

УДК 531

Динамика составного космического аппарата с подвижным устройством в трёхосном кардановом подвесе

Алексеев А.В., Дорошин А.В.*, Ерёменко А.В.,
Крикунов М.М., Недовесов М.О.**

*Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва, Московское шоссе, 34, Самара, 443086, Россия*

**e-mail: doroshin@ssau.ru*

***e-mail: huntergalaxy@bk.ru*

Аннотация

В работе моделируется движение космического аппарата изменяемой конфигурации, связанной с наличием внутри базового тела–носителя дополнительного подвижного твердого тела, закрепленного в кардановом подвесе. Внутреннее тело представляет собой подвижное устройство различного функционального назначения, которое может представлять собой перенаправляемую антенну, телескоп, либо рабочий элемент системы дистанционного зондирования. Математическая модель движения системы строится на основе совместного применения теоремы об изменении кинетического момента и формализма Лагранжа. Моделирование пространственного движения системы осуществляется без ограничений на величины углов относительного движения подвижного устройства.

Ключевые слова: космический аппарат, движение вокруг центра масс, динамика свободного движения, подвижное устройство, карданов подвес.

Введение

Как известно, проблема исследования динамики углового (пространственного) движения твердого тела и систем твердых тел является одной из центральных фундаментальных проблем классической механики [1, 3], находящей свое непосредственное техническое приложение в задачах динамики полета ракетно-космических систем и космических аппаратов (КА), имеющих разнофункциональные подвижные рабочие элементы конструкции [4-9]. К классу подобных твердотельных систем относятся, в частности, космические аппараты с двойным вращением, имеющие составную конструкцию из двух соосных тел (базовое тело-носитель и тело-ротор), совершающих вращение относительно друг друга вокруг общей оси [5-9]. Обычно соосная схема КА с двойным вращением используется для гироскопической стабилизации пространственного положения КА, когда гиростабилизирующий момент КА в своей подавляющей величине придан телу-ротору, что позволяет располагать внутри тела-носителя малоподвижное оборудование без влияния на него возмущений от быстрого вращательного движения.

КА с двойным вращением, изучаемый как механическая система, имеет четыре степени свободы при рассмотрении углового движения вокруг центра масс: три степени свободы соответствуют угловому движению базового тела КА, а четвертая

степень свободы описывает относительное вращение второго тела по отношению к базовому телу.

При наличии двух дополнительных степеней свободы, позволяющих моделировать трехосное относительное движение тела-ротора по отношению к телу-носителю, конструкция КА с двойным вращением существенно обогащается в функциональном и динамическом смысле. Подобное трехстепенное закрепление подвижного тела по отношению к базовому телу-носителю может быть осуществлено посредством трехосного карданова подвеса. Полученная в этом случае механическая система будет иметь шесть степеней свободы и позволит использовать три внутренние степени свободы для обеспечения (коррекции) необходимой пространственной ориентации подвижного тела – подвижного устройства (ПУ) в кардановом подвесе, выполняющего свое функциональное предназначение. Например, подобная механическая система и соответствующая ей конструкционная схема могут быть использованы для размещения в составе единого КА подвижного массивного оборудования, ориентируемого/перенаправляемого/корректируемого в своем угловом положении при помощи внутренних приводов, закрепленных в базовом теле КА. В качестве такого оборудования могут быть указаны, например, массивные манипуляторы, антенны, телескопы, поворотные сопла двигательных установок, конструктивные элементы тросовых систем и др. [9-17].

В настоящей работе осуществляется построение полных уравнений пространственного движения КА переменной конфигурации без ограничений на

величины углов поворотов ПУ относительно базового тела КА, а также проводится численное моделирование естественной динамики свободного пространственного движения КА без добавления внутренних управляющих моментов и наложения каких-либо голономных/неголономных связей по внутренним степеням свободы (рамкам карданова подвеса). Моделирование естественной динамики КА с ПУ является необходимым этапом и имеет определяющее значение для последующего моделирования динамики КА с управляемым относительным движением ПУ, а также для выбора/синтеза конкретных законов управления поворотами рамок карданова подвеса, обеспечивающих требуемые режимы углового движения КА и ПУ.

Актуальность работы и ее практическое значение характеризуются современной интенсификацией разработки отечественных и зарубежных платформ КА различного назначения и приборного (агрегатного) состава, содержащие разнофункциональные подвижные элементы.

1. Механическая и математическая модели

Рассмотрим механическую структуру составного (двутельного) КА со взаимосвязями и внутренними степенями свободы, приведённую на рисунке (рис.1).

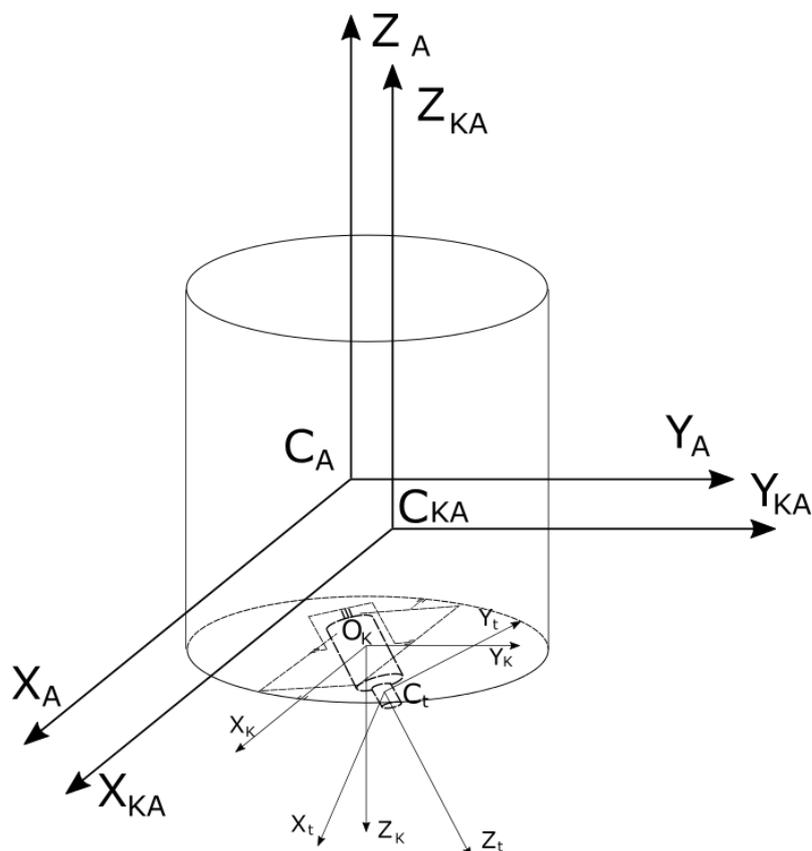


Рисунок 1 – Структура КА с внутренними степенями свободы: 1 – корпус космического аппарата (несущее тело), тело 2 – подвижное устройство в кардановом подвесе

В интересах записи математических моделей и дальнейшего исследования необходимо ввести следующую группу систем координат:

- $C_{КА}X_{КА}Y_{КА}Z_{КА}$ – система координат, начало которой совпадает с центром масс составного КА, а оси параллельны главным центральным осям инерции корпуса (несущего тела) космического аппарата;
- $C_A X_A Y_A Z_A$ – система координат, начало которой совпадает с центром масс несущего тела, а оси являются главными центральными осями инерции несущего тела;

- $O_K X_K Y_K Z_K$ – система координат, начало которой совпадает с неподвижной точкой карданова подвеса, оси которой остаются параллельными главным центральным осям инерции несущего тела;
- $C_t X_t Y_t Z_t$ – система координат, начало которой совпадает с центром масс подвижного устройства, а оси являются главными центральными осями инерции подвижного оборудования;
- $OXYZ$ – кёнигова система координат (для простоты рассмотрения будем считать ее неподвижной в абсолютном пространстве), точка O является центром масс системы КА с ПУ.

Рассмотрим движение составного КА в системе координат $C_{КА} X_{КА} Y_{КА} Z_{КА}$, которую будем именовать основной. Определим положения центров масс частей космического аппарата в основной системе координат (рис.1). Для центра масс составного КА справедливо соотношение:

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_a \mathbf{r}_a + m_t \mathbf{r}_t}{m_a + m_t}, \quad (1)$$

где \mathbf{r}_t и m_t – радиус-вектор центра масс в основной системе координат и масса подвижного оборудования, \mathbf{r}_a и m_a – радиус вектор центра масс в основной системе координат и масса несущего тела, \mathbf{r}_c – радиус вектор центра масс всей составного КА в основной системе координат.

Запишем радиус-вектор центра масс составного КА в системе координат $O_K X_K Y_K Z_K$, связанной с точкой крепления карданова подвеса, оси которой параллельны осям главной системы координат:

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_a \mathbf{O}_k \mathbf{C}_a + m_t \mathbf{A}_2 (\mathbf{O}_k \mathbf{C}_t)}{m_a + m_t}, \quad (2)$$

где \mathbf{A}_2 – матрица перехода от системы координат связанной с центром масс ПУ к основной системе координат, O_k – неподвижная точка карданова подвеса (точка пересечения осей вращения кардана), C_a – центра масс несущего тела, C_t – центр масс подвижного оборудования.

