

Расчет оптимальных параметров трёхслойной сферической панели при выполнении ограничений по прочности и прогибам

Гуань Шивэй, А. А. Дудченко, А. И. Ендогур

В статье проводится анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойной сферической панели под собственным весом, прикрепленной к кольцу. На основе анализа НДС, с использованием ограничений по прогибам и напряжениям, определяется оптимальное положение кольца и оптимальные параметры панели и кольца при отклонении оси вращения оболочки в пределах от вертикального положения до горизонтального.

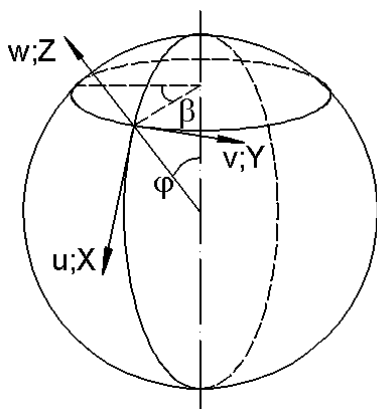
Рассматриваемая конструкция близка по своей структуре к антенным системам, которые представляют собой обычно оболочечные формы разной конфигурации. Например, радиотелескоп может иметь форму сферической или параболической оболочки. В качестве зеркала радиотелескопа оболочка имеет крупногабаритную конструкцию, которая требует малых отклонений от заданной идеальной формы отражающей поверхности при действующих нагрузках. Например, точность изготовления профиля зеркала вместе с перемещениями от собственного веса должна быть не больше величины $\Delta\rho = \frac{\lambda}{16}$ [1]. Где $\Delta\rho$ — отклонение формы зеркала от расчетной, λ — длина волны. Если взять $\lambda = 1$ мм, то $\Delta\rho = 0.0625$ мм. Поэтому, при проектировании конструкции минимальной массы необходимо, чтобы удовлетворялись ограничения по прочности, жесткости и др., а также конструктивно-технологические ограничения (расположение опоры, толщина обшивок, толщина сот, технологические отклонения при изготовлении от требуемой формы).

Рассмотрим сферическую оболочку. Пусть δ — толщина несущих слоев оболочки, H — величина разноса несущих слоев, R — радиус ее срединной поверхности. Полная система расчетных дифференциальных уравнений для сферической оболочки записывается в виде следующих двух независимых дифференциальных уравнений [2]:

$$\frac{h^2 k^2}{12(1-\nu^2)} [(\nabla^2 + 1)^2 + 1](\nabla^2 + 2)w =$$

$$= \frac{1}{Ehk^3} \left\{ \frac{1+\nu}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (BX) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AY) \right] + (1+\nu)kZ - \nabla^2 \left[\frac{h^2 k^2}{12AB} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (BX) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AY) \right) - kZ \right] \right\}; \quad (1)$$

$$(\nabla^2 + 2)\chi = \frac{1+\nu}{Ehk^2} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (AX) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (BY) \right]. \quad (2)$$



В этих формулах $w(\varphi, \beta)$, $\chi(\varphi, \beta)$, $X(\varphi, \beta)$, $Y(\varphi, \beta)$, $Z(\varphi, \beta)$

малальное перемещение и вращение, интенсивности заданной внешней

поверхностной нагрузки на соотв. (рис. 1), $A = R$, $B = R \sin(\varphi)$, $k = 1/R$,

Рис. 1 Система координат

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sin \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right].$$

Тогда перемещения $u(\varphi, \beta)$, $v(\varphi, \beta)$ выражаются в форме [2]:

$$\left. \begin{aligned} k^2 u &= -\frac{1}{1-\nu} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta - \frac{h^2 k^3}{12} \nabla^2 w \right) + \frac{k}{A} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{B} \frac{\partial \chi}{\partial \beta} - \frac{1+\nu}{Eh} X \\ k^2 v &= -\frac{1}{1-\nu} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\theta - \frac{h^2 k^3}{12} \nabla^2 w \right) + \frac{k}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - \frac{1+\nu}{Eh} Y \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где θ — объемное расширение, и представлено следующим выражением:

$$\theta = -\frac{h^2 k^2}{12(1+\nu)} \nabla^2 (\nabla^2 + 2)kw - \frac{h(1-\nu)}{12E} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (BX) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AY) \right] - \frac{2\nu}{Ehk} Z. \quad (4)$$

Зная перемещения, можно найти все шесть компонентов деформации оболочки по формулам:

