

О некоторых особенностях решения задач статики мягких оболочек вращения при больших деформациях

Коровайцева Е.А.

*НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова,
Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Россия*

e-mail: katrell@mail.ru

Статья поступила 07.10.2020

Аннотация

В работе продемонстрированы особенности реализации вычислительных алгоритмов решения задач механики тонкостенных конструкций с сильной нелинейностью на примере задачи статического раздувания мягкой оболочки вращения при больших деформациях. Рассматриваемый алгоритм решения реализует метод дифференцирования по параметру. Отмечена необходимость исследования свойств разрешающей системы уравнений, предваряющего реализацию алгоритма и позволяющего скорректировать его при наличии особенностей в рассматриваемой системе. Исследовано влияние на результаты расчета следующих параметров вычислительного алгоритма: величина предварительного внутреннего давления; величина начального и максимально допустимого шага по параметру дифференцирования; число шагов по параметру, на которых проводится регуляризация решения; способы расчета напряженного состояния при построении системы регуляризирующих уравнений. Показана существенная зависимость решения от указанных параметров, вплоть до получения

неверных результатов. Сформулированы рекомендации по проведению вычислений при решении задач с сильной нелинейностью.

Ключевые слова: мягкая оболочка, высокоэластичный материал, большие деформации, нелинейная краевая задача, метод дифференцирования по параметру.

Введение

Нелинейные задачи механики мягкооболочечных конструкций отличаются существенным многообразием и сложностью их постановки, обилием приемов для их решения. Общей для всех задач является, как правило, необходимость использования для их решения численных методов, наиболее распространенными из которых являются методы конечных разностей и конечного элемента. При этом отмеченные особенности задач деформирования мягких оболочек на практике приводят к необходимости введения различных упрощений или рассмотрения частных случаев геометрии, нагружения, свойств материала и закрепления исследуемой конструкции. Большая часть упрощений принимается на основании получения решений конкретных прикладных задач. Так, при определении кинематических характеристик парашютных систем в простейшем случае может применяться модель абсолютно твердого тела [1-4]. В работах [5-7] рассматриваются задачи статики и динамики парашютов как деформируемых систем, а для их решения используется метод конечных разностей. В работах [8, 9] исследуется поведение судовых конструкций, при этом и постановки задач, и

приемы их решения отличаются многообразием, включая аналитические подходы, но, очевидно, продиктованы необходимостью решения практических задач судостроения. Алгоритмы расчета пневматических строительных конструкций предложены в таких работах, как [10, 11]. Однако указанные конструкции зачастую представляют собой пологие оболочки, эксплуатируемые в незначительном диапазоне деформаций, что также позволяет упростить расчеты и снизить требования к разрабатываемым вычислительным алгоритмам.

Многие работы фундаментального характера посвящены анализу или получению решений частных задач деформирования мягких оболочек простейшей геометрии: цилиндрической [12, 13], сферической [14-18] или тороидальной [19, 20]. При этом зачастую разрешающие соотношения, описывающие напряженно-деформированное состояние оболочки, изначально формируются в предположении заданной ее геометрии, а затем используется какой-либо из известных численных методов (как правило, метод конечных разностей или метод пристрелки), либо аналитический подход к получению решения.

В ряде работ предложены алгоритмы расчета мягких оболочек произвольной формы [21], в том числе не подразумевающие каких-либо ограничений на диапазон деформирования [22]. Однако в доступной литературе не удалось найти ни одной работы, в которой предложенный алгоритм решения задач деформирования мягких оболочек сопровождался бы исследованием особенностей его применения. Более того, в ряде работ последних лет получение результатов ограничивается лишь применением коммерческих программных комплексов [23-25] без критического

анализа возможностей получения достоверных решений. Вместе с этим необходимо отметить, что в общем случае задачи расчета мягких оболочек, помимо «обычной» для задач теории оболочек плохой обусловленности, имеют свою специфику, связанную как со свойствами систем уравнений, описывающих их поведение, так и с величиной исследуемого диапазона перемещений и деформаций, совместным существованием зон одно- и двухосного состояний и рядом других факторов. Таким образом, возможность получения численного решения таких задач существенно зависит от искусства вычислений.

В данной работе, по-видимому, впервые продемонстрированы особенности применения вычислительного алгоритма, предлагаемого для расчета напряженно-деформированного состояния составных оболочек вращения из высокоэластичных материалов без ограничения на перемещения и деформации, обуславливающие успешное получение достоверного решения.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о раздувании полусферы постоянной толщины внутренним давлением. Соответствующая разрешающая система уравнений имеет вид [26] совокупности дифференциальных соотношений

$$\begin{aligned} \frac{dT_{1x}}{d\theta} &= ctg\theta \cdot T_{2y} + T_{1z} - p_3 \mathcal{G}_1 (1 + e_2) R \\ \frac{dT_{1z}}{d\theta} &= -T_{1x} - T_{2y} + p_3 (1 + \varepsilon_1) (1 + e_2) R \\ \frac{du}{d\theta} &= \frac{1}{R} \cdot \varepsilon_1 - w \\ \frac{dw}{d\theta} &= -\frac{1}{R} \cdot \mathcal{G}_1 + u \end{aligned} \quad (1)$$

и дополнительных алгебраических соотношений

$$\begin{aligned}
 e_2 &= \operatorname{ctg} \theta \cdot R \cdot u + \frac{1}{R} w \\
 e_1 + \frac{1}{2} e_1^2 &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 + \vartheta_1^2) \\
 T_{1x} &= T_1^* \frac{(1 + \varepsilon_1)}{R} \\
 T_{2y} &= T_2^* \frac{(1 + e_2)}{R} \\
 T_{1z} &= T_1^* \cdot \frac{\vartheta_1}{R}
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$T_1^* = T_1 \cdot \frac{1 + e_2}{1 + e_1}; \quad T_2^* = T_2 \cdot \frac{1 + e_1}{1 + e_2}$$

с физическими соотношениями

$$T_1 = \Phi_1(e_1, e_2); \quad T_2 = \Phi_2(e_1, e_2),$$

где вид функций Φ_1 , Φ_2 определяется материалом оболочки, T_{1x} , T_{2y} , T_{1z} – проекции равнодействующих истинных усилий T_1^* , T_2^* на оси системы координат, связанной с недеформированной оболочкой, а остальные обозначения соответствуют [27].

Соотношения (1) вместе с граничными условиями образуют нелинейную краевую задачу. Для ее записи в векторной форме введем вектор разрешающих переменных

$$\vec{y} = \{T_{1x}; T_{1z}; u; w\}^T,$$

вектор дополнительных переменных

$$\vec{z} = \{\varepsilon_1; \varepsilon_2; e_1; e_2; \vartheta_1; T_{2y}; T_1^*; T_2^*; T_1; T_2\}^T,$$

функцию из 1 компонент заданных обобщенных распределенных нагрузок $\vec{q}(x)$ и вектор характерных геометрических параметров $\vec{\mu}$.

Тогда соотношения (1)-(2) запишутся в виде

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}, \vec{q}), \quad (3)$$

$$\vec{\varphi}(x, \vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}, \vec{q}) = \vec{0}. \quad (4)$$

Граничные условия задачи запишем в общем виде

$$\vec{\psi}_1(x_1, \vec{y}_1, \vec{\mu}_1, \vec{q}_1) = \vec{0}, \quad 1 \leftrightarrow 2, \quad (5)$$

где $\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2$ - вектор-функции заданных краевых соотношений с числом компонент соответственно p и s , где $p + s = n$; индексы 1 и 2 обозначают начало и конец интервала интегрирования соответственно.