Запишем выражения для определения радиус вектора центра масс несущего тела в основной системе координат $C_{KA} X_{KA} Y_{KA} Z_{KA}$:

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{O}_k \mathbf{C}_a - \mathbf{r}_c, \quad (3)$$

где $\mathbf{O}_k \mathbf{C}_a$ – радиус вектор центра масс несущего тела в системе координат связанной с неподвижной точкой кардана. Радиус вектор центра масс подвижного оборудования для удобства дальнейших вычислений запишем в его собственной системе координат $C_t X_t Y_t Z_t$:

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{O}_k \mathbf{C}_t - \mathbf{A}_1 \mathbf{r}_c, \quad (4)$$

где $\mathbf{O}_k \mathbf{C}_t$ – радиус вектор центра масс подвижного оборудования в системе координат, связанной с неподвижной точкой кардана, \mathbf{A}_1 – матрица перехода от основной системы координат к системе координат, связанной с центром масс ПУ $C_t X_t Y_t Z_t$.

Запишем выражение кинетического момента несущего тела относительно собственного центра масс в основной системе координат $C_{KA} X_{KA} Y_{KA} Z_{KA}$:

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{I}_a \boldsymbol{\omega}_a, \quad (5)$$

где $\mathbf{I}_a = \text{diag}[A_a, B_a, C_a]$ – тензор инерции основного тела космического аппарата в основной системе координат $C_{KA}X_{KA}Y_{KA}Z_{KA}$, $\boldsymbol{\omega}_a$ – вектор угловой скорости корпуса космического аппарата в основной системе координат $C_{KA}X_{KA}Y_{KA}Z_{KA}$.

Для определения количества движения несущего тела в основной системе координат $C_{KA}X_{KA}Y_{KA}Z_{KA}$ запишем выражение для определения скорости центра масс несущего тела относительно общего центра масс в основной системе координат:

$$\mathbf{V}_a = \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{r}_a. \quad (6)$$

В свою очередь выражение для определения количества движения в основной системе координат $C_{KA}X_{KA}Y_{KA}Z_{KA}$ примет вид:

$$\mathbf{Q}_a = m_a \mathbf{V}_a. \quad (7)$$

Запишем выражение для определения кинетического момента движения подвижного оборудования относительно собственного центра масс в системе координат, связанной с центром масс специального оборудования $C_tX_tY_tZ_t$:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{I}_t \boldsymbol{\omega}_t, \quad (8)$$

где $\mathbf{I}_t = \text{diag}[A_t, A_t, C_t]$ – тензор инерции подвижного оборудования в собственной системе координат $C_tX_tY_tZ_t$, $\boldsymbol{\omega}_t$ – вектор угловой скорости подвижного оборудования в собственной системе координат $C_tX_tY_tZ_t$. Абсолютная угловая скорость подвижного оборудования в собственной системе координат будет складываться из относительной скорости и скорости несущего тела:

$$\boldsymbol{\omega}_t = \mathbf{A}_t \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\omega}_k \quad (9)$$

где ω_k – вектор угловой скорости ПУ относительно несущего тела.

Относительная угловая скорость ПУ ω_k определяется вращением карданова подвеса и будет иметь различный вид в зависимости от выбранной последовательности поворотов кардана. В рассматриваемом случае принята следующая последовательность поворотов вокруг осей: $X \rightarrow Y \rightarrow Z$. В этом случае будут иметь место следующие кинематические уравнения:

$$\begin{cases} p_k = \dot{\alpha}_k \cos(\beta_k) \cos(\gamma_k) + \dot{\beta}_k \sin(\gamma_k) \\ q_k = -\dot{\alpha}_k \cos(\beta_k) \sin(\gamma_k) + \dot{\beta}_k \cos(\gamma_k) , \\ r_k = \dot{\alpha}_k \sin(\beta_k) + \dot{\gamma}_k \end{cases} \quad (10)$$

где p_k, q_k, r_k – проекции относительной угловой скорости ω_k на оси системы координат $C_t X_t Y_t Z_t$, $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ – углы Крылова системы координат $C_t X_t Y_t Z_t$ относительно системы координат $C_{KA} X_{KA} Y_{KA} Z_{KA}$.

Для определения количества движения подвижного оборудования в собственной системе координат $C_t X_t Y_t Z_t$ запишем выражение для определения скорости центра масс ПУ относительно общего центра масс в осях системы координат $C_t X_t Y_t Z_t$:

$$\mathbf{V}_t = \omega_t \times \mathbf{r}_t. \quad (11)$$

Тогда выражение для количества движения ПУ будет иметь вид:

$$\mathbf{Q}_t = m_t \mathbf{V}_t. \quad (12)$$

Для построения динамических уравнений будем использовать теорему об изменении кинетического момента [12-13]:

$$\frac{d\mathbf{K}_c}{dt} = \mathbf{M}_c^e, \quad (13)$$

где \mathbf{K}_c – вектор главного кинетического момента движения составного КА, вычисленный относительно общего центра масс, \mathbf{M}_c^e – главный момент внешних сил, действующих на всю механическую систему, вычисленный относительно общего центра масс.

При отсутствии моментов внешних сил ($\mathbf{M}_c^e = 0$), действующих на механическую систему, производная вектора кинетического момента движения составного КА будет равна нулю и, следовательно, вектор главного кинетического момента движения составного КА будет оставаться постоянным:

$$\frac{d\mathbf{K}_c}{dt} = 0, \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_c = \text{const} \quad (15)$$

Запишем уравнение (14) в векторном виде, используя понятие локальной производной в подвижной системе координат:

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_c}{dt} + \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{K}_c = \mathbf{M}_c^e. \quad (16)$$

Кинетические моменты движения составного КА, вычисленные относительно общего центра масс в системе $S_{КА} X_{КА} Y_{КА} Z_{КА}$ имеют вид:

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{I}_a \boldsymbol{\omega}_a + \mathbf{r}_a \times \mathbf{Q}_a, \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{A}_2 (\mathbf{I}_t \boldsymbol{\omega}_t + \mathbf{r}_t \times \mathbf{Q}_t), \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_t \quad (19)$$

Подставим выражение (19) в соотношение (16) и получим векторное дифференциальное уравнение (первые три скалярных уравнения) движения составного КА в абсолютной системе координат:

$$\left(\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_a}{dt} + \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{K}_a \right) + \left(\frac{\tilde{d}\mathbf{K}_t}{dt} + \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{K}_t \right) = \mathbf{M}_c^e. \quad (20)$$

Для нахождения оставшихся трёх уравнений движения составного КА, соответствующих оставшимся трем степеням свободы, воспользуемся формализмом Лагранжа, для чего найдём кинетическую энергию системы:

$$T = T_t + T_a = \frac{1}{2} (\mathbf{K}_a \boldsymbol{\omega}_a + \mathbf{K}_t \boldsymbol{\omega}_t + m_a \mathbf{V}_a^2 + m_t \mathbf{V}_t^2), \quad (21)$$

где T_t – кинетическая энергия ПУ, T_a – кинетическая энергия тела-носителя, вычисленные относительно общего центра масс, T – полная кинетическая энергия механической системы.

Так как на механическую систему не действуют внешние силы (включая потенциальные), то уравнения Лагранжа запишется в следующем виде

$$L = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = 0 \quad (22)$$

где $\varphi_i \sim \{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\}$ – соответствующие обобщённые координаты, $\dot{\varphi}_i \sim \{\dot{\alpha}_k, \dot{\beta}_k, \dot{\gamma}_k\}$ – обобщённые скорости механической системы.

Векторные уравнения (20) и (22) совместно образуют замкнутую систему динамических уравнений движения составного КА как полной механической системы.

$$\begin{cases} \left(\frac{d\tilde{\mathbf{K}}_a}{dt} + \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{K}_a \right) + \mathbf{A}_2 \left(\frac{d\tilde{\mathbf{K}}_t}{dt} + \boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{K}_t \right) = \mathbf{M}_c^e \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \varphi_i} = \mathbf{M}_c^e + \mathbf{M}_c^i \end{cases} \quad (23)$$

Проецируя векторные уравнения (23) на оси системы координат, связанной с несущим телом, можно записать шесть скалярных дифференциальных уравнений следующей структуры:

$$\begin{cases} a_1 \dot{p}_a + b_1 \dot{q}_a + c_1 \dot{r}_a + d_1 \ddot{\alpha}_k + e_1 \ddot{\beta}_k + f_1 \ddot{\gamma}_k = M_{cx}^e - j_1 \\ a_2 \dot{p}_a + b_2 \dot{q}_a + c_2 \dot{r}_a + d_2 \ddot{\alpha}_k + e_2 \ddot{\beta}_k + f_2 \ddot{\gamma}_k = M_{cy}^e - j_2 \\ a_3 \dot{p}_a + b_3 \dot{q}_a + c_3 \dot{r}_a + d_3 \ddot{\alpha}_k + e_3 \ddot{\beta}_k + f_3 \ddot{\gamma}_k = M_{cz}^e - j_3 \\ a_4 \dot{p}_a + b_4 \dot{q}_a + c_4 \dot{r}_a + d_4 \ddot{\alpha}_k + e_4 \ddot{\beta}_k + f_4 \ddot{\gamma}_k = M_{cx}^e + M_{cx}^i - j_4 \\ a_5 \dot{p}_a + b_5 \dot{q}_a + c_5 \dot{r}_a + d_5 \ddot{\alpha}_k + e_5 \ddot{\beta}_k + f_5 \ddot{\gamma}_k = M_{cy}^e + M_{cy}^i - j_5 \\ a_6 \dot{p}_a + b_6 \dot{q}_a + c_6 \dot{r}_a + d_6 \ddot{\alpha}_k + e_6 \ddot{\beta}_k + f_6 \ddot{\gamma}_k = M_{cz}^e + M_{cz}^i - j_6 \end{cases} \quad (24)$$

