$. Шарики $\rho_{\wedge}(x)$ ограничивают трубки $\mathbf{D}_{\wedge}(x)$. Удобно сказать, что поле $\rho_{\wedge}(x)$ является границей поля $\mathbf{D}_{\wedge}(x)$. Это выражается формулой

$$\rho_{\wedge}(x) = \operatorname{div} \mathbf{D}_{\wedge}(x) \quad \text{или} \quad \rho_{\wedge} = \partial_i D_{\wedge}^i. \quad (2)$$

Таким образом, дифференцирование поля приводит к его границе.

Однако не всякое дифференцирование поля приводит к его границе. Оказывается, что внешнее дифференцирование дифференциальной формы (или псевдо формы) приводит к дифференциальной форме, являющейся границей дифференцируемой дифференциальной формы.

2. Дифференциальные формы и псевдо формы.

Границы, наполнения, источники и порождения

Как известно, дифференциальными формами или, проще, формами называют ковариантные тензоры, если они антисимметричны, когда их валентность (количество индексов) больше чем 1 [3]. В электромагнетизме формы первой "степени" (degree), то есть валентности 1, - это напряженность электрического поля \mathbf{E} и магнитный векторный потенциал \mathbf{A} : E_i, A_j . Магнитная индукция \mathbf{B} - форма второй степени: B_{ij} . На наш взгляд, важно осознавать разницу между индукцией \mathbf{D}_{\wedge} и напряженностью \mathbf{E} , между индукцией \mathbf{B} и напряженностью магнитного поля \mathbf{H}_{\wedge} . Мы рассмотрим последовательно эти величины.

Индукция D_{\wedge}^i эквивалентна геометрической величине, которую можно назвать псевдо формой второй степени, D_{ij}^* . Действительно, при дуализации получается

$$\varepsilon_{ijk}^{\sim} D_{\wedge}^k = D_{ij}^*.$$

Здесь ε_{ijk}^{\sim} - абсолютно антисимметричная тензорная псевдо плотность веса - 1. Звездочка scriptsize обозначает "псевдо" при отсутствии \sim , то есть участие знака якобиана в преобразовании величины [1, 2]. Например:

$$D_{ij}^* \partial_i^i \partial_j^j = D_{i',j'}^* \Delta_{i',j'} / |\Delta_{i',j'}|.$$

Плотность ρ_{\wedge} эквивалентна дифференциальной псевдо форме третьей степени: $\rho_{ijk}^* = \varepsilon_{ijk} \tilde{\rho}_{\wedge}$. В дальнейшем мы будем рассматривать как синонимы “контравариантную тензорную плотность валентности p веса $+1$ ” и “псевдо форму степени $3 - p$ ”.

Таким образом, мы можем сказать, что псевдо форма $D_{\wedge}(x)$ изображается трубками с внутренней ориентацией. Псевдо форма $\rho_{\wedge}(x)$ изображается объемом. Эти геометрические величины имеют то, что можно назвать "толщиной". Линии и точки не имеют "толщины".

Дифференцирование (2) можно теперь представить так:

$$\rho_{ijk}^* = 3\partial_{[i} D_{jk]}^*.$$

Поэтому дифференцирование (2) - внешнее дифференцирование. Будем говорить, что внешнее дифференцирование (псевдо) формы приводит к ее границе. ρ_{ijk}^* есть граница поля D_{ij}^* . Граница формы определяется однозначно. Одновременно мы будем называть дифференцируемую (псевдо) форму наполнением ее границы. \mathbf{D}_{\wedge} есть наполнение поля ρ_{\wedge} . Наполнение границы определяется не однозначно. Наполнение допускает прибавление замкнутой формы, то есть формы, граница которой равна нулю.

3. Силовые трубки порождают биповерхности.