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_\varphi &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + kw, \\
\varepsilon_\beta &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \varphi} u + kw, \\
\gamma_{\varphi\beta} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{B} \right), \\
\chi_\varphi &= -k^2 w - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\
\chi_\beta &= -k^2 w - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \\
\chi_{\varphi\beta} &= -\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right].
\end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $\varepsilon_{\varphi,\beta}$ — линейные деформации, $\gamma_{\varphi\beta}$ — сдвиговые деформации, $\chi_{\varphi,\beta}$, $\chi_{\varphi\beta}$ — изменения кривизны. Определив по формулам (5) все шесть компонентов деформации сферической оболочки, мы можем затем найти нормальные N_φ , N_β и сдвиговое $N_{\varphi\beta}$ усилия, а также соответствующие моменты M_φ , M_β , $M_{\varphi\beta} = M_{\beta\varphi}$ по формулам:

$$\left. \begin{aligned}
N_\varphi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_\beta), \\
N_\beta &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\beta + \nu\varepsilon_\varphi), \\
N_{\varphi\beta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma_{\varphi\beta}, \\
M_\varphi &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [\chi_\varphi + \nu\chi_\beta + K(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_\beta)], \\
M_\beta &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [\chi_\beta + \nu\chi_\varphi + K(\varepsilon_\beta + \nu\varepsilon_\varphi)], \\
M_{\varphi\beta} &= \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} (2\chi_{\varphi\beta} + kw).
\end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Поперечные силы Q_1 , Q_2 можно записать в форме:

$$\left. \begin{aligned} Q_\varphi &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (AM_{\varphi\beta}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\varphi\beta} - \frac{\partial}{\partial \varphi} (BM_\varphi) + \frac{\partial B}{\partial \varphi} M_\varphi \right] \\ Q_\beta &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (BM_{\varphi\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \varphi} M_{\varphi\beta} - \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_\beta) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\varphi \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Общее решение уравнений (1) и (2) получено способом, изложенным в работе [2], частные решения соответствуют нагрузкам, действующим на оболочку.

Проведем расчет по определению НДС в конструкции, выполненной в форме сферической панели, изображенной на рис. 2. Пусть трёхслойная сферическая оболочка крепится к кольцу, опёртому либо непрерывно по ν с точеч. Оболочка

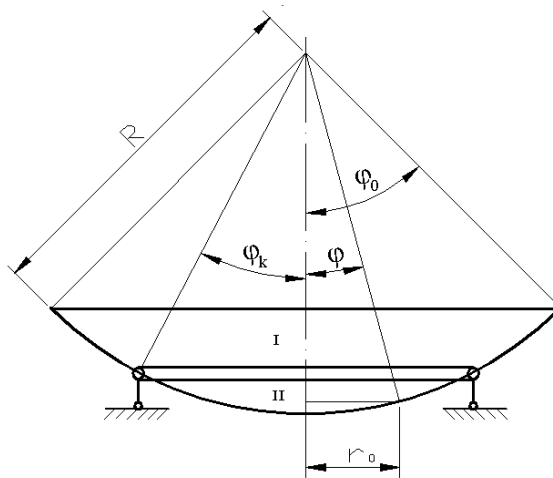


Рис. 2 Модель конструкции

находится под действием только собственного веса. Рассмотрим расчет сферической оболочки при вертикальном положении оси вращения (рис. 2), когда задача является осесимметричной. Тогда проекции весовой функции в координатах панели будут иметь вид: $X = -q \sin \varphi$, $Y = 0$, $Z = q \cos \varphi$, где q — вертикальная нагрузка, приходящаяся на единицу площади поверхности и представляющая собой заданную постоянную величину. Примем, что опорное кольцо может располагаться в пределах $0 < \varphi_k < \varphi_0$, где φ_0 — угол раствора сферической панели. Положение

координаты кольца φ_k будет определяться из условия $w_{\max} \leq \Delta\rho$, где w_{\max} учитывает конструктивно-технологические ограничения.