где $\{p_a, q_a, r_a\}$ – проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_a$ на оси системы координат $S_A X_A Y_A Z_A$; $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ ($i=1..6$) – функциональные коэффициенты, а члены j_i ($i=1..6$) – соответствуют гироскопическим моментам. Все указанные функциональные коэффициенты $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, j_i$ зависят от компонент угловых скоростей всех частей составного КА и от углов относительного перемещения ПУ. Запись системы

уравнений (24) в развернутом виде является громоздкой и в тексте работы не приводится.

Так же следует добавить систему кинематических уравнений движения базового тела, разрешенных относительно угловых скоростей углов ориентации базового тела КА по отношению к кёниговой системе осей:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_a = -\frac{q_a \sin(\gamma_a) + p_a \cos(\gamma_a)}{\cos(\beta_a)} \\ \dot{\beta}_a = q_a \cos(\gamma_a) + p_a \sin(\gamma_a) \\ \dot{\gamma}_a = \frac{-r_a \cos(\beta_a) - q_a \sin(\gamma_a) \sin(\beta_a) + p_a \cos(\gamma_a) \sin(\beta_a)}{\cos(\beta_a)} \end{cases} \quad (25)$$

$\{\alpha_a, \beta_a, \gamma_a\}$ – углы Крылова системы координат $S_{КА}X_{КА}Y_{КА}Z_{КА}$ относительно неподвижной системы координат.

2. Результаты численного моделирования

Полученные уравнения (23) в полной мере позволяют осуществлять численное моделирование и последующий синтез динамики КА с ПУ. Стоит отметить, что структура уравнений (23) является линейной по отношению к производным, что позволяет записать динамические уравнения в явном разрешенном виде, готовом для интегрирования совместно с двумя группами кинематических уравнений (24).

Однако, здесь стоит отметить, что, учитывая сложный функциональный вид коэффициентов (23), после разрешения уравнений (23) система будет иметь чрезвычайно громоздкий вид. Более того, получение указанных разрешенных

уравнений без применения автоматизированных математических процедур в пакетах символьной алгебры (например, в пакете MAPLE) является нецелесообразным, т.к. никак не гарантирует отсутствие ошибок как после выполнения самого разрешения, так и после последующей перезаписи выражений при программировании алгоритмов численного интегрирования (например, по методу Рунге-Кутты) в средах разработки прикладных программ для численного моделирования динамики. Поэтому для записи разрешенных уравнений (правых частей) и их корректной трансформации в код на C++ был применен автоматизированный способ построения математической модели на основе использования пакета символьной алгебры MAPLE, который позволил получить и сконvertировать результаты (символьные функциональные выражения для правых частей дифференциальных уравнений) в корректный программный код, на основе которого далее был создан программный комплекс на C++, используемый для численного моделирования динамики методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага интегрирования с контрольным членом Егорова. Стоит отметить, что корректность получаемых с помощью программного комплекса результатов интегрирования уравнений динамики КА проверяется путем проверок сохранения естественных интегралов движения (сохранение кинетического момента и сохранение кинетической энергии при свободном движении):

$$T=\text{const}, K_c=\text{const}.$$

Как уже было отмечено, на основе разработанного программного комплекса возможно проведение численного моделирования движения КА с ПУ в самых

разных случаях сочетания инерционно-массовых параметров и начальных условий движения без каких-либо ограничений на углы относительных поворотов кардана. В качестве основных (тестовых) вариантов расчета были выбраны и промоделированы следующие три случая динамики КА с подвижным ПУ:

1. Случай малого составного КА с главными моментами инерции базового тела (A , B , C), удовлетворяющими условию $A=B=2C$, при малых величинах начальных угловых скоростей (порядка $0,03$ [рад/с]).
2. Случай малого составного КА с главными моментами инерции базового тела, являющимися различными и удовлетворяющими правилу треугольника $\{A+B>C, A+C>B, B+C>A\}$, при средних величинах начальных угловых скоростей (порядка $0,3$ [рад/с]).
3. Случай движения наноспутника с пятью степенями свободы (движение подвижного оборудования вокруг продольной оси заморожено) с главными моментами инерции базового тела, являющимися различными и удовлетворяющими правилу треугольника $\{A+B>C, A+C>B, B+C>A\}$, при больших величинах начальных угловых скоростей (порядка 3 [рад/с]). Также в рамках текущего случая искусственно вводятся два упругих звена в точке крепления ПУ к телу носителю по степеням свободы относительных углов α_k и β_k , что позволяет рассматривать систему как двухмодульный спутник, составленный из двух твердых тел на упругом соединении (например, когда тела жестко закреплены друг с другом по типу упругого балочного соединения и т.п.).

Для первого случая принимались следующие параметры КА и начальные условия движения: $m_a=400$ [кг], $m_t=20$ [кг]; моменты инерции КА: $A_a=B_a=1500$ [кг*м²], $C_a=750$ [кг*м²]; моменты инерции ПУ: $A_t=B_t=100$ [кг*м²], $C_t=50$ [кг*м²]; начальные значения угловых скоростей КА: $p_a=q_a=r_a=0.03$ [рад/с]; начальные значения углов КА: $\alpha_a=\beta_a=\gamma_a=0$ [рад]; начальные значения угловых скоростей ПУ: $p_k=q_k=r_k=0$ [рад/с]; начальные значения углов ПУ: $\alpha_k=\beta_k=\gamma_k=0$ [рад]; время интегрирования 500 [с]. Результаты моделирования для первого случая приведены на рисунках (2-7).