Векторная плотность электрического тока \mathbf{J}_{\wedge} имеет вес $+1$. Она аналогична \mathbf{D}_{\wedge} . Она изображается не линиями, а силовыми трубками с внутренней ориентацией. Она порождает напряженность магнитного поля \mathbf{H}_{\wedge} по закону Био-Савара:

$$\mathbf{H}_{\wedge} = \int \frac{[\mathbf{j}_{\wedge}, \mathbf{r}_{\wedge}]}{4\pi r^3} dV' \quad \text{или} \quad H_{\wedge}^{ik}(x) = 2 \int \frac{j_{\wedge}^{[i}(x') r_{\wedge}^{k]}(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (3)$$

Напряженность \mathbf{H}_{\wedge} является тензорной (бивекторной) плотностью веса $+1$. Геометрическая интерпретация такой плотности - двойной двумерный элемент, а не вектор-стрелка. Ориентация его внутренняя [1, 2]. Поэтому поле $H_{\wedge}^{ik}(x)$ должно изображаться биповерхностями с внутренней ориентацией, а не силовыми линиями.

Процесс порождения поля \mathbf{H}_{\wedge} плотностью тока \mathbf{j}_{\wedge} геометрически выглядит так. Биповерхности поля \mathbf{H}_{\wedge} начинаются на силовых трубках \mathbf{j}_{\wedge} . При этом внутренние ориентации согласовываются. Это представлено на рисунке 1 справа. Использование биповерхностей вместо силовых линий для изображения напряженности магнитного поля является единственно правильным с математической точки зрения. Кроме того оно наглядно показывает, что плотность тока является источником магнитного поля аналогично тому, как плотность заряда является источником электрического поля.

С другой стороны, трубки $\mathbf{j}_{\wedge}(x)$ являются краями биповерхностей $\mathbf{H}_{\wedge}(x)$. Трубки $\mathbf{j}_{\wedge}(x)$ ограничивают биповерхности $\mathbf{H}_{\wedge}(x)$. Удобно сказать, что поле $\mathbf{j}_{\wedge}(x)$ является границей поля $\mathbf{H}_{\wedge}(x)$. Это выражается формулой

$$\mathbf{j}_{\wedge}(x) = \text{rot}\mathbf{H}_{\wedge}(x) \quad \text{или} \quad j_{\wedge}^i = \partial_k H_{\wedge}^{ik}. \quad (4)$$

Таким образом, опять дифференцирование поля приводит к его границе. Плотность \mathbf{j}_{\wedge} эквивалентна псевдо форме второй степени.

Напряженность \mathbf{H}_{\wedge} эквивалентна псевдо форме первой степени: $\varepsilon_{ijk} H_{\wedge}^{ik} / 2 = H_i^*$. Таким образом, псевдо форма $\mathbf{j}_{\wedge}(x)$ изображается трубками. Псевдо форма $\mathbf{H}_{\wedge}(x)$ изображается биповерхностями. Они имеют то, что можно назвать "толщиной". Линии и поверхности "толщины" не имеют.

Дифференцирование (4) можно представить так:

$$j_{ik}^* = 2\partial_{[i} H_{k]}^*.$$

Поэтому дифференцирование (4) - внешнее дифференцирование. Снова внешнее дифференцирование (псевдо) формы приводит к ее границе. Граница формы определяется однозначно. Напряженность \mathbf{H}_{\wedge} является наполнением поля \mathbf{j}_{\wedge} .

4. Биповерхности порождают скалярное поле.

Электрический потенциал Φ является скалярной функцией $\Phi(x)$.⁴

Другими словами, Φ является формой нулевой степени. Графически скалярная функция изображается закрашиванием или штриховкой пространства. Можно изображать ее разбросанными по полю символами Φ . Это сделано на рисунке 2 слева. Плотность символов пропорциональна величине функции.