Запишем граничные условия. В случае свободного края при $\varphi = \varphi_0$ имеем:

$$N_\varphi = 0, M_\varphi = 0, Q_\varphi = 0, N_{\varphi\beta} = 0.$$

Точки соединений оболочек с кольцом запишутся

$$\eta_I = \eta_{II} = 0, v_I = v_{II} = 0, \delta_I = \delta_{II} = v_k, \vartheta_I = \vartheta_{II} = \vartheta_k,$$

где индексы I и II относятся к соответствующим частям оболочки, а индекс k соответствует кольцу (рис. 2). Здесь вертикальное перемещение оболочек $\eta_{I,II} = v_{I,II} \sin \varphi_k - w_{I,II} \cos \varphi_k$,

горизонтальное перемещение оболочек $\delta_{I,II} = v_{I,II} \cos \varphi_k + w_{I,II} \sin \varphi_k$, угол поворота оболочек

$$\vartheta_{I,II} = (v_{I,II} - \frac{\partial w_{I,II}}{\partial \varphi}) / R, \quad \text{перемещение} \quad \text{кольца}$$

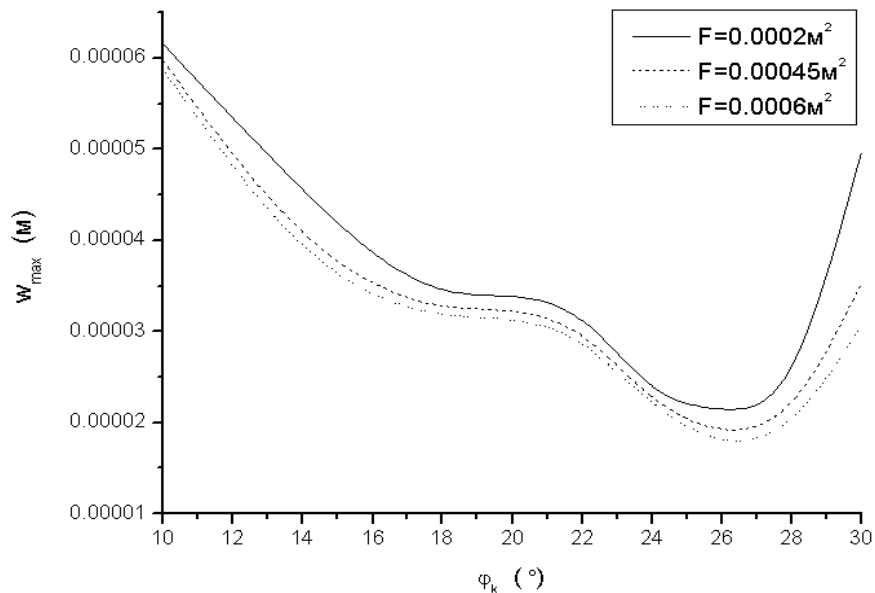
$$v_k = \frac{r_0^2 (N_{\varphi II} \cos(\varphi_k) + Q_{\varphi II} \cos(\varphi_k) - N_{\varphi I} \cos(\varphi_k) - Q_{\varphi I} \cos(\varphi_k))}{EF_k}, \quad \text{угол} \quad \text{поворота} \quad \text{кольца}$$

$$\vartheta_k = r_0^2 (M_{\varphi II} \cos(\varphi_k) - M_{\varphi I} \cos(\varphi_k)) / EI_k, \quad F_k - \text{поперечная площадь, а } I_k - \text{момент инерции кольца.}$$

Для рассматриваемых крупногабаритных панелей отношение толщины к радиусу меньше 1/50, поэтому при расчете справедливы гипотезы Киргхоффа-Лява.

Проведем расчет и анализ полученных результатов сферической панели при следующих её параметрах: радиус оболочки $R = 5$ м, толщины несущих слоев лежат в пределах $1 \leq \delta \leq 2$ мм, величины разнеса несущих слоев меняются в пределах $10 \leq H \leq 20$ мм, параметры опорного кольца $2 \leq F_k \leq 10 \text{ см}^2$, $0 \leq I_k \leq \infty$, материал оболочки и опорного кольца имеет модуль упругости $E = 7.2 \times 10^4$ МПа.