Алгоритм метода дифференцирования по параметру

Среди широкого круга возможных алгоритмов решения задачи (3)-(5) выберем метод дифференцирования по параметру, впервые предложенный Д.Ф. Давиденко [28]. В соответствии с шаговой концепцией этого метода считаем, что система внешних нагрузок с заданным распределением $\vec{q}, \vec{q}_1, \vec{q}_2$ изменяется в процессе расчета пропорционально параметру нагрузки α .

Будем считать параметр дифференцирования T выбранным. После дифференцирования соотношений (3)-(5) по параметру получим квазилинейную краевую задачу

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A^* (x, y, z, \mu, q, \alpha) \vec{y} + a(x, y, z, \mu, q, \alpha) \dot{\alpha} \quad (6)$$

с граничными условиями

$$B_1^*(x_1, \mu_1) \dot{y}_1 + b_1(x_1, \mu_1) \dot{\alpha} = \vec{0}, \quad 1 \leftrightarrow 2 \quad (7)$$

и нелинейную начальную задачу

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{y}_i}{dT} &= \dot{\vec{y}}_i(\vec{y}_i, \vec{z}_i, x_i, T), \\ \frac{d\vec{z}_i}{dT} &= \dot{\vec{z}}_i(\vec{y}_i, \vec{z}_i, x, T), \quad i \in [1, N] \\ \frac{d\alpha}{dT} &= \dot{\alpha}(\vec{y}_i, \vec{z}_i, T). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A^*(x, \vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}, \vec{q}, \alpha) &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}} - \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{z}} \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \vec{z}} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \vec{y}}; \\ \vec{a}^*(x, \vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}, \vec{q}, \alpha) &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{q}} \vec{q} - \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{z}} \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \vec{z}} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \vec{q}} \vec{q}. \end{aligned}$$

$\dot{\vec{y}}_i, \dot{\vec{z}}_i, \dot{\alpha}$ - производные по параметру T от соответствующих величин, N - число точек дискретизации меридиана оболочки при решении краевой задачи (3)-(5).

Задача (6)-(7) отличается от обычных линейных краевых задач лишь зависимостью коэффициентов от решения нелинейной начальной задачи (8). Поэтому она может быть решена любым из известных методов численного решения линейных краевых задач.

Основные особенности метода дифференцирования по параметру проявляются в решении начальных задач (8) и взаимосвязи решений задач (6)-(7) и (8). Начальные задачи отличаются табличной формой расчета правых частей, обуславливающей предпочтительное использование для них шаговых методов [29].

Взаимосвязь краевой и начальной задач требует итерационного способа их совместного последовательного решения.

Особенности разрешающей системы уравнений

Для решения краевых задач по выбранным соотношениям с использованием изложенного алгоритма функции правых частей \vec{f} системы (1) и матрицы $\partial \vec{f} / \partial \vec{y}$, $\partial \vec{f} / \partial \vec{z}$, $\partial \vec{\varphi} / \partial \vec{y}$, $\partial \vec{\varphi} / \partial \vec{z}$ должны быть непрерывны в области интегрирования, а матрица $\partial \vec{\varphi} / \partial \vec{z}$ должна быть не вырождена. Но для задач теории мягких оболочек при отсутствии предварительного напряженно-деформированного состояния последнее условие не выполняется, т.к. матрица $\partial \vec{\varphi} / \partial \vec{z}$ имеет вид

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \vec{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1+\varepsilon_1) & 1+e_1 & 0 & -g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -T_1^* \frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(1+\varepsilon_1)}{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_2^* \frac{1}{R} & 0 & 1 & 0 & -\frac{(1+e_2)}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_1^* \frac{1}{R} & 0 & g_1 \frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_1^* & 0 & 0 & 0 & 1+e_1 & 0 & -(1+e_2) & 0 \\ 0 & -T_2 & T_2^* & 0 & 0 & 0 & 1+e_2 & 0 & -e_1 \\ 0 & -\frac{\partial \Phi_1}{\partial e_1} & -\frac{\partial \Phi_1}{\partial e_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial \Phi_2}{\partial e_1} & -\frac{\partial \Phi_2}{\partial e_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Из анализа структуры представленной матрицы видно, что при отсутствии предварительного напряженного состояния все компоненты пятой строки обращаются в нули. Таким образом, для задач теории мягких оболочек расчет матрицы $(\partial \vec{\varphi} / \partial \vec{z})^{-1}$ на первом шаге решения по предложенному выше алгоритму

затруднителен. В отличие от расчета моментных оболочек, в данном случае на первом шаге по параметру тривиальное решение применять нельзя. Поэтому на начальном участке построения решения системы уравнений (1)-(4) для мягких оболочек необходима регуляризация решения, состоящая в построении разрешающей системы уравнений теории мягких оболочек с решением, близким к решению исходной задачи, но не имеющей плохой обусловленности. В частности, таковой является система уравнений технической теории мягких оболочек [27].

Результаты численных экспериментов на ЭВМ

Для получения достоверного решения исходной нелинейной краевой задачи (3)-(5) существенное значение имеет точность решения каждой из задач (6)-(8) в отдельности. Несмотря на то, что для получения решения необходимой точности и для краевой, и для начальной задачи имеется надежное теоретическое обоснование, его реализация является сложной самостоятельной задачей, имеющей мало общего с алгоритмом (6)-(8) получения решения задачи (3)-(5) на ЭВМ. Анализ влияния различных параметров вычислительного алгоритма или свойств уравнений теории мягких оболочек на результаты расчета в аналитической форме трудно осуществить. Поэтому для исследования этих вопросов используем численные эксперименты на ЭВМ при решении задачи о раздувании полусферы с различными условиями закрепления края. Решение этой задачи при подвижном закреплении края возможно не только численно, но и аналитически, что делает ее хорошим тестовым примером в большом диапазоне деформаций.

Рассмотрим оболочки из материала, физические свойства которого описываются соотношениями Трелоара:

$$T_1 = B \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^3 \cdot \lambda_2^3} \right); \quad \lambda_1 = 1 + e_1, \quad 1 \leftrightarrow 2,$$

где $B = \frac{Eh}{1-\nu^2}$, E – модуль упругости материала, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки.

Для иллюстрации получаемых результатов из всей информации о напряженно-деформированном состоянии оболочки используем только диаграммы нагружения в виде графиков нагрузка-прогиб в полюсе оболочки. Связь безразмерных величин с размерными примем в виде $p = p^*/E$, $w_0 = w_0^*/R_0$, где R_0 – радиус недеформированной полусферы. Во всех расчетах отношение радиуса недеформированной полусферы к ее толщине принято равным $R_0/h_0 = 100$.

Одним из первых вопросов, связанным с особенностями расчета мягких оболочек, является вопрос назначения предварительного давления p_0 , соответствующего основному напряженному состоянию при использовании системы уравнений технической теории мягких оболочек в качестве регуляризирующей. Подбор величины предварительного давления проводится численно (рис. 1). На первом шаге решения за основное состояние принимается состояние с давлением, уменьшение которого не изменяет диаграмму нагружения. Следует отметить, что назначение чрезмерно малой величины предварительного

давления может привести к отсутствию сходимости коррекции решения на первом же шаге.