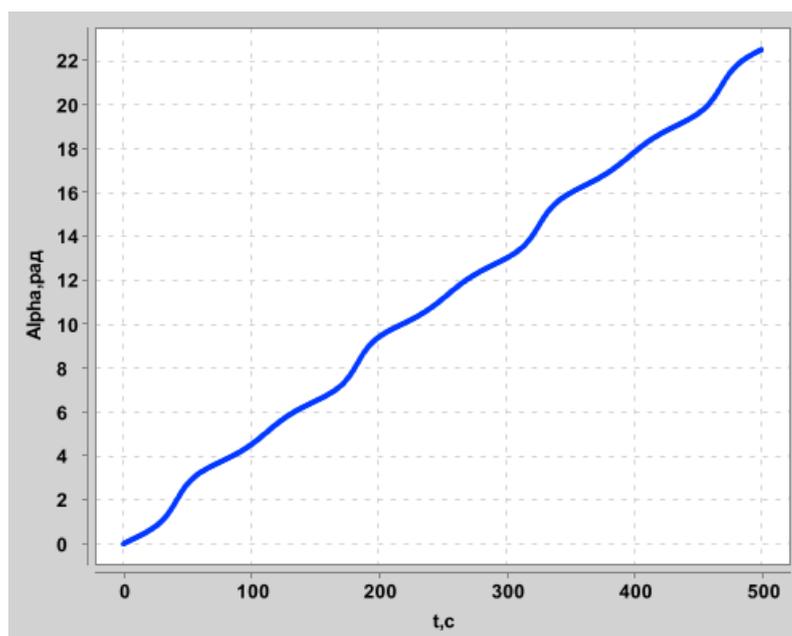


Рисунок 2- Зависимость угла α_a корпуса КА от времени

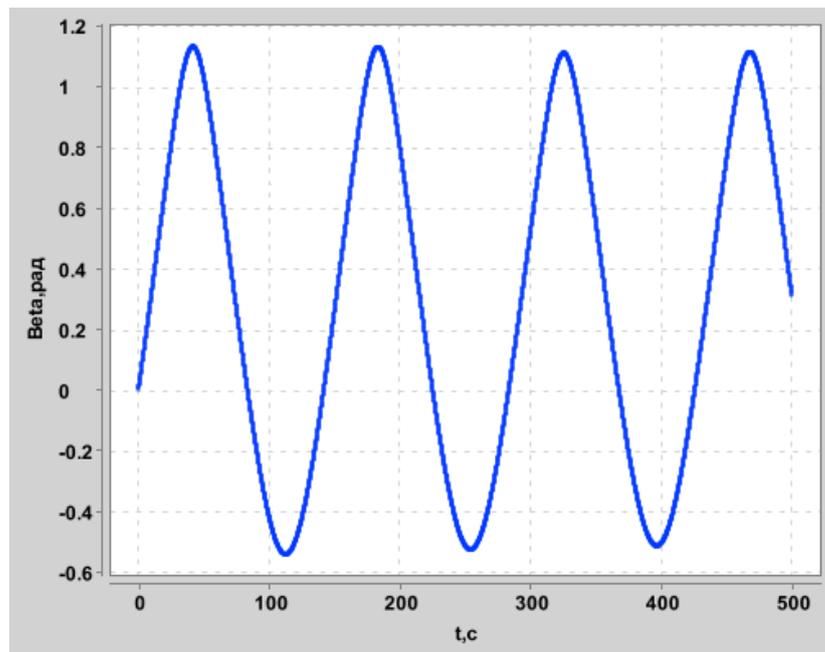


Рисунок 3 - Зависимость угла β_a корпуса КА от времени

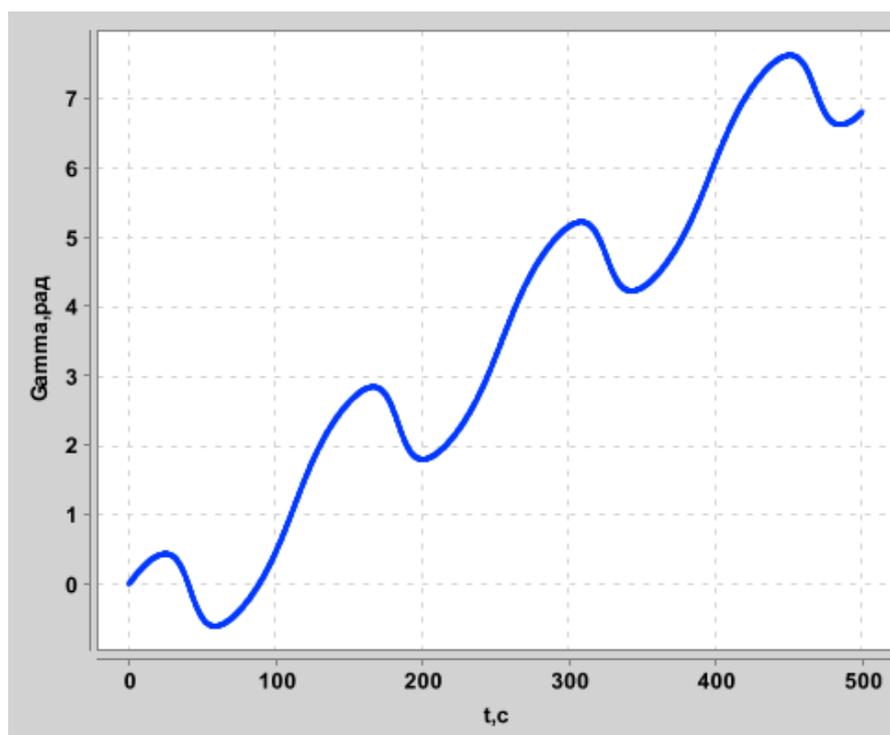


Рисунок 4 - Зависимость угла γ_a корпуса КА от времени

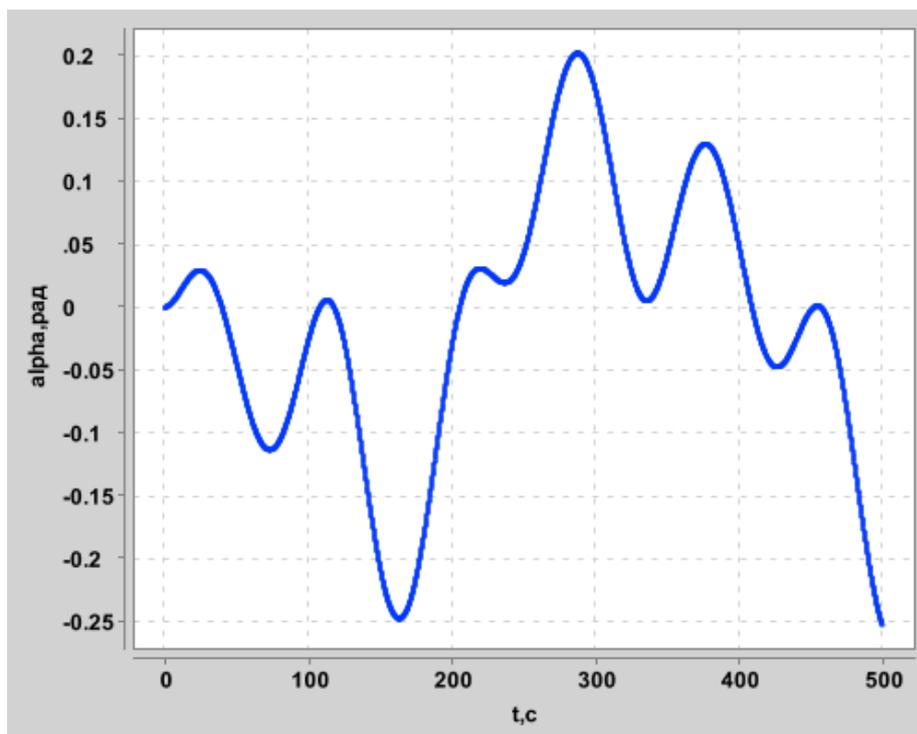


Рисунок 5 - Зависимость угла α_k ПУ от времени

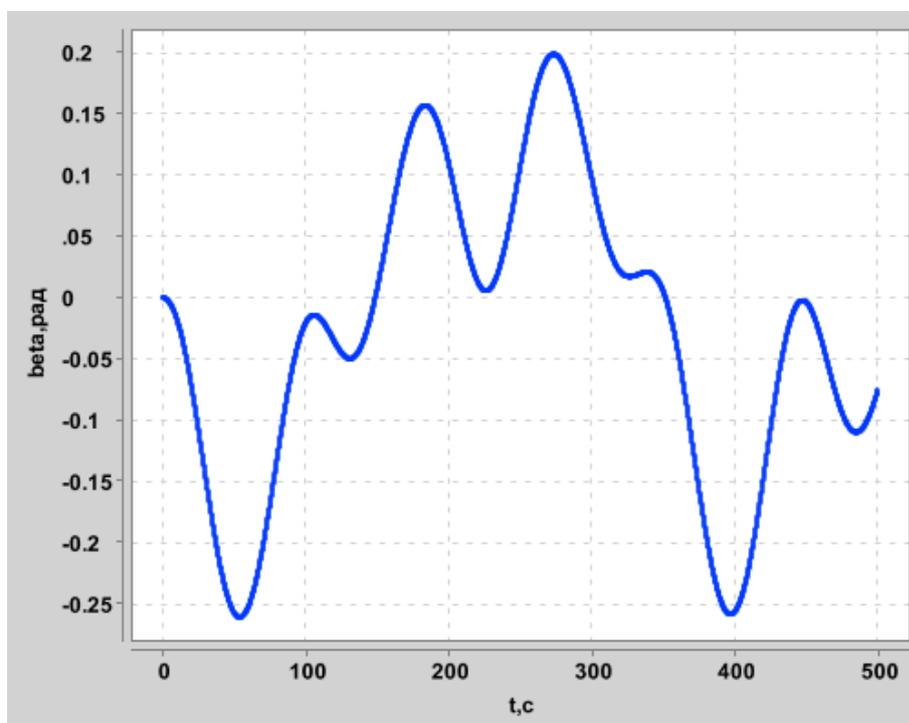


Рисунок 6 - Зависимость угла β_k ПУ от времени

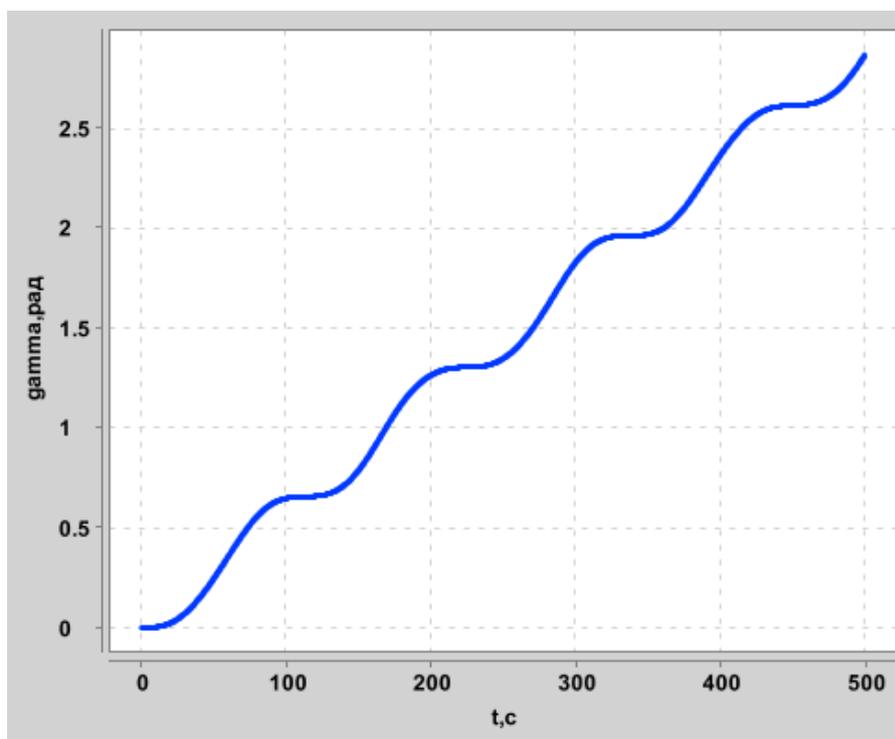


Рисунок 7 - Зависимость угла γ_k ПУ от времени

Как видно из графиков, динамика движения несущего тела качественно близка к динамике движения свободного твёрдого тела. Подвижное устройство совершает угловое движение внутри рамок карданова подвеса без ограничений на параметры движения. Отклонения подвижного оборудования по углам α_k и β_k не превышают 0.3 [рад].