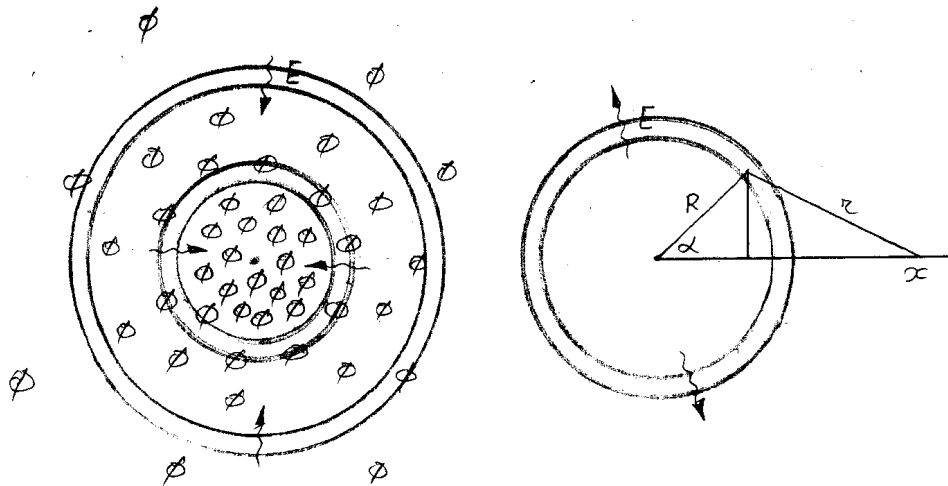


Рис. 2. Слева биповерхности \mathbf{E} порождают поле Φ .

⁴ Мы обозначаем потенциал $\phi = -\Phi$ для того, чтобы исключить минус в формуле $E_i = \partial_i \phi$.

Справа концентрические окружности изображают обкладки “сферического” конденсатора, создающего поле Φ во внутренней области.

Внешнее дифференцирование потенциала приводит к электрической напряженности E_i :

$$E_i = \partial_i \phi. \quad (5)$$

Электрическая напряженность E_i является формой первой степени. Она является ковектором. Геометрическая интерпретация ковектора - двойной двумерный элемент, а не вектор-стрелка. Ориентация его внешняя [1]. Поэтому поле $E_i(x)$ должно изображаться бипервыми с внешней ориентацией.

Внешнее дифференцирование (5) означает, что напряженность E_i служит границей поля Φ . На рисунке бипервыми $E_i(x)$ ограничивают плотность символов Φ . Плотность символов Φ уменьшается при переходе от передней стороны бипервыми к задней. Отличие передней стороны от задней обусловлено внешней ориентацией. Видно, что поле Φ наполняет пространство, ограниченное бипервыми поля \mathbf{E} .

С другой стороны, можно сказать, что бипервыми $E_i(x)$ порождают плотность символов Φ . Можно сказать, что напряженность $E_i(x)$ порождает потенциал Φ , или что $E_i(x)$ является источником потенциала $\Phi(x)$. Это выражает интегральная формула

$$\phi(x) = \int \frac{(\mathbf{E}(x') \mathbf{r}(x, x')) dV'}{4\pi r^3(x, x')} \quad \text{или} \quad \phi = \int \frac{E_i(x') r_{\wedge}^i(x, x') dV'}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (6)$$

Допуская вольность, можно сказать, что формула (6) дает решение уравнения (5). Формула (6), по-видимому, не встречается в литературе. Она определяет потенциал однозначно. Она определяет потенциал однозначно и в случае непотенциального поля E_i . Этот потенциал выделяется из множества калибровочно эквивалентных потенциалов как “истинный”.

5. Пример вычисления истинного потенциала

Применим формулу (6) для решения конкретной задачи.

*Подсчитать поле потенциала, создаваемого тонким
двумерным "сферическим конденсатором".*

Другими словами, в двумерном (для простоты) пространстве имеются две близкие концентрические окружности, между которыми задано однородное радиальное электрическое поле \mathbf{E} . Надо найти потенциал в этом пространстве с помощью формулы

$$\phi(x) = \int \frac{(\mathbf{E} \mathbf{r}) da}{2\pi r^2},$$

где da - элемент пространства (плоскости).