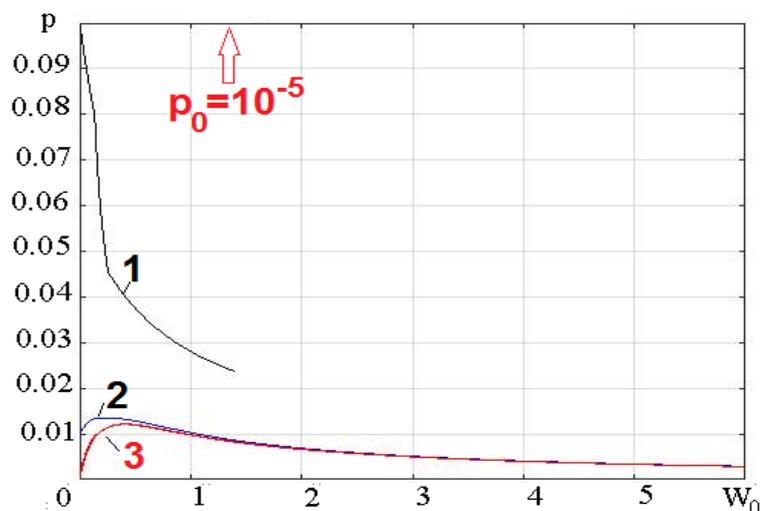


Рис. 1. Диаграмма нагружения полусферы с подвижным закреплением экватора при значениях предварительного давления: 1 - $p_0 = 10^{-1}$, 2 - $p_0 = 10^{-2}$, 3 - $p_0 = 10^{-3}$, $p_0 = 10^{-4}$ (кривая 3 соответствует точному решению)

Важным вопросом, определяющим однозначное получение решения нелинейной задачи, является вопрос выбора параметра продолжения. Из множества существующих подходов к этому выбору рассмотрим для сравнения два, следуя Н.В. Валишвили [30] и В.И. Шалашилину [31]. На рис. 2 показано изменение шага по прогибу полюса оболочки в зависимости от номера шага (кривые аппроксимируют функции целочисленного аргумента). Кривая 1 соответствует подходу В.И. Шалашилина, кривая 2 – подходу Н.В. Валишвили. Характерной является значительно большая эффективность первого из подходов, позволяющего за 60 шагов по параметру продолжения получить значение безразмерного прогиба

полюса оболочки $w_0 = 34,8$, в то время как при использовании второго подхода за указанное число шагов удалось получить значение прогиба лишь $w_0 = 0,585$.

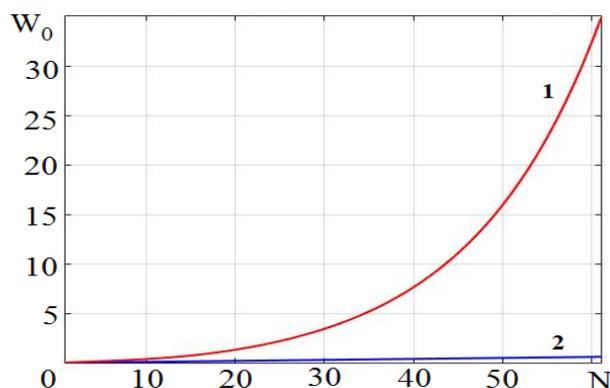


Рис. 2. Иллюстрация скорости сходимости шагового процесса при использовании параметра продолжения в соответствии с подходами В.И. Шалашилина (кривая 1) и Н.В. Валишвили (кривая 2)

Необходимо отметить, что точность получения диаграммы нагружения с использованием подхода В.И. Шалашилина, при прочих одинаковых значениях параметров вычислительного алгоритма, не превышает допустимых для инженерного расчета пределов (рис. 3), однако несколько ниже точности, получаемой при использовании подхода Н.В. Валишвили.

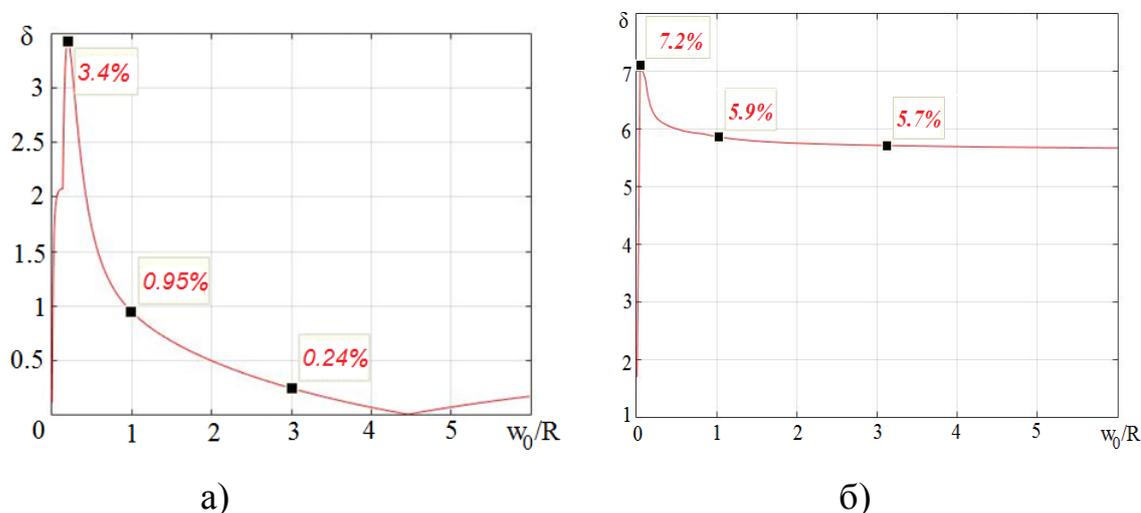


Рис. 3. Погрешность решения задачи о раздувании полусферы с подвижным закреплением экватора при использовании параметра продолжения в соответствии с подходами Н.В. Валишвили (а) и В.И. Шалашилина (б)

Повысить точность расчетов можно уменьшением задаваемых начального и максимального значений шага по параметру продолжения. При этом скорость сходимости шагового процесса замедляется, но даже в этом случае можно добиться получения решений одинаковой точности за меньшее время при использовании подхода В.И. Шалашилина. При этом для обоих подходов число коррекций решения нелинейной задачи (8) превышало единицу лишь на первых пяти шагах по параметру, изменяясь в пределах от 2 до 4 в зависимости от назначения ряда других параметров вычислительного процесса, рассматриваемых ниже.

Благодаря высокой скорости сходимости итерационных процессов подхода В.И. Шалашилина к выбору параметра продолжения, при исследовании поведения решения рассматриваемой задачи удалось впервые получить значения деформаций оболочки $e_1 \approx e_2 = 1.2 \cdot 10^8$ (рис. 4) с точностью 5%, причем последовавшая потеря устойчивости счета обусловлена, по-видимому, не недостатками вычислительного алгоритма, а особенностями машинной арифметики. Число сошедшихся шагов по параметру при этом $N=280$.