Для второго случая движения были приняты следующие параметры КА и начальные условия: $m_a=100$ [кг], $m_t=10$ [кг]; моменты инерции КА: $A_a=400$ [кг*м²], $B_a=300$ [кг*м²], $C_a=200$ [кг*м²]; моменты инерции ПУ: $A_t=B_t=50$ [кг*м²], $C_t=25$ [кг*м²]; начальные значения угловых скоростей КА: $p_a=q_a=r_a=0.3$ [рад/с]; начальные значения углов КА: $\alpha_a=\beta_a=\gamma_a=0$ [рад]; начальные значения угловых скоростей ПУ:

$p_k=q_k=r_k=0$ [рад/с]; начальные значения углов ПУ: $\alpha_k=\beta_k=\gamma_k=0$ [рад]; время интегрирования 200 [с]. Результаты моделирования движения во втором случае приведены на рисунках (8-13).

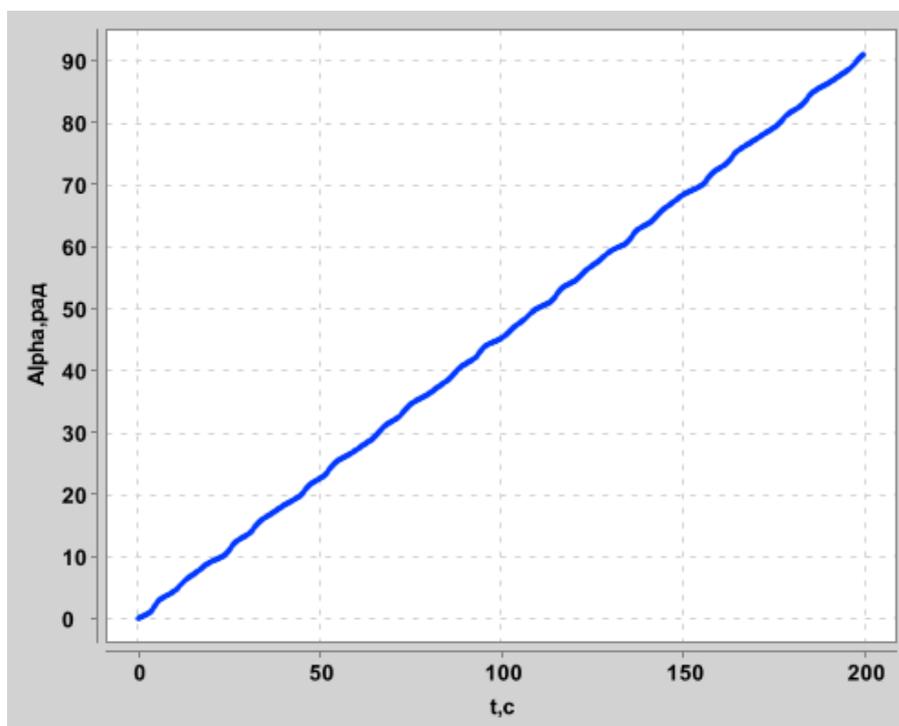


Рисунок 8 - Зависимость угла α_a корпуса КА от времени

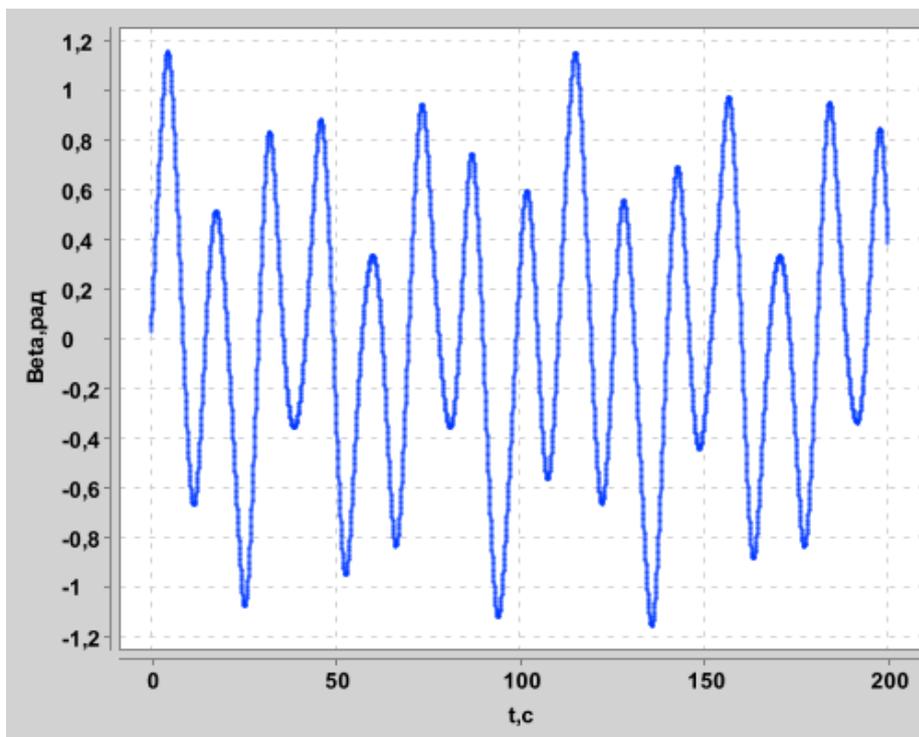


Рисунок 9 - Зависимость угла β_a корпуса КА от времени

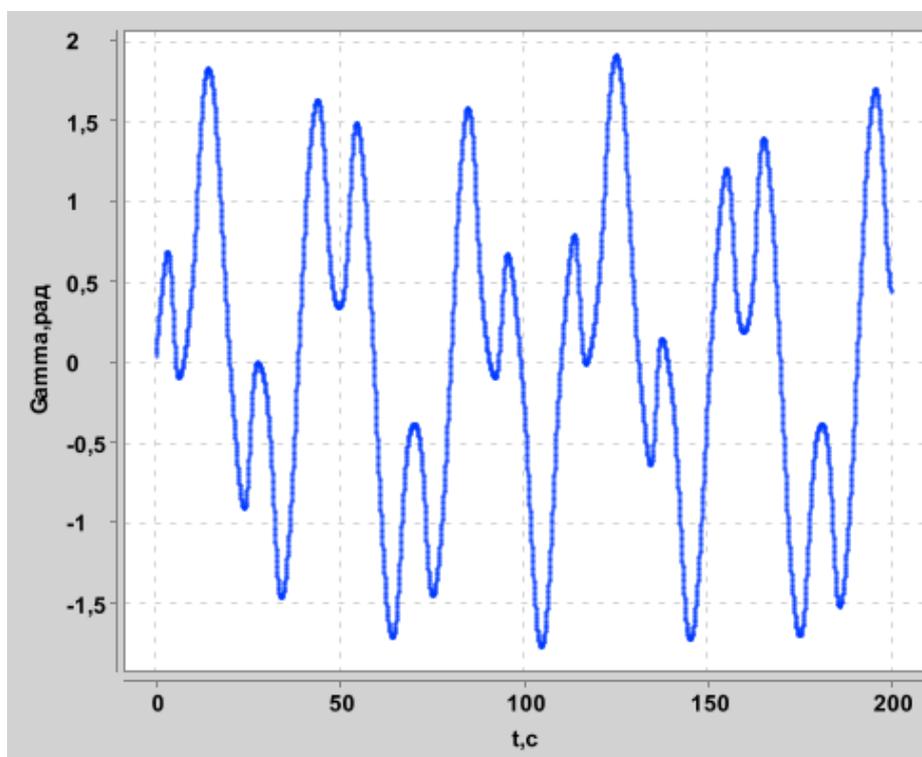


Рисунок 10 - Зависимость угла γ_a корпуса КА от времени

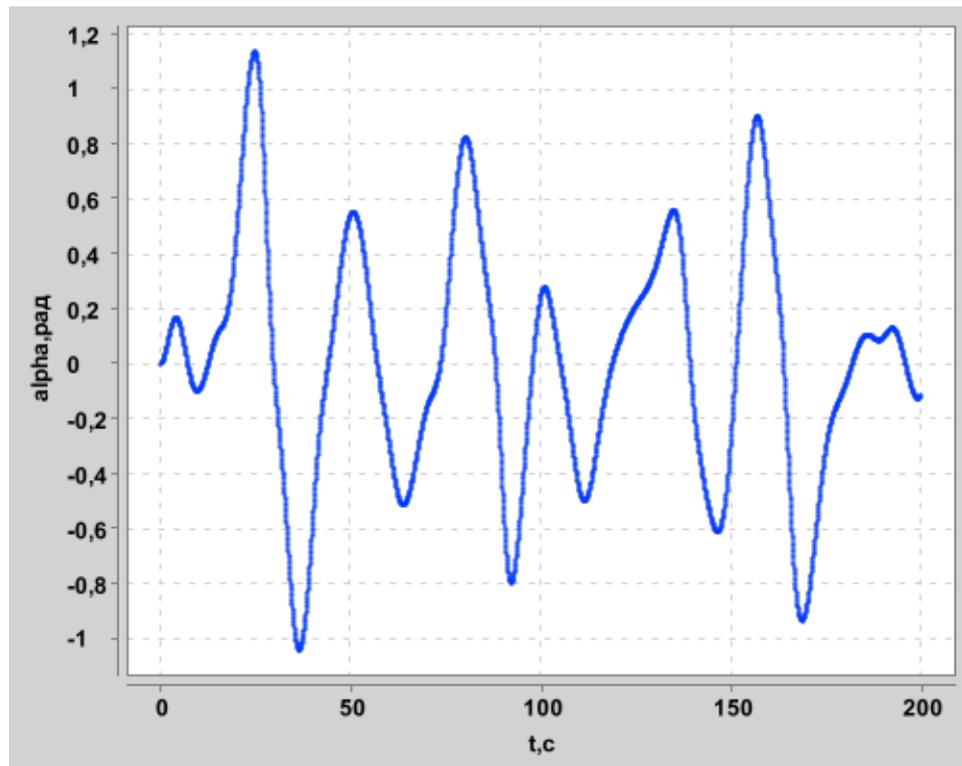


Рисунок 11 - Зависимость угла α_k ПУ от времени

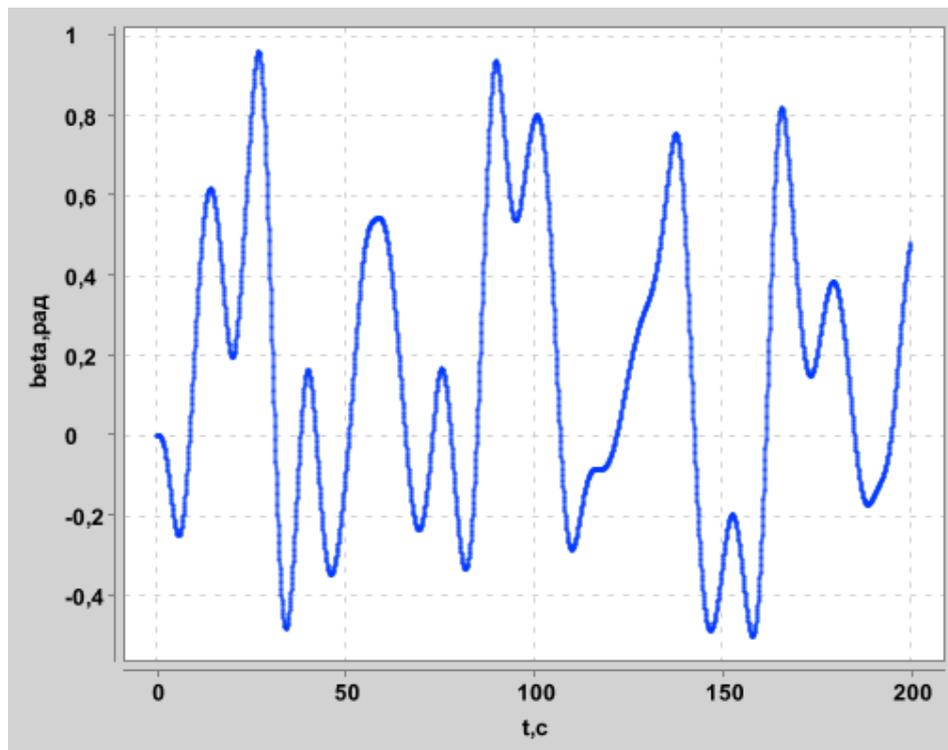


Рисунок 12 - Зависимость угла β_k ПУ от времени

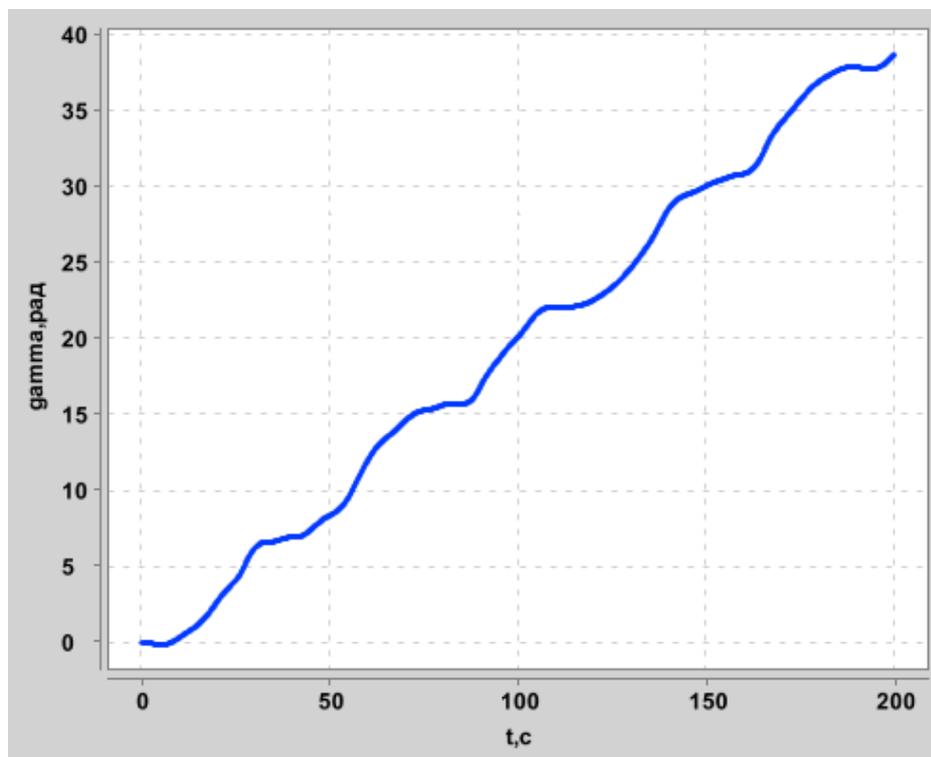


Рисунок 13 - Зависимость угла γ_k ПУ от времени