Решение (см. рис. 2, справа).

$$\mathbf{E}\mathbf{r} = E_x r^x + E_y r^y = E \cos \alpha \cdot (x - R \cos \alpha) - E \sin \alpha \cdot R \sin \alpha = E(x \cos \alpha - R).$$

Если малый зазор между окружностями обозначить δ , то $da = R\delta d\alpha$. Далее

$$r^2 = R^2 \sin^2 \alpha + (x - R \cos \alpha)^2 = R^2 + x^2 - 2xR \cos \alpha.$$

Таким образом, $\phi = \frac{ER\delta}{2\pi x} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha + v/2}{u + v \cos \alpha} d\alpha$, $u = R^2/x^2 + 1$, $v = -2R/x$.

Интегрирование дает [4]:

$$\phi(x) = \frac{ER\delta}{x} \left[-\frac{x}{2R} + \frac{(R^2 + x^2)x}{2R(|R^2 - x^2|)} - \frac{Rx}{|R^2 - x^2|} \right].$$

Для внешности окружностей, то есть при $R < x$, получаем $\phi = 0$. Для внутренности окружностей, то есть при $R > x$, получаем $\phi = -E\delta$, как и следовало ожидать.

6. Границы замкнуты

Приведенные рисунки иллюстрируют простой факт. Граница всегда замкнута. Замкнуты сферические биповерхности на рис. 2. Не имеют концов бесконечные трубки тока на рис. 1. Замкнуты шарики ρ_{\wedge} . Другими словами, граница границы равна нулю. Математически это обусловлено тем, что повторное внешнее дифференцирование дает ноль. Имеем:

$$\partial_{[k} E_{i]} = 0, \quad \partial_i J_{\wedge}^i = 0$$

7. Магнитная индукция однозначно порождает магнитный векторный потенциал

Магнитный векторный потенциал A_i изображается биповерхностями так же, как напряженность E_i . Ориентация внешняя. Однако, имеется существенное отличие. Поле A_i не замкнуто. Другими словами, биповерхности A_i имеют края. Они имеют границу. Этой границей являются трубки, изображающие магнитную индукцию B_{ij} . Ориентация внешняя. Это выражается формулой

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad \text{или} \quad B_{ij} = 2\partial_{[i} A_{j]} \quad (7)$$

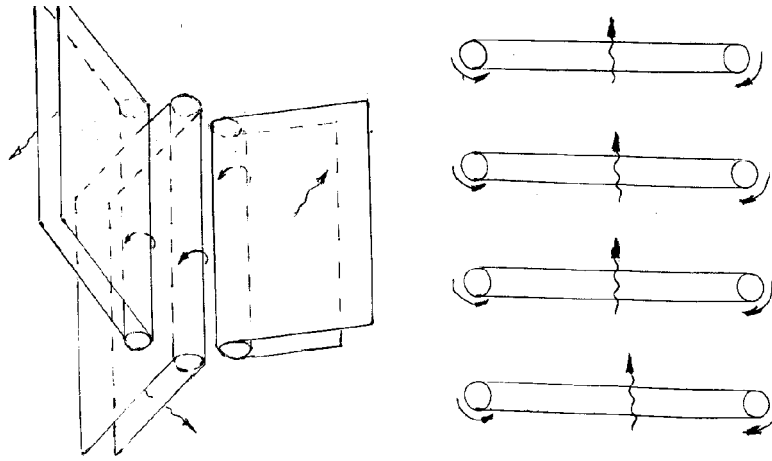


Рис. 3. Слева прямолинейные трубки **B** порождают биплоскости **A**. Ориентация внешняя. Справа кольцевые трубки **B** порождают бипервности **A**.

На рисунке 3 слева бипервности **A** ограничены прямолинейными трубками магнитной индукции. Справа бипервности **A** ограничены кольцами магнитной индукции. Справа трубки и бипервности изображены в разрезе. Естественно, в обоих случаях трубки **B** не имеют концов, то есть, замкнуты. Видно, что справа бипервности **A** наполняют пространство, ограниченное трубками **B**.