Вначале пол
ограничения



выполнении
ведем при

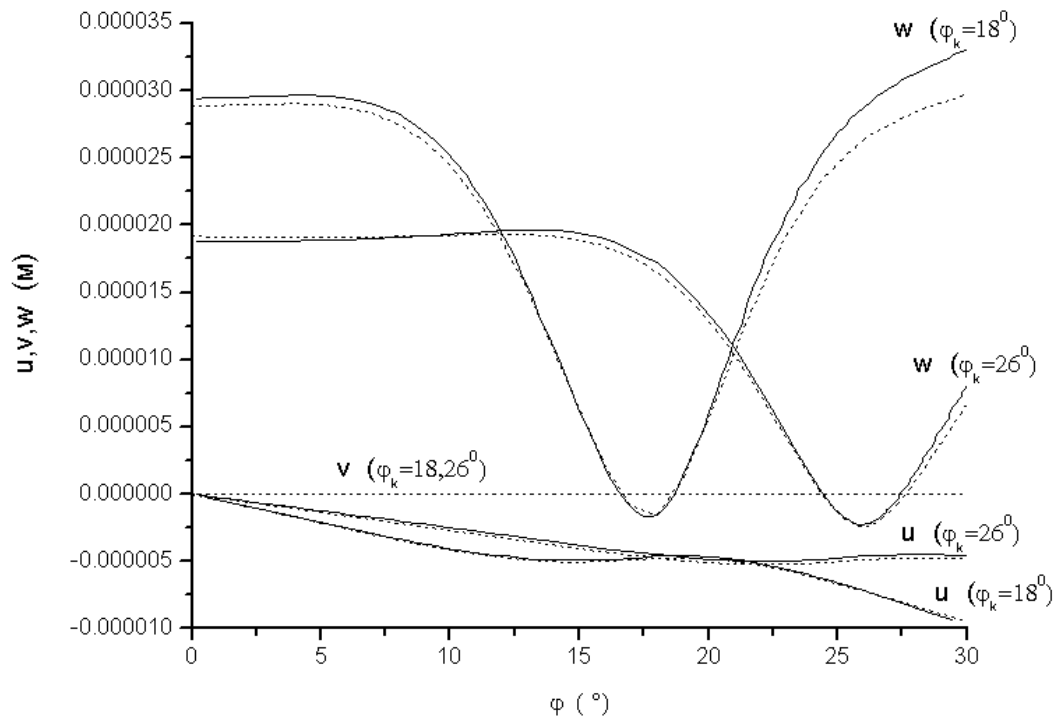
Рис. 3 Влияние положения кольца на

следующих значениях параметров: $\rho = 2500\text{ кг/м}^3$, $\sigma = 20\text{ МПа}$, $\lambda_k = 1, 2, 3, 4, 5, 6\text{ см}^2$, $I_k = 1.88 \times 10^{-7}\text{ м}^4$.

Данные расчеты приведены на рис. 3. Они показывают, что наименьшее w_{\max} будет реализовано при $\varphi_k = 26^\circ$. Однако, если учитывать возможности технологии изготовления и уменьшения числа соединений отдельных панелей в оболочке, можно использовать другое положение кольца $\varphi_k = 18^\circ$, при котором также выполняется ограничение $w_{\max} \leq \Delta\rho$. Кроме того (рис. 3), видно, что увеличение площади сечения опорного кольца больше $F = 4.5\text{ см}^2$ не рационально, т.к. это увеличение мало влияет на значение w_{\max} и увеличивает вес конструкции.

Определим характер изменения перемещений u , v , w в оболочке при принятых параметрах оболочки и $F_k = 4.5\text{ см}^2$ для вариантов расположения кольца $\varphi_k = 18^\circ$, $\varphi_k = 26^\circ$. Характер

перемещений показан на рис. 4. Результаты численного эксперимента с помощью программы “NASTRAN” показаны пунктирной линией.