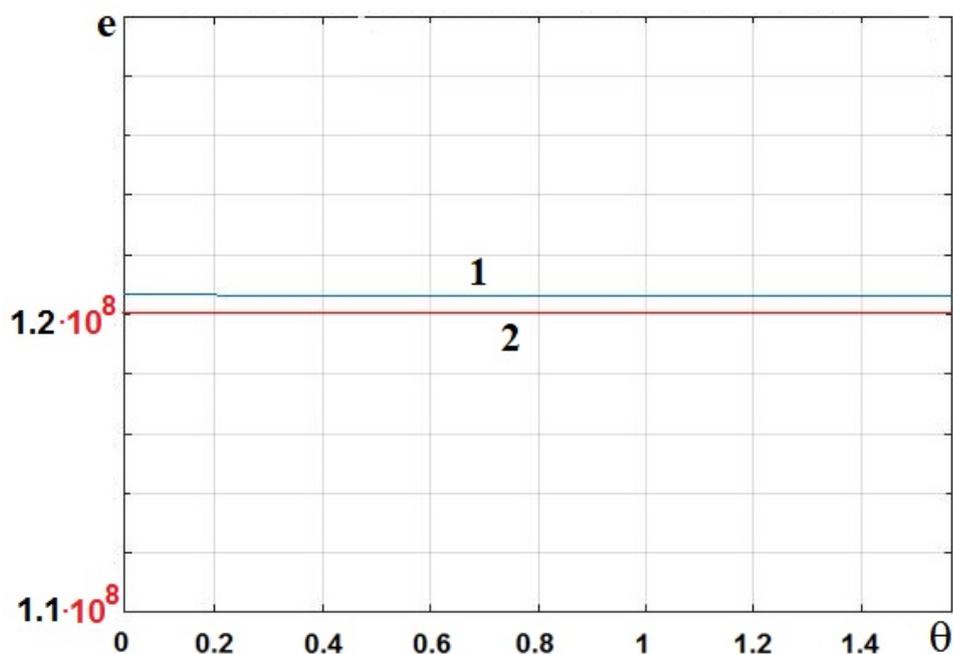


Рис. 4. Распределение компонент деформации полусферы с подвижным закреплением края по меридиану (1 - e_1 , 2 - e_2), полученное до момента потери устойчивости счета

Далее приводимые в тексте графики соответствуют расчетам, полученным с использованием подхода Н.В. Валишвили, если не указано иное.

Существенным параметром, определяющим корректное получение решения задачи (6) - (8), является начальный шаг по параметру нагружения. На рис. 5 представлена диаграмма нагружения полусферы с подвижным закреплением края при значениях начального шага $\Delta T_0 = 10^{-1}$ (кривая 1) и $\Delta T_0 = 10^{-2}$ (кривая 2).

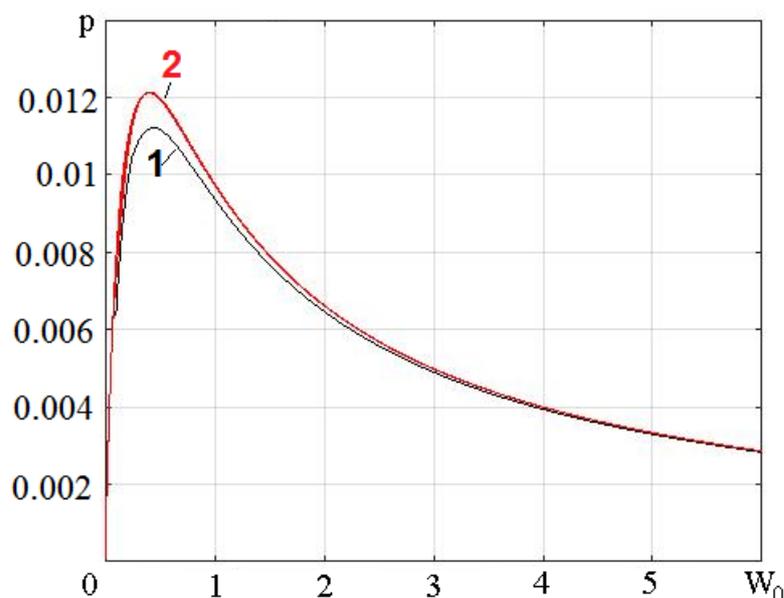


Рис. 5. Иллюстрация влияния выбора начального шага по параметру на решение задачи раздувания полусферы с подвижным закреплением края (кривая 1 – $\Delta T_0 = 10^{-1}$, кривая 2 - $\Delta T_0 = 10^{-2}$)

Из графиков видно, что слишком большое значение начального шага может привести к значительному искажению результатов. Вместе с тем в результате численных экспериментов было установлено, что дальнейшее уменьшение начального шага в диапазоне $10^{-2} \div 10^{-5}$ позволяет получить решение с одинаковой точностью без существенного замедления скорости сходимости итерационных процессов.

Более значительное влияние на результат решения оказывает ограничение шага по параметру. Для выявления важности этого фактора проведены расчеты при значениях ΔT_{\max} соответственно номерам кривых 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} , 1 (рис. 6). Кривая 2 соответствует точному решению.

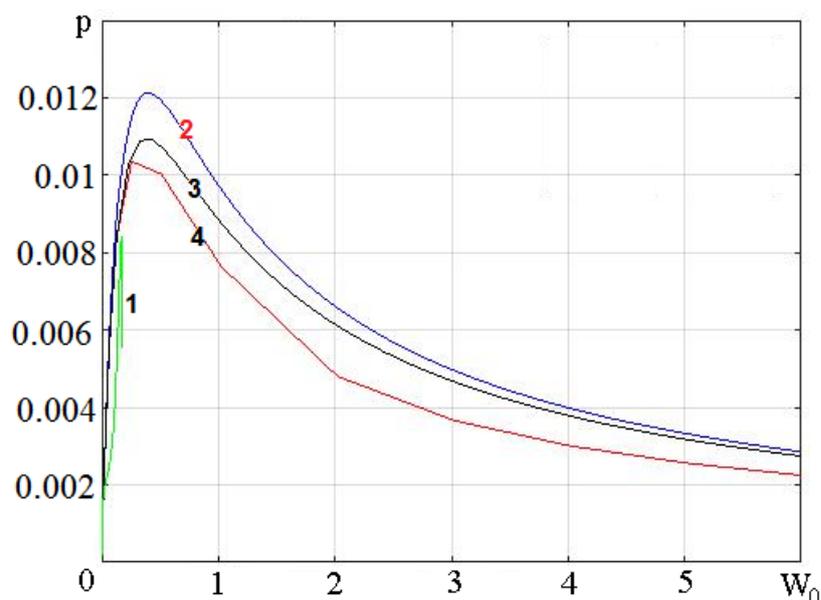


Рис. 6. Иллюстрация влияния выбора максимального шага по параметру на решение задачи раздувания полусферы с подвижным закреплением края (1 – $\Delta T_{\max} = 10^{-3}$, 2 – $\Delta T_{\max} = 10^{-2}$, 3 – $\Delta T_{\max} = 10^{-1}$, 4 – $\Delta T_{\max} = 1$)

Как видно из рис. 6, слишком малое значение максимального шага приводит к потере устойчивости счета, а чрезмерное его увеличение существенно снижает точность решения.