Из представленных результатов видна сложная (полигармоническая) инициация колебаний ПУ внутри карданова подвеса, что объясняется наличием гироскопических моментов от динамической несимметрии базового тела ($A \neq B \neq C$). Так колебания ПУ внутри карданова подвеса происходят со значительными величинами амплитуд по углам α_k и β_k (более 1 [рад]). Из этого следует, что сама естественная динамика свободной системы в рассматриваемом случае стремится иницировать амплитудные полигармонические колебания ПУ, что необходимо парировать в рамках проектирования КА, например, в случае КА дистанционного зондирования для предотвращения колебаний ПУ (объектива) целесообразно устанавливать дополнительные демпферы на рамки карданова подвеса.

Для третьего случая движения были приняты следующие параметры и начальные условия: $m_a=100$ [кг], $m_t=10$ [кг]; моменты инерции КА: $A_a=400$ [кг*м²], $B_a=300$ [кг*м²], $C_a=200$ [кг*м²]; моменты инерции ПУ: $A_t=B_t=50$ [кг*м²], $C_t=25$ [кг*м²]; начальные значения угловых скоростей КА: $p_a=q_a=r_a=0.3$ [рад/с]; начальные значения углов КА: $\alpha_a=\beta_a=\gamma_a=0$ [рад]; начальные значения угловых скоростей ПУ: $p_k=q_k=r_k=0$ [рад/с]; начальные значения углов ПУ: $\alpha_k=\beta_k=\gamma_k=0$ [рад]. Как упоминалось выше, в рамках моделируемого случая были искусственно введены два упругих звена в точке крепления ПУ к телу носителю по степеням свободы относительных углов α_k и β_k , при этом были выбраны коэффициенты упругости $C_\alpha = C_\beta = 10$ [Н/рад]. Время интегрирования 200 [с]. Результаты моделирования в третьем случае приведены на рисунках (14-19).