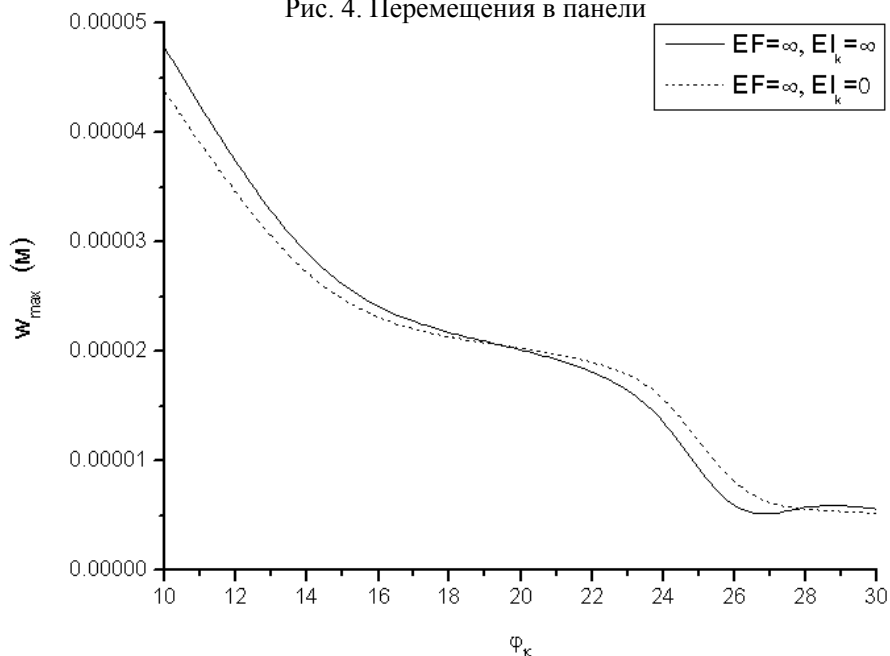


На рис. 5 значения $\varphi_0 = 30^\circ$.

а EI_k , при $\delta = 2\text{мм}$,

На рис. 5 по вертикали, при оболочке w в зоне разница величин чтобы упростить расчетный случай отклоненное

Рис. 4. Перемещения в панели



ельно прогиб, что этому имеем ся на

Рис. 5 Влияние жесткости кольца на максимальный прогиб

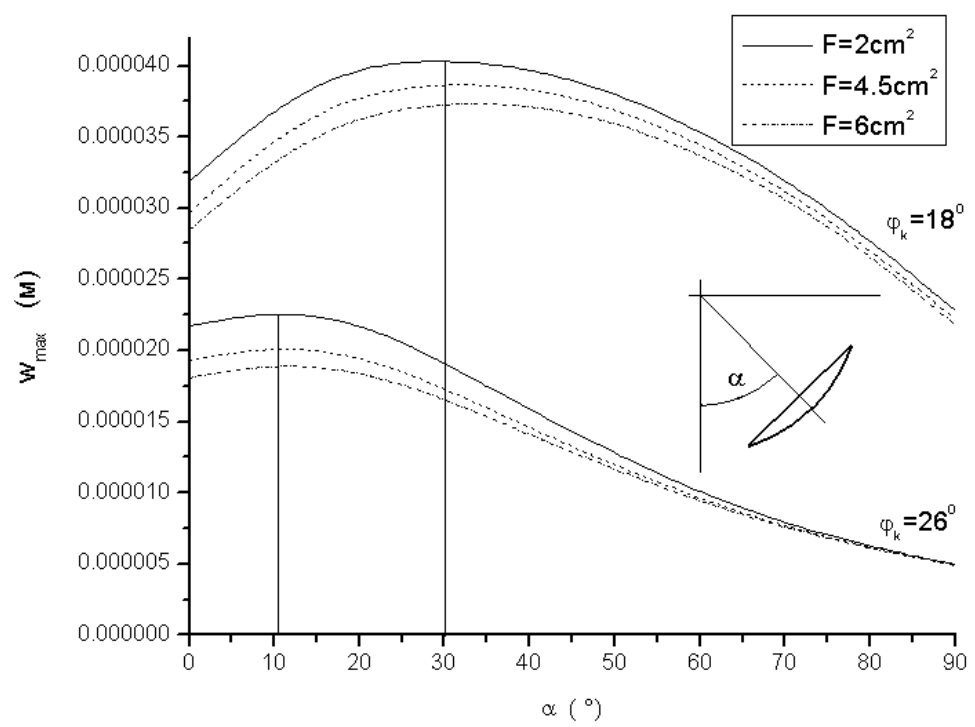
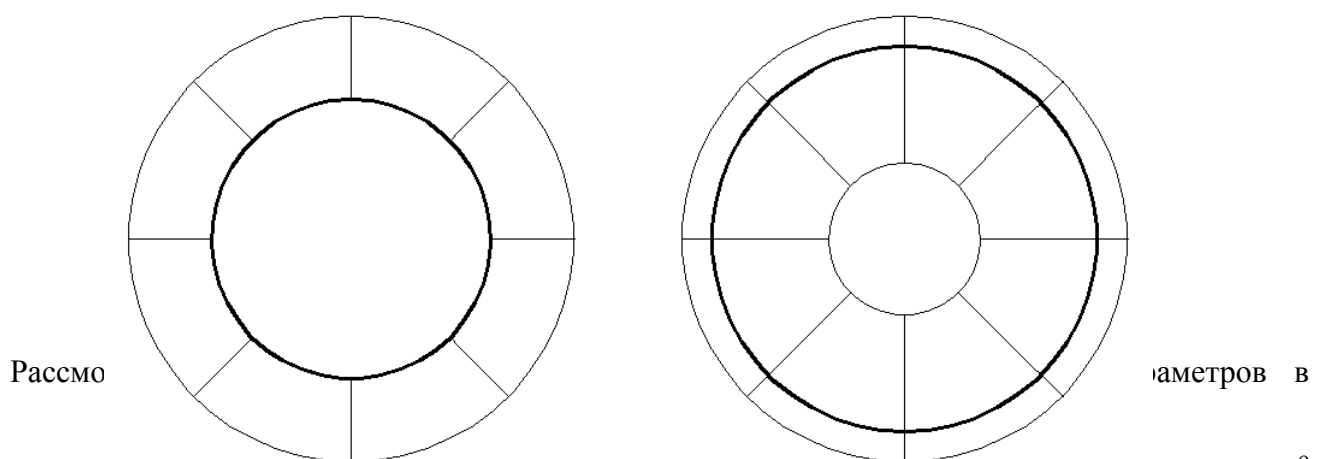