Решение задачи о раздувании полусферы с подвижно закрепленным краем при варьировании таких параметров, как число шагов по параметру, на которых проводится регуляризация, и способ расчета предварительного напряженного состояния, показало весьма несущественное их влияние на результат. Однако такой вывод оказался приемлемым лишь в случае указанного закрепления экватора полусферы при выборе параметра продолжения решения в соответствии с подходом Н.В. Валишвили. Приведем результаты, полученные при решении задачи о раздувании полусферы с неподвижно заземленным краем. При этом при

использовании регуляризующих уравнений технической теории мягких оболочек рассмотрим три способа расчета основного напряженного состояния полусферы:

1) По уравнениям равновесия, составленным для недеформированного состояния оболочки: $T_1^0 = \frac{p_0 R}{2}$; $1 \leq 2$;

2) По уравнениям равновесия, составленным для деформированного состояния оболочки: $T_1^0 = \frac{p_0 R^*}{2}$; $1 \leq 2$;

3) По физическим соотношениям $T_1^0 = B \left(\frac{\lambda_1^*}{\lambda_2^*} - \frac{1}{(\lambda_1^*)^3 \cdot (\lambda_2^*)^3} \right)$; $1 \leq 2$.

Здесь R^* , λ_1^* , λ_2^* определяются по геометрическим параметрам деформированной оболочки в зоне полюса.

Результаты решения задачи, соответствующие каждому из указанных способов, приведены на рис. 7, 8, 9 соответственно. На каждом рисунке приведены диаграммы нагружения, полученные при числе шагов по параметру, на которых проводилась регуляризация системы уравнений, равном 5, 15, 50 и 600 соответственно номерам кривых. При этом 600 шагов по параметру соответствуют использованию системы уравнений технической теории мягких оболочек на всём интервале решения задачи.

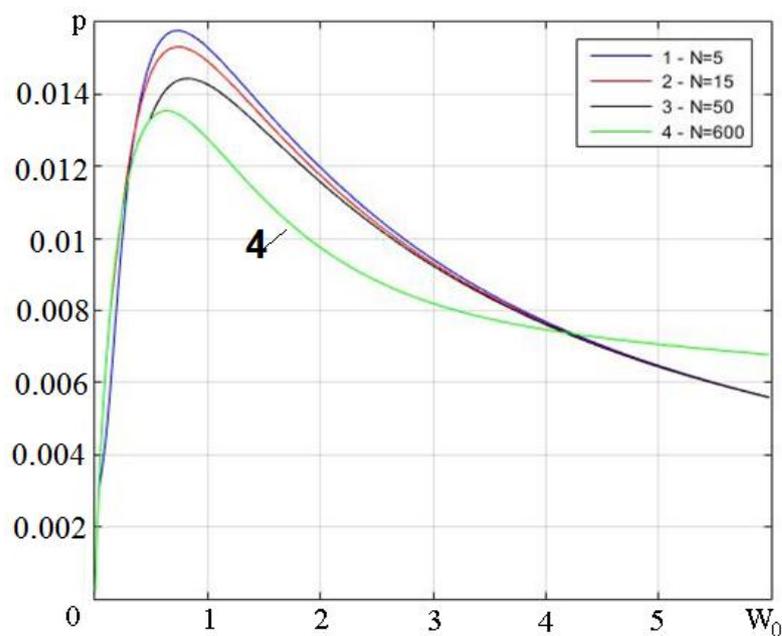


Рис. 7. Диаграмма нагружения при расчете основного напряженного состояния по уравнениям равновесия недеформированной оболочки (параметр продолжения Н.В. Валишвили)

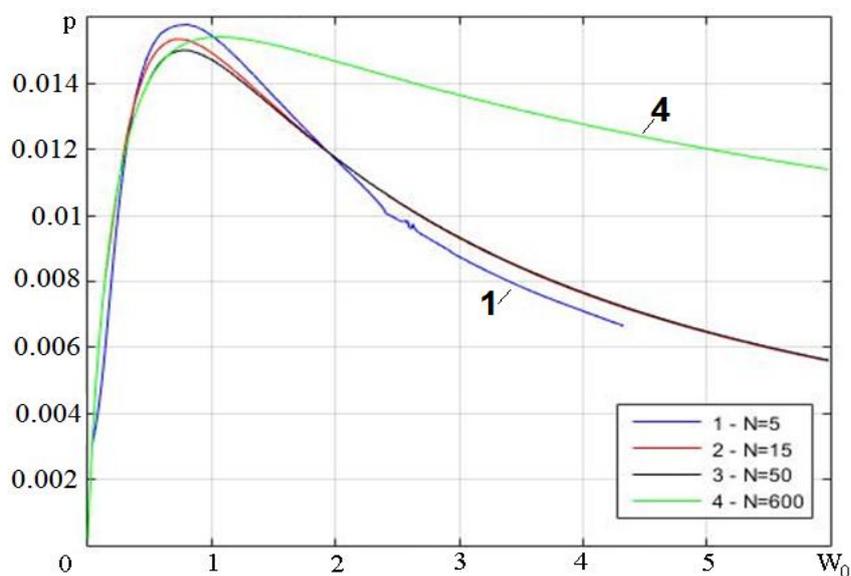


Рис. 8. Диаграмма нагружения при расчете основного напряженного состояния по уравнениям равновесия деформированной оболочки (параметр продолжения Н.В. Валишвили)

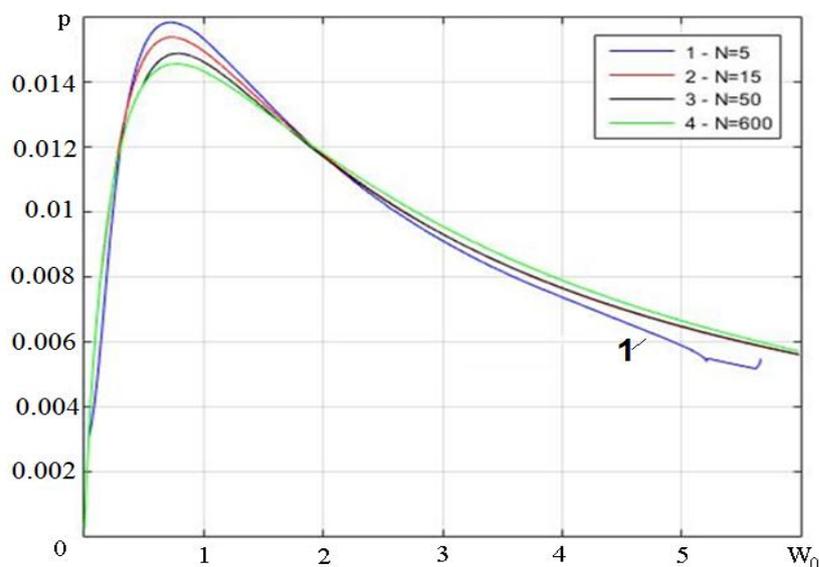


Рис. 9. Диаграмма нагружения при расчете основного напряженного состояния по физическим соотношениям (параметр продолжения Н.В. Валишвили)

Анализируя рис. 7-9, можно сделать следующие выводы:

- 1) Результаты решения задачи о раздувании полусферы зависят от граничных условий на ее экваторе, а также от способа расчета основного напряженного состояния и числа шагов по параметру, на которых проводится регуляризация системы уравнений;
- 2) Слишком малое число шагов регуляризации может привести к потере устойчивости счета, а неоправданно большое – к неверному решению задачи;
- 3) Так как наименьший разброс кривых на приведенных графиках характерен для расчета основного напряженного состояния по физическим соотношениям, следует рекомендовать именно этот способ при решении задач теории мягких оболочек при больших деформациях.