С другой стороны, можно сказать, что замкнутые трубки **B** порождают бипервности **A**. Бипервности **A** исходят из трубок **B**. Можно сказать, что магнитная индукция **B** порождает магнитный векторный потенциал **A**. Это выражает формула

$$\mathbf{A} = \int \frac{[\mathbf{B}\mathbf{r}]}{4\pi r^3} dV \quad \text{или} \quad A_i = \int \frac{B_{k'i}(x')r_{\wedge}^{k'}(x, x')dV^{\wedge'}}{4\pi r^3(x, x')} \quad (8)$$

Она напоминает закон Био-Савара. Она определяет потенциал **A** однозначно. Этот потенциал выделяется из множества калибровочно эквивалентных потенциалов как истинный.

8. Порождения стерильны

Возникает важный вопрос. Что получится, если в качестве источника порождения использовать порожденное поле? Если в интегральную формулу подставить порожденное поле? Чему равны, например, интегралы

$$\int \frac{D_{\wedge}^{[i}(x')r_{\wedge}^{k]}(x, x')dV^{\wedge'}}{4\pi r^3(x, x')}, \quad \int \frac{H_{\wedge}^{[ij}(x')r_{\wedge}^{k]}(x, x')dV^{\wedge'}}{4\pi r^3(x, x')}, \quad \int \frac{A_i(x')r_{\wedge}^{i'}(x, x')dV^{\wedge'}}{4\pi r^3(x, x')},$$

где D_{\wedge}^i , H_{\wedge}^{ij} , A_i взяты из (1), (3), (8)? (Заметим в скобках, что четвертую порожденную величину, Φ , нельзя использовать для порождения чего-либо, имеющего физический смысл, поскольку интеграл

$$\int \frac{\Phi(x')r_{\wedge}^k(x, x')dV^{\wedge'}}{4\pi r^3(x, x')},$$

является вектором, а не векторной плотностью.)

Ответ на поставленный вопрос прост: *порождение порождения равно нулю*. Мы будем говорить, что порождения - *стерильны*. Например,

$$\int \frac{D_{\wedge}^{[i}(x')r_{\wedge}^{k]}(x, x')dV^{\wedge}}{4\pi r^3(x, x')} = 0.$$

Действительно, выполнив подстановку D_{\wedge}^i из (1), получим

$$\iint \frac{\rho_{\wedge''}(x'')r_{1\wedge'}^{[i}(x', x'')r_{2\wedge}^{k]}(x, x')dV^{\wedge''}dV^{\wedge'}}{4\pi r_1^3(x', x'') \cdot 4\pi r_2^3(x, x')} = 0.$$

Для доказательства последнего равенства зафиксируем точки x'' и x . Тогда из-за симметрии пространства для каждой точки x' найдется точка \tilde{x}' , такая, что векторное произведение $r_1^{[i}r_2^{k]}$ отличается в точках x' и \tilde{x}' только знаком. Поэтому при интегрировании выражения по dV' получится ноль.

Подобным образом стерильность порождений доказывается в общем случае. Стерильность порождений аналогична замкнутости границ.

9. Сопряжение: замкнутость \leftrightarrow стерильность

В метрическом пространстве имеется соответствие между контравариантными и ковариантными тензорами одной и той же валентности (с одинаковым количеством индексов). Например, с помощью метрического тензора тензору X^{ij} ставится в соответствие тензор $X_{mn} = X^{ij}g_{im}g_{jn}$. Эта операция называется опусканием индексов. При этой операции обычно сохраняется неизменной коренная буква.

В электромагнетизме используется несколько другая операция. Она называется сопряжением. Сопряжение устанавливает соответствие между контравариантными тензорными плотностями и ковариантными тензорами той же валентности. Эта операция использует метрическую тензорную плотность $\hat{g}_{ij} = g_{ij} / \sqrt{g_{\wedge}}$ или $\hat{g}_{\wedge}^{ij} = g^{ij} \sqrt{g_{\wedge}}$. Оказывается, что поля электромагнетизма попарно сопряжены:

$$E_i = D_{\wedge}^j \hat{g}_{ij}, \quad D_{\wedge}^j = E_i \hat{g}_{\wedge}^{ij}, \quad B_{ik} = H_{\wedge}^{jl} \hat{g}_{ij} \hat{g}_{kl}, \quad H_{\wedge}^{ji} = B_{ik} \hat{g}_{\wedge}^{ij} \hat{g}^{kl}.$$

При сопряжении полей электромагнетизма мы изменяем коренную букву. Это вызвано традицией и тем, что сопряжение существенно изменяет геометрический образ формы.