Рис. 6 Влияние поворота оси сферы на

положение $\alpha = 30^\circ$. Видно, что в обоих случаях максимальные прогибы не превышают максимально допустимые отклонения значений w_{\max} , и оба положения опорного кольца могут быть реализованы в конструкции.



$\varphi_{\text{к}} = 18^\circ$ $\varphi_{\text{к}} = 26^\circ$
Рис. 7 Варианты членения оболочки

конструкции, например, как зеркало радиотелескопа. Обычно зеркало радиотелескопа имеет

крупне

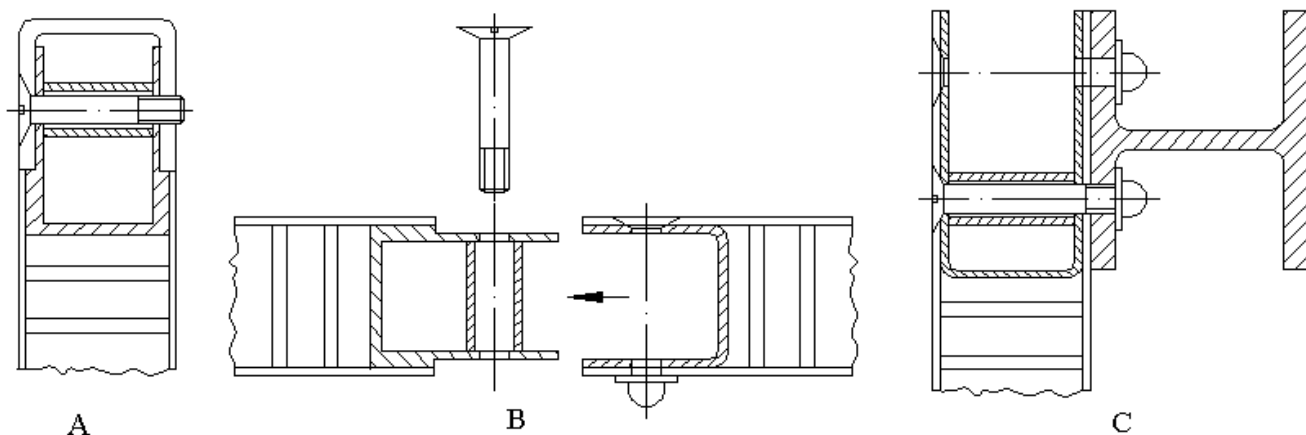


Рис. 8 Типы конструкций соединений

разделить технологическими разрезами на части, которые соединяются между собой через силовые элементы. Для упрощения расчетов пренебрежем влиянием узлов соединения элементов на форму конфигурации, но учтем их вес. Дополнительный вес силовых элементов равномерно распределяем по поверхности оболочки. С учетом влияния положения опоры на максимальный прогиб (рис. 3) делим поверхность оболочки на панели, как показано на рис. 7. Кольца при этом занимают положение $\varphi_k = 26^\circ$ или $\varphi_k = 18^\circ$. Типы узлов соединения панелей показаны на рис. 8.