Необходимо подчеркнуть, что, судя по проведенным исследованиям, при решении сильно нелинейных задач следует проверять применимость любых ранее выработанных рекомендаций в каждом конкретном случае. Так, предположение о независимости результатов решения задачи о раздувании полусферы с подвижным закреплением края от области и способа регуляризации соотношений теории мягких оболочек может оказаться неверным при использовании подхода В.И. Шалашилина к выбору параметра продолжения решения. Графики, подтверждающие указанный тезис, представлены на рис. 10-12 для трех описанных выше способов расчета основного напряженного состояния оболочки в порядке, аналогичном представлению графиков на рис. 7-9. На каждом рисунке приведены диаграммы нагружения, полученные при числе шагов по параметру, на которых проводилась регуляризация системы уравнений, равном 5, 15 и 37 соответственно номерам кривых. Здесь 37 шагов по параметру продолжения, выбранному с использованием подхода В.И. Шалашилина, соответствуют использованию системы уравнений технической теории мягких оболочек на всём интервале решения задачи. Цифрой 4 обозначена диаграмма нагружения для аналитического решения задачи.

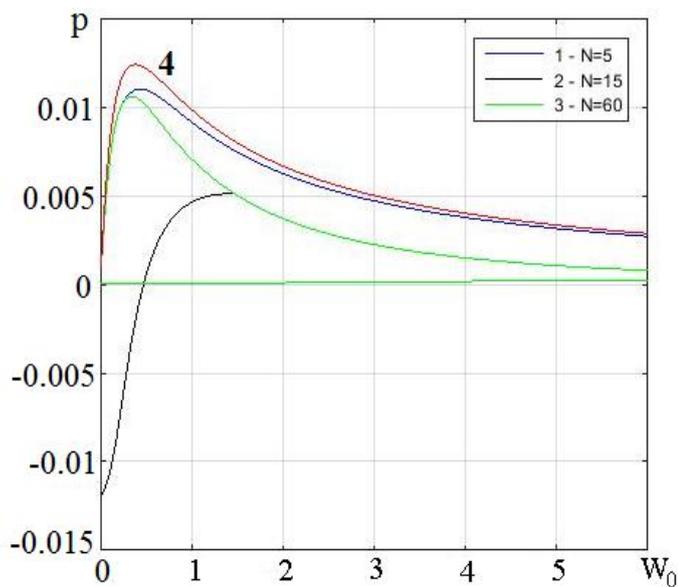


Рис. 10. Диаграмма нагружения при расчете основного напряженного состояния по уравнениям равновесия недеформированной оболочки (параметр продолжения В.И. Шалашилина)

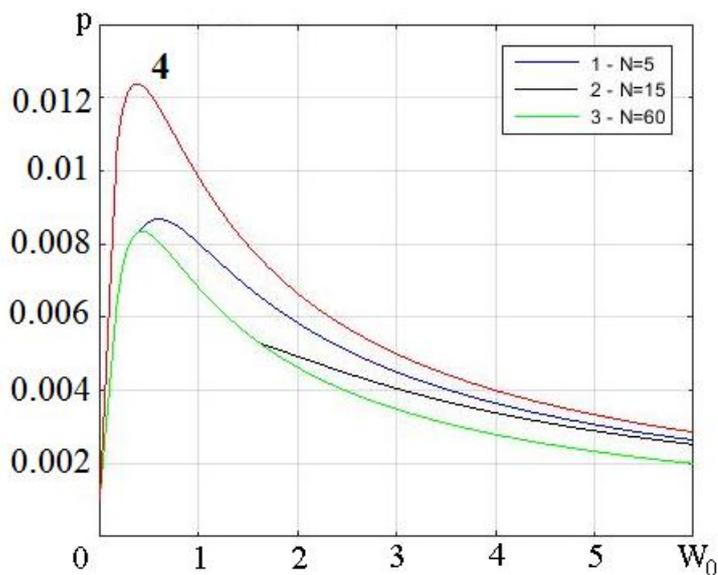


Рис. 11. Диаграмма нагружения при расчете основного напряженного состояния по уравнениям равновесия деформированной оболочки (параметр продолжения В.И. Шалашилина)

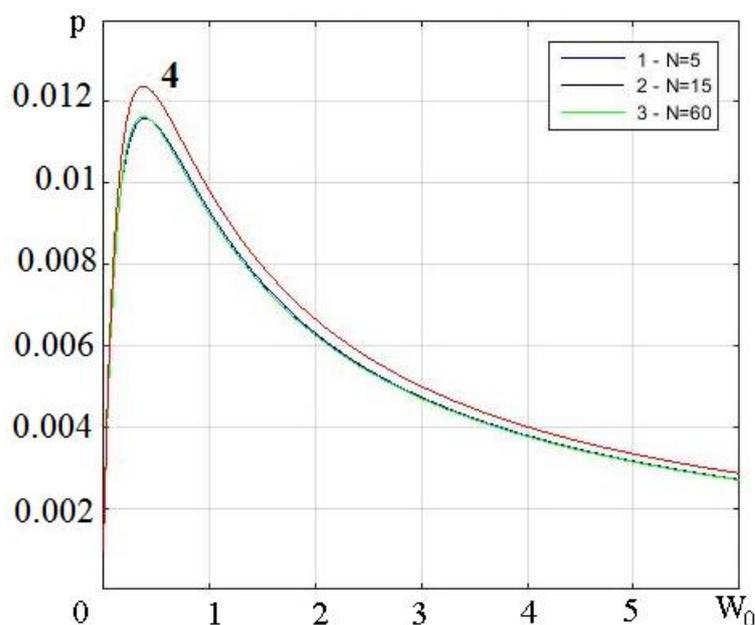


Рис. 12. Диаграмма нагружения при расчете основного напряженного состояния по физическим соотношениям (параметр продолжения В.И. Шалашилина)

Очевидно, что при выборе параметра продолжения в форме, предложенной В.И. Шалашилиным, выводы об отсутствии влияния величины области и способа регуляризации соотношений теории мягких оболочек на результаты решения рассматриваемой задачи, сделанные при выборе параметра продолжения в соответствии с подходом Н.В. Валишвили, несправедливы. При этом прослеживается характер поведения решения, аналогичный выявленному по рис. 10-12: наименьший разброс кривых при разной величине области регуляризации соответствует способу расчета основного напряженного состояния по физическим соотношениям, что позволяет считать указанный способ наиболее корректным для использования при решении задач.