Радиальные трубки \mathbf{D}_\wedge превращаются в замкнутые сферические биперверхности \mathbf{E} . Это изображено на рисунке 4 слева.

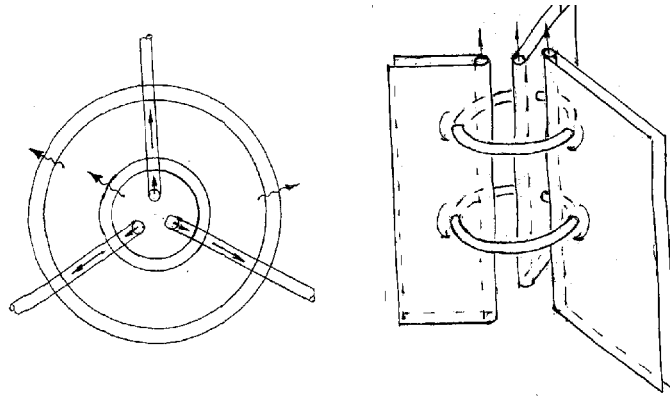


Рис. 4. Слева показаны радиальные трубки \mathbf{D}_\wedge и сферические биперверхности \mathbf{E} . Справа показаны биплоскости \mathbf{H}_\wedge и замкнутые трубки \mathbf{B} .

Биплоскости \mathbf{H}_\wedge , расходящиеся от прямолинейных трубок тока, превращаются в замкнутые трубки \mathbf{B} (рис. 4 справа). Кроме того внешняя ориентация изменяется на внутреннюю и наоборот.

Мы обозначаем сопряжение пятилучевой звездочкой $*$, приподнятой над серединой строки, например, $*\mathbf{E} = \mathbf{D}_\wedge$. Такая звездочка отличает сопряжение от операции Ходжа $*$ [3], включающей в себя, кроме сопряжения, дуализацию. Например:

$$*(E_i) = D_\wedge^i, \quad *(E_i) = D_{ij}^*$$

Замечательно, что сопряжение превращает стерильные поля в замкнутые и обратно.

Например, $*\mathbf{B} = \mathbf{H}_\wedge$, $*\mathbf{D}_\wedge = \mathbf{E}$. Это обстоятельство иллюстрируется рисунком 4. В качестве примера доказательства приведем равенство

$$\partial_{[j} g_{k]i} D_\wedge^i = \int \partial_{[j} \frac{r_\wedge^i(x, x')}{r^3(x, x')} g_{k]i} \frac{\rho_\wedge(x') dV^\wedge}{4\pi} = 0.$$

Оно справедливо в силу простого тождества $\partial_{[j} (g_{k]i} r^i / r^3) = 0$.

Таким образом, стерильное порождение после сопряжения делается замкнутым и готово к новому порождению, а замкнутая граница после сопряжения делается стерильной и готова к новому дифференцированию. Таким образом возникают цепочки форм, конечные или бесконечные. Приведем пример бесконечной цепочки. Порождение будет обозначаться стрелкой.

$$\mathbf{j}_\wedge \rightarrow \mathbf{H}_\wedge, \quad *\mathbf{H}_\wedge = \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}, \quad *\mathbf{A} = \mathbf{j}_\wedge, \quad \mathbf{j}_\wedge \rightarrow \mathbf{H}_\wedge, \quad *\mathbf{H}_\wedge = \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \rightarrow \dots$$

Следуя нашему правилу, мы изменили обозначение магнитного потенциала после сопряжения на курсивную букву \mathbf{j} , потому что векторная плотность магнитного потенциала, $j_\wedge^i = A_k g_\wedge^{ik}$,

геометрически эквивалентна плотности тока. Курсивные буквы H, B обозначают гипотетические поля. Эти поля возникают при формировании цепочки.