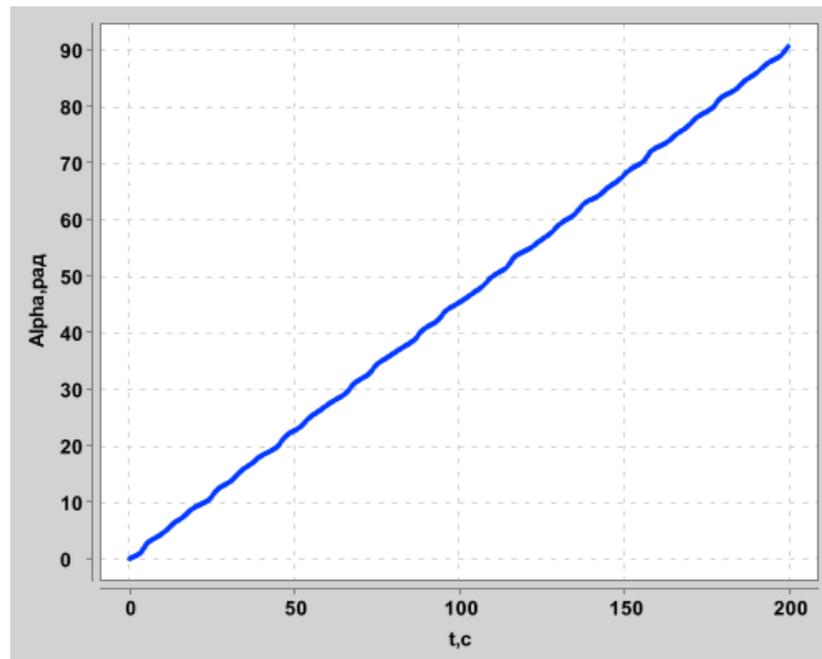


Рисунок 14 - Зависимость угла α_a корпуса КА от времени

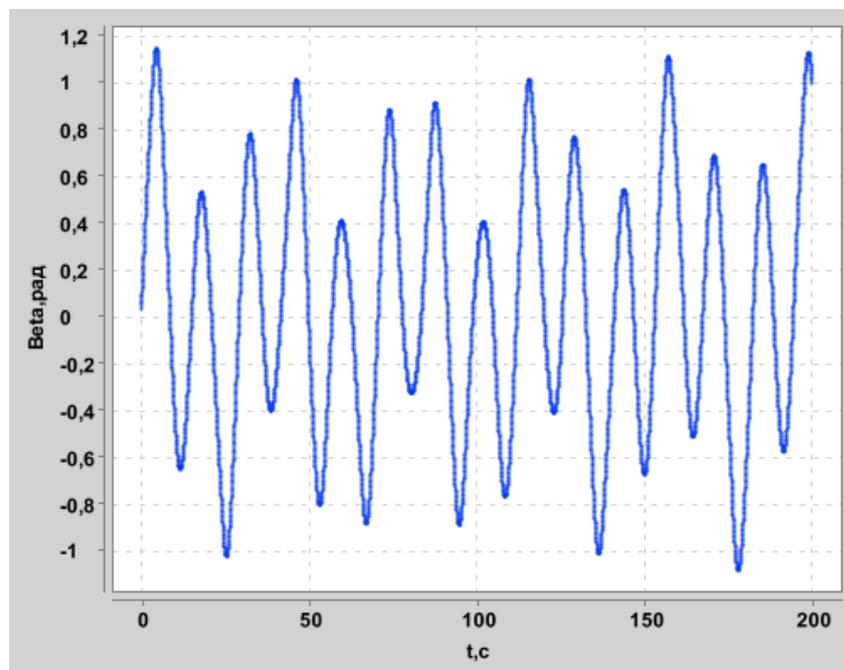


Рисунок 15 - Зависимость угла β_a корпуса КА от времени

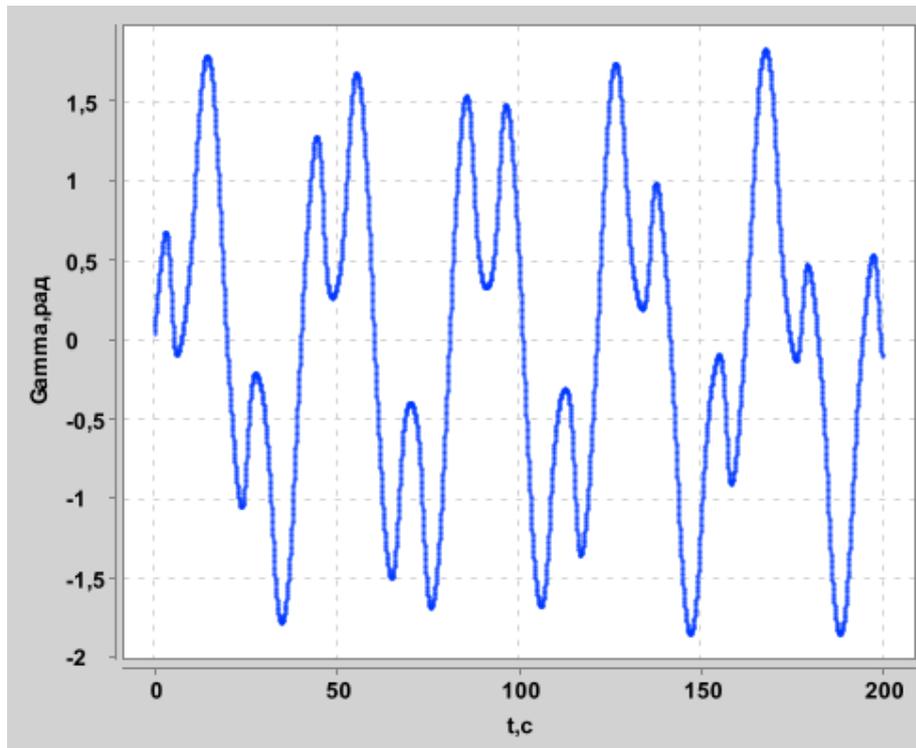


Рисунок 16 - Зависимость угла γ_a корпуса КА от времени

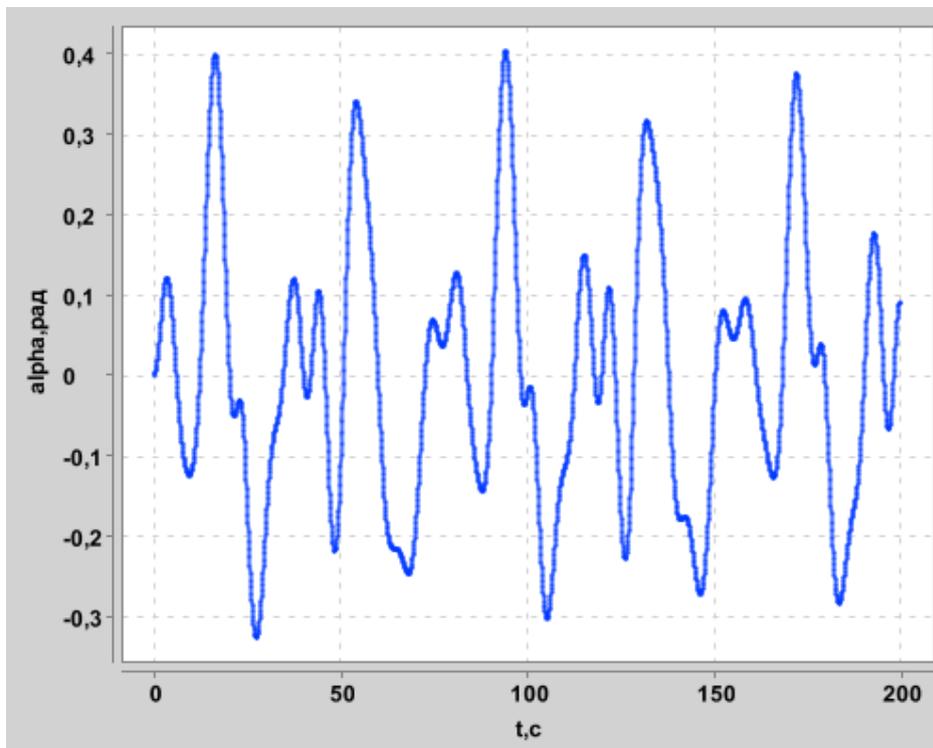


Рисунок 17 - Зависимость угла α_k ПУ от времени

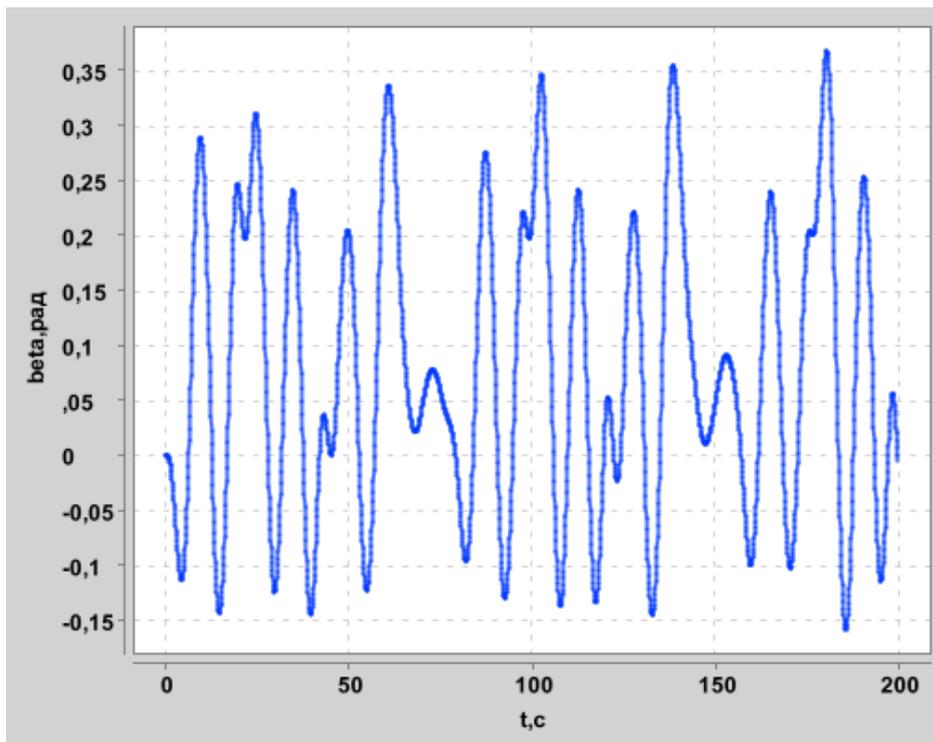


Рисунок 18 - Зависимость угла β_k ПУ от времени

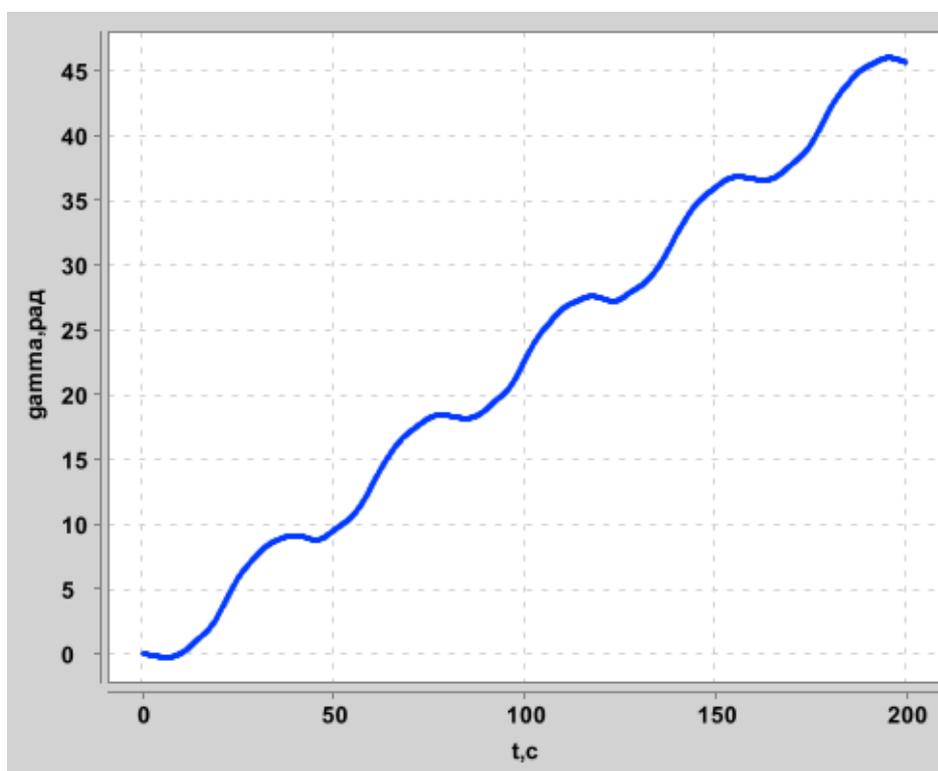


Рисунок 19 - Зависимость угла γ_k ПУ от времени

3. Основные выводы и рекомендации

В качестве основных выводов следует, во-первых, отметить, что разработанная математическая модель КА переменной конфигурации является существенно более сложной по сравнению с моделью КА с двойным вращением [5-9].

Во-вторых, результаты проведенного численного моделирования связки двух твердых тел на основе карданового закрепления могут быть использованы для понимания естественной динамики свободного пространственного движения составного КА с подвижным твердотельным рабочим элементом. Динамика свободного движения указанной связки является информативной с точки зрения реализации базового углового движения КА вокруг центра масс и позволяет оценить относительные угловые перемещения и скорости рабочего элемента, что, в свою очередь, дает возможность корректно сформулировать и учесть необходимые требования к исполняющим органам управляемого относительного позиционирования подвижного устройства (электродвигатели поворотов рамок кардана, демпфирующие и упругие звенья) при проектировании КА.

Также можно указать тот факт, что при наличии заданного программного движения подвижного устройства по отношению к базовому телу ($a_k = a_k(t)$, $b_k = b_k(t)$, $g_k = g_k(t)$) система теряет три степени свободы (соответствующие уравнения могут быть исключены) а базовые динамические уравнения (20)

совместно с кинематическими дифференциальными уравнениями (25) могут быть проинтегрированы отдельно, что определит динамику пространственного движения КА как системы с изменяемой во времени конфигурацией (т.е. свободную динамику углового движения КА в процессе выполнения программы перемещения ПУ). Полученные при этом зависимости от времени для параметров свободного углового движения КА с заданной переменной конфигурацией существенно упростят последующий синтез управляемого углового движения КА в процессе реализации программного движения подвижного устройства.

Благодарности

Исследования поддержаны Минобрнауки России в рамках Программы государственных заданий высшим учебным заведениям и научным организациям в сфере научной деятельности (конкурс научных проектов, выполняемых научными коллективами исследовательских центров и (или) научных лабораторий образовательных организаций высшего образования) – проект № 9.1616.2017/ПЧ (9.1616.2017/4.6).

Библиографический список

1. Schiehlen W. Research trends in multibody system dynamics // Multibody System Dynamics, 2007, vol. 18, no. 1, pp. 3 - 13.