Заключение

Исследование влияния различных параметров вычислительного алгоритма и исходных данных задачи на результат решения даже простейших задач теории мягких оболочек при больших деформациях выявило существенную, трудно предсказуемую его зависимость от рассмотренных параметров. По-видимому, аналитическое исследование этого влияния неосуществимо, и при решении задач анализа напряженно-деформированного состояния, сопровождающегося большими перемещениями и деформациями, нельзя ограничиваться одним способом реализации выбранного алгоритма решения либо назначения его параметров. Необходимо исследование поведения решения задачи в широком диапазоне изменения возможных параметров алгоритма, а при отсутствии аналитического решения показателем достоверности получаемых результатов может являться их повторяемость при различных величинах назначаемых параметров. Возможно, подобные численные эксперименты могут и должны проводиться по методике, аналогичной методам экспериментальной механики, а установление свойств того или иного алгоритма в применении к решению того или иного типа задач подобно определению механических свойств материалов при различных типах напряженно-деформированного состояния.

Библиографический список

1. Трямкин А.В., Емельянов Ю.Н. Математическая модель процесса торможения объекта десантирования парашютно-реактивной системой // Труды МАИ. 2000. № 1. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=34731>
2. Трямкин А.В., Скиданов С.Н. Исследование процесса наполнения парашютных систем // Труды МАИ. 2001. № 3. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=34686>
3. Чуркин В.М., Попов Д.А., Серпичева Е.В. Анализ колебаний парашютных систем, вызванных пульсацией купола // Труды МАИ. 2002. № 7. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=34618>
4. Чуркин В.М. Вынужденные колебания парашютной системы с упругими стропами // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=63004>
5. Ридель В.В., Гулин Б.В. Динамика мягких оболочек. – М.: Наука, 1990. – 205 с.
6. Рахматулин Х.А. Теория осесимметричного парашюта. Ч. 1 // Труды института механики МГУ. 1975. Вып. 35. С. 3 - 35.
7. Гимадиев Р.Ш. Динамика мягких оболочек парашютного типа. – Казань: Казанский государственный энергетический университет, 2006. – 208 с.
8. Магула В.Э. Судовые эластичные конструкции. – Л.: Судостроение, 1978. – 263 с.
9. Друзь Б.И., Друзь И.Б. Теория мягких оболочек. – Владивосток: Изд-во Морской государственный университет, 2003. – 381 с.
10. Ермолов В.В. Воздухоопорные здания и сооружения. – М.: Стройиздат, 1980. – 304 с.

11. Ким А.Ю. Итерационный метод приращений параметров для расчета нелинейных мембранно-пневматических систем с учетом упругой работы воздуха: Дисс. ... д.т.н. – Саратов, 2005. – 568 с.
12. Zubov L.M., Sheidakov D.N. Instability of a hollow elastic cylinder under tension, torsion and inflation // Journal of Applied Mechanics, 2008, vol. 75. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2723824>
13. Fu Y.B., Pearce S.P., Liu K.K. Post-bifurcation analysis of a thin-walled hyperelastic tube under inflation // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2008, vol. 43, pp. 697 - 706. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2008.03.003](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.03.003)
14. Aranda-Iglesias D., Vadillo G., Rodríguez-Martínez J.A. Oscillatory behaviour of compressible hyperelastic shells subjected to dynamic inflation: a numerical study // Acta Mechanica, 2017, vol. 228, pp. 2187 - 2205.
15. Verron E., Khayat R., Derdouri S., Peseux B. Dynamic inflation of hyperelastic spherical membranes // Journal of Rheology, 1999, vol. 43, pp. 1083 - 1097.
16. Zhao Zh., Zhang W., Zhang H., Yuan X. Some interesting nonlinear dynamic behaviors of hyperelastic spherical membranes subjected to dynamic loads // Acta Mechanica, 2019, vol. 230, pp. 3003 - 3018.
17. Beatty M.F. Small amplitude radial oscillations of an incompressible, isotropic elastic spherical shell // Mathematics and Mechanics of Solids, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 492 - 512. URL: <https://doi.org/10.1177/1081286510387407>

18. Jiusheng R. Dynamics and destruction of internally pressurized incompressible hyper-elastic spherical shells // International Journal of Engineering Science, 2009, vol. 47, pp. 745 - 753.
19. Полякова Е.В., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Осесимметричная деформация мягкой армированной нитями тороидальной оболочки // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2011. № 3. С. 131 - 142.
20. Papargyri-Pegiou S., Stavrakakis E. Axisymmetric numerical solutions of a thin-walled pressurized torus of incompressible nonlinear elastic materials // Computers and Structures, 2000, vol. 77, pp. 747 - 757. URL: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00021-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00021-3)
21. Dneprov I.V., Ponomarev A.T., Radchenko A.V. The stress-strain state of soft shells of arbitrary shape // Journal of Mathematical Sciences, 1994, vol. 72, no.5, pp. 3293 - 3298.
22. Колесников А.М. Большие деформации высокоэластичных оболочек: Дисс. ... к.ф.-м.н. – Ростов-на-Дону, 2006. – 115 с.
23. Мокин Н.А., Кустов А.А., Ганджунцев М.И. Численное исследование собственных частот и форм колебаний воздухоопорных сооружений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 4. С. 337 – 347. DOI: [10.22363/1815-5235-2018-14-4-337-347](https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-4-337-347)
24. Selvadurai A.P.S. Deflections of a rubber membrane // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2006, vol. 54, pp. 1093 – 1119. DOI: [10.1016/j.jmps.2006.01.001](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2006.01.001)

25. Suh J.B., Gent A.N., Kelly S.G. Shear of rubber tube springs // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2007, vol. 42, pp. 1116 – 1126. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2007.07.002>
26. Коровайцева Е.А. Смешанные уравнения теории мягких оболочек // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109235>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-1](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1)
27. Усюкин В.И. Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 1. С. 70 – 75.
28. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // Доклады АН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 601 - 602.
29. Холл Д., Уатт Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциалы уравнений. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
30. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1976. – 278 с.
31. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. – М.: Наука, 1988. – 231 с.

On some features of soft shells of revolution static problems solution at large deformations

Korovaytseva E.A.

Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University,

1, Michurinsky prospect, Moscow, 119192, Russia

e-mail: katrell@mail.ru

Abstract

The presented work demonstrates specifics of thin-walled structures mechanics at strong nonlinearity problems solution computational algorithms realization by an example of soft shell of revolution static inflation at the large deformations problem. The problem solution algorithm under consideration realizes the method of differentiation by parameter. The feature of the algorithm consists in using specific method of nonlinear Cauchy problem solving with right-hand side given on discrete mesh of variable step.

Studying the properties of the system of equations under consideration revealed the necessity for solution regularization preceding of the suggested algorithm realization. Thus, the initial stage of solution construction uses the well-posed system of equations of technical theory of soft shells, as its solution is close to the solution of the problem being considered, but without having a poor stipulation.

Analysis of various parameters of computational algorithm or properties of soft shells theory equations impact on calculation results cannot be performed in analytical form. Thus, for these issues studying numerical experiments concerning solution of hemisphere bloating problem with different conditions of the edge fixation are used. Physical properties of shell material are supposed to be described by Treloar relations. For

the obtained results illustration only loading diagrams as pressure-deflection curves are used.

The effect of the following parameters of the computational algorithm on the computational results was studied. These were the preliminary internal pressure magnitude, solution continuation parameter selection; the magnitude of initial and maximum allowable solution continuation parameter step; the number of parameter steps on which solution regularization was used; the ways of stress state calculation at developing the resolving system of equations.