Цепочка может строиться в противоположном направлении с помощью внешнего дифференцирования, которое мы обозначим ∂ :

$$\partial \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad * \mathbf{B} = \mathbf{H}_\wedge, \quad \partial \mathbf{H}_\wedge = \mathbf{j}_\wedge, \quad * \mathbf{j}_\wedge = \mathcal{A}, \quad \partial \mathcal{A} = \mathcal{B}, \quad * \mathcal{B} = \mathcal{S}_\wedge, \quad \partial \mathcal{S}_\wedge = \dots$$

Следуя нашему правилу, мы изменили обозначение плотности тока при сопряжении на букву \mathbf{A} шрифта Matura MT Script, поскольку ковариантный вектор плотности тока, $j_i = g_{ik}^{\wedge} j_\wedge^k$, по геометрическим свойствам аналогичен магнитному потенциалу A_j . Буквы \mathcal{B}, \mathcal{S} того же шрифта обозначают гипотетические поля, возникающие при формировании цепочки.

10. *Нарушение калибровочной эквивалентности*

Известно, что в статическом случае электрический потенциал ϕ определен с точностью до константы, а к магнитному потенциалу можно добавить замкнутое поле $\partial_i f$. Другими словами, замена

$$\phi \rightarrow \phi + \text{Const} \quad \text{и} \quad A_i \rightarrow A_i + \partial_i f \quad (9)$$

не изменяют поля $E_i = \partial_i \phi$, $B_{ij} = 2\partial_{[i} A_{j]}$.

Преобразования (9) называются калибровочными. Говорят о множестве калибровочно эквивалентных потенциалов. Вопреки этому, порождения (6) и (8) приводят к некоторым выделенным однозначно определенным потенциалам, которые мы назвали истинными.

Симптоматично, что нарушение калибровочной эквивалентности в последнее время зафиксировано на уровне квадрата векторного потенциала [5]. Правда, для вычисления квадрата выделенного векторного потенциала в [5] использована громоздкая формула ((7) из [5]), хотя проблема заключается просто в том, чтобы отделить от произвольного потенциала A_i замкнутую часть. Это может быть естественно выполнено по формуле

$$\int \frac{\partial_{[i} A_{j]} r_{\wedge}^i dV^{\wedge}}{4\pi r^3}.$$

Мы надеемся, что представленная концепция стимулирует применение дифференциальных форм в электромагнетизме и поможет решить важные проблемы.

11. *Примечания*

Материал настоящей статьи под названием “Электромагнетизм: источники, порождения, границы” был направлен в журнал “Письма в ЖЭТФ” 14.05.98.

Кроме того, ввиду определенного методического значения, материал трижды направлялся в журнал “УФН”: “Электромагнетизм в терминах источников и порождений полей” 13.06.95, “Электромагнетизм в терминах границ и порождений дифференциальных форм” 04.10.2000, “Силовые трубки и биповерхности в электромагнетизме” 28.03.01.

Всякий раз материал отклонялся с неудовлетворительной рецензией или без рецензии.

Список литературы

1. Schouten J. A. Tensor analysis for physics. - Oxford: Clarendon, 1951.- 354 p.
2. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. - М.: Наука, 1965.- 421 с.
3. Шутц Б. Геометрические методы математической физики. - М.: Мир, 1984.- 372 с.
Schutz B. F. Geometrical methods of mathematical physics. - Cambridge: Cambridge University Press, 1982.- 351 p.

4. Двайт Г. В. Таблицы интегралов. - М.: ИЛ, 1948.- 283 с.
5. Gubarev F. V. On the Significance of the Vector Potential Squared. // Physical Review Letters. - 2001, Vol. 86.- p.2220-2222.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Храпко Радий Игоревич, доцент кафедры физики Московского государственного авиационного института (технического университета), к.ф.-м.н. E-mail: tahir@k804.mainet.msk.su

Subject: *Khrapko*