2. Wittenburg J. Dynamics of Systems of Rigid Bodies, Stuttgart, Teubner, 1977, 224 p.

3. Wittenburg J. Beitrage zur dynamik von gyrostaten, Quaderno, Accademia Nazional dei Lincei, 1975, no. 227, pp. 1 - 187.
4. Likins P.W. Spacecraft Attitude Dynamics and Control - A Personal Perspective on Early Developments // Journal Guidance Control Dynamic, 1986, vol. 9, no. 2, pp. 129 - 134.
5. Бейнум П.М., Фуксел П.Дж., Мэкисон Д.Л. Движение и устойчивость спутника с двойным вращением, снабженного демпферами нутации. – М.: Мир:, 1975. Т.1. С. 59 - 78.
6. Аншаков Г.П., Асланов В.С., Балакин В.Л., Дорошин А.В., Квашин А.С., Круглов Г.Е., Юдинцев В.В. Динамические процессы в ракетно-космических системах // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П Королёва. 2003. №. 1. С. 1 – 23.
7. Асланов В.С., Дорошин А.В. Стабилизация спускаемого аппарата частичной закрутки при осуществлении неуправляемого спуска // Космические исследования. 2002. Т. 40. №. 2. С. 193 - 200.
8. Асланов В.С., Дорошин А.В. О двух случаях движения неуравновешенного гиростата // Известия РАН. Механика твердого тела. 2006. № 4. С. 42 - 55.
9. Doroshin A.V., Heteroclinic chaos and its local suppression in attitude dynamics of an asymmetrical dual-spinspacecraft and gyrostat-satellites. The part I – main models and solutions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2016, no. 31 (1-3), pp. 151 - 170.

10. Асланов В.С., Пикалов Р.С. Безударное сближение космического мусора с буксиром при использовании тросовой системы // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76750>
11. Крикунов М.М. Исследование динамики пространственного движения тел переменного состава // Труды МАИ. 2010. № 41. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=23801>
12. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. - М.: Наука, 1977. - 328 с.
13. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1966. - 172 с.
14. Anton V. Doroshin, Attitude Dynamics of Spacecraft with Control by Relocatable Internal Position of Mass Center // Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists, IMECS 2017, Hong Kong, March 15-17, 2017, vol. 1, pp. 231 - 235.
15. Cochran J.E., Shu P.H., Rew S.D. Attitude motion of asymmetric dual-spin spacecraft // Journal Guidance Control Dynamic, 1982, no. 5, pp. 37 – 42.
16. Chinnery A.E., Hall C.D. Motion of a Rigid Body with an Attached Spring-Mass Damper // Journal Guidance Control Dynamic, 1995, vol. 18, no. 6, pp. 1404 - 1409.
17. Or A.C. Dynamics of an Asymmetric Gyrostat // Journal of Guidance, Control Dynamics, 1998, vol. 21, no. 3, pp. 416 - 420.
18. Sarychev V.A., Mirer S.A., Isakov A.V. Dual-spin satellites with gyro-damping // Acta Astronautica, 1981, vol. 9, no. 5, pp. 285 – 289.

19. Kozlov V.V. Methods of Qualitative Analysis in the Dynamics of a Rigid Body, Moscow, 1980, Izd-vo Moskovskogo Universiteta, 231 p.
20. Ivin E.A. Decomposition of variables in task about gyrostat motion // Vestnik MGU. Mathematics and Mechanics, 1985, no. 3, pp.69 – 72.