It is worth mentioning that in the presented work, apparently for the first time, the author managed to obtain the value of deflection of the soft hemispherical shell, being inflated, $w_0=35R$ (where R is the radius of the non-deformed shell) only in 60 solution continuation parameter steps. The maximum value of deflection herewith obtained prior to the loss in calculation stability reaches 10^8R . In this case the solution error is equal to 5%, and the number of solution continuation parameter steps is 280.

A significant, difficult-to-predict dependence of computational results on the algorithm parameters mentioned above was revealed, up to obtaining wrong results. Thus, setting a miniscule value of the preliminary pressure may lead to the convergence problem of the solution correction right at the first step. An excessively large value of the step by the parameter leads to significant distortion of the results, while a too small one leads to the computation stability loss. Conclusions on the effect of basic stress state computing method and a number of steps by the parameter, at which the system of equations regularization is performed, may appear different for various boundary conditions at sphere equator and various methods of the solution continuation parameter selection.

Thus, judging by the performed studies, when solving problems of the stress-strain state, being followed by large displacements and deformations analysis, applicability checking of any `previously developed recommendations concerning calculations in each concrete case is necessary. Realization of the selected solution algorithm or parameters assignment should not be restricted by only one method. Studying the problem solution behavior in a wide range of possible changes of the algorithm parameters is necessary; and in the absence of analytical solution, the repetitiveness of the results at various values of the assigned parameters can be the indicator of the obtained results certainty. Probably, such numerical experiments may and should be performed by the technique similar to the methods of experimental mechanics, and properties determining of this or that algorithm in application to the solution of this or that type of problems is similar to determining mechanical properties of materials at various types of the stress-strain state.

Keywords: soft shell, high-elastic material, large deformations, nonlinear boundary value problem, method of differentiation by parameter.

References

1. Tryamkin A.V., Emel'yanov Yu.N. *Trudy MAI*, 2000, no. 1. URL: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=34731>
2. Tryamkin A.V., Skidanov S.N. *Trudy MAI*, 2001, no. 3. URL: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=34686>
3. Churkin V.M., Popov D.A., Serpicheva E.V. *Trudy MAI*, 2002, no. 7. URL: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=34618>

4. Churkin V.M. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=63004>
5. Ridel' V.V., Gulin B.V. *Dinamika myagkikh obolochek* (Dynamics of Soft Shells), Moscow, Nauka, 1990, 205 p.
6. Rakhmatulin Kh.A. *Trudy instituta mekhaniki MGU*, 1975, no. 35, pp. 3 - 35.
7. Gimadiev R.Sh. *Dinamika myagkikh obolochek parashyutnogo tipa* (Dynamics of Parachute Type Soft Shells), Kazan', Kazanskii gosudarstvennyi energeticheskii universitet, 2006, 208 p.
8. Magula V.E. *Sudovye elastichnye konstruktsii* (Ship Elastic Structures), Leningrad, Sudostroenie, 1978, 263 p.
9. Druz' B.I., Druz' I.B. *Teoriya myagkikh obolochek* (Theory of Soft Shells), Vladivostok, Izd-vo Morskoi gosudarstvennyi universitet, 2003, 381 p.
10. Ermolov V.V. *Vozdukhoopornye zdaniya i sooruzheniya* (Air-supported Buildings and Structures), Moscow, Strojizdat, 1980, 304 p.
11. Kim A.Yu. *Iteratsionnyi metod prirashchenii parametrov dlya rascheta nelineinykh membranno-pnevmaticheskikh sistem s uchetom uprugoi raboty vozdukha* (Iterative Method of Parameter Increment for Calculation of Nonlinear Membrane Pneumatic Systems with Account for Air Elastic Impact), Doctor's thesis, Saratov, SGAU, 2005, 568 p.
12. Zubov L.M., Sheidakov D.N. Instability of a hollow elastic cylinder under tension, torsion and inflation, *Journal of Applied Mechanics*, 2008, vol. 75. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2723824>

13. Fu Y.B., Pearce S.P., Liu K.K. Post-bifurcation analysis of a thin-walled hyperelastic tube under inflation, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, vol. 43, pp. 697 - 706. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2008.03.003](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.03.003)
14. Aranda-Iglesias D., Vadillo G., Rodríguez-Martínez J.A. Oscillatory behaviour of compressible hyperelastic shells subjected to dynamic inflation: a numerical study, *Acta Mechanica*, 2017, vol. 228, pp. 2187 - 2205.
15. Verron E., Khayat R., Derdouri S., Peseux B. Dynamic inflation of hyperelastic spherical membranes, *Journal of Rheology*, 1999, vol. 43, pp. 1083 - 1097.
16. Zhao Zh., Zhang W., Zhang H., Yuan X. Some interesting nonlinear dynamic behaviors of hyperelastic spherical membranes subjected to dynamic loads, *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, pp. 3003 - 3018.
17. Beatty M.F. Small amplitude radial oscillations of an incompressible, isotropic elastic spherical shell, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 492 - 512. URL: <https://doi.org/10.1177/1081286510387407>
18. Jiusheng R. Dynamics and destruction of internally pressurized incompressible hyperelastic spherical shells, *International Journal of Engineering Science*, 2009, vol. 47, pp. 745 - 753.
19. Polyakova E.V., Tovstik P.E., Filippov S.B. *Vestnik SPbGU. Ser. 1*, 2011, no. 3, pp. 131 - 142.
20. Papargyri-Pegiou S., Stavrakakis E. Axisymmetric numerical solutions of a thin-walled pressurized torus of incompressible nonlinear elastic materials, *Computers and Structures*, 2000, vol. 77, pp. 747 - 757. URL: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00021-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00021-3)

21. Dneprov I.V., Ponomarev A.T., Radchenko A.V. The stress-strain state of soft shells of arbitrary shape, *Journal of Mathematical Sciences*, 1994, vol. 72, no.5, pp. 3293 - 3298.
22. Kolesnikov A.M. *Bol'shie deformatsii vysokoelastichnykh obolochek* (Large Deformations of hyperelastic shells), Candidate's thesis, Rostov-na-Donu, RGU, 2006, 115 p.
23. Mokin N.A., Kustov A.A., Gandzhuntsev M.I. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksii i sooruzhenii*, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 337 – 347. DOI: [10.22363/1815-5235-2018-14-4-337-347](https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-4-337-347)
24. Selvadurai A.P.S. Deflections of a rubber membrane, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2006, vol. 54, pp. 1093 – 1119. DOI: [10.1016/j.jmps.2006.01.001](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2006.01.001)
25. Suh J.B., Gent A.N., Kelly S.G. Shear of rubber tube springs, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, vol. 42, pp. 1116 – 1126. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2007.07.002>
26. Korovaitseva E.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109235>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-1](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1)
27. Usyukin V.I. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1976, no. 1, pp. 70 – 75.
28. Davidenko D.F. *Doklady AN SSSR*, 1953, vol. 88, no. 4, pp. 601 - 602.
29. Khol D., Uatt D. *Sovremennye chislennye metody resheniya obyknovennykh differentsialy uravnenii* (Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations), Moscow, Mir, 1979, 312 p.
30. Valishvili N.V. *Metody rascheta obolochek vrashcheniya na EDC* (Methods for Shells of Rotation Calculation Using EDC), Moscow, Mashinostroenie, 1976, 278 p.

31. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. *Problemy nelineinogo deformirovaniya*. (Problems of Nonlinear Deforming), Moscow, Nauka, 1988, 232 p.