В таблице 1 приведены результаты вычисления весов, максимальных прогибов и величин эквивалентных напряжений при варьировании параметрами оболочки (толщины несущих слоев, величины разноса несущих слоев, площади поперечного сечения кольца) с учетом ограничений по прогибам при ограничениях по прогибам. Результаты расчетов весов и максимальных прогибов оболочки при $\varphi_k = 26^\circ$ приведены в таблице 1. Отличие этих же параметров в случаях положения кольца $\varphi_k = 18^\circ$ и $\varphi_k = 26^\circ$ показаны в таблице 2. В таблицах 1 и 2 δ — толщина обшивки, $H_{об}$

— толщина сот, F_k — площадь сечения кольца, $G_{об}$ — вес панели, $G_{дон}$ — дополнительный вес балки, G_k — вес кольца, G — общий вес конструкции, σ_1 — максимальное главное напряжение. Из таблицы 1 и 2 можем выбрать необходимые оптимальные параметры панели и кольца с учетом технологических факторов.

Расчет весов и максимальных прогибов

Таблица 1

δ	$H_{об}$	F	W_{max}	σ_1	$G_{об}$	$G_{дон}$	G_k	G
ММ	ММ	ММ ²	М	КГ/ММ ²	Н	Н	Н	Н
1	10	200	3.07E-05	0.0159	654.36	191.1	75.6	921.06
1	10	400	2.51E-05	0.0165	654.36	191.1	151.2	996.66
1	10	600	2.24E-05	0.017	654.36	191.1	226.8	1072.26
1	10	800	2.11E-05	0.0173	654.36	191.1	302.4	1147.86
1	10	1000	2.02E-05	0.0176	654.36	191.1	378	1223.46
1	15	200	2.94E-05	0.0114	698.04	210.7	75.6	984.34
1	15	400	2.48E-05	0.0113	698.04	210.7	151.2	1059.94
1	15	600	2.18E-05	0.0112	698.04	210.7	226.8	1135.54
1	15	800	1.97E-05	0.0112	698.04	210.7	302.4	1211.14
1	15	1000	1.82E-05	0.0112	698.04	210.7	378	1286.74
1	20	200	2.98E-05	0.0125	741.72	246.4	75.6	1063.72
1	20	400	2.55E-05	0.0123	741.72	246.4	151.2	1139.32
1	20	600	2.26E-05	0.0123	741.72	246.4	226.8	1214.92
1	20	800	2.07E-05	0.0122	741.72	246.4	302.4	1290.52
1	20	1000	1.92E-05	0.0122	741.72	246.4	378	1366.12
1.6	10	200	2.95E-05	0.013	994.56	191.1	75.6	1261.26
1.6	10	400	2.54E-05	0.0136	994.56	191.1	151.2	1336.86
1.6	10	600	2.25E-05	0.014	994.56	191.1	226.8	1412.46
1.6	10	800	2.04E-05	0.0143	994.56	191.1	302.4	1488.06
1.6	10	1000	1.91E-05	0.0146	994.56	191.1	378	1563.66
1.6	15	200	2.73E-05	0.0098	1038.24	210.7	75.6	1324.54
1.6	15	400	2.41E-05	0.0098	1038.24	210.7	151.2	1400.14
1.6	15	600	2.17E-05	0.0096	1038.24	210.7	226.8	1475.74
1.6	15	800	1.99E-05	0.0095	1038.24	210.7	302.4	1551.34
1.6	15	1000	1.85E-05	0.0095	1038.24	210.7	378	1626.94
1.6	20	200	2.69E-05	0.0107	1081.92	246.4	75.6	1403.92
1.6	20	400	2.40E-05	0.0105	1081.92	246.4	151.2	1479.52
1.6	20	600	2.18E-05	0.0103	1081.92	246.4	226.8	1555.12
1.6	20	800	2.01E-05	0.0102	1081.92	246.4	302.4	1630.72
1.6	20	1000	1.88E-05	0.0102	1081.92	246.4	378	1706.32
2	10	200	2.89E-05	0.0118	1221.36	191.1	75.6	1488.06
2	10	400	2.55E-05	0.0124	1221.36	191.1	151.2	1563.66
2	10	600	2.29E-05	0.0128	1221.36	191.1	226.8	1639.26
2	10	800	2.09E-05	0.0131	1221.36	191.1	302.4	1714.86
2	10	1000	1.94E-05	0.0134	1221.36	191.1	378	1790.46
2	15	200	2.63E-05	0.0094	1265.04	210.7	75.6	1551.34

2	15	400	2.37E-05	0.0093	1265.04	210.7	151.2	1626.94
2	15	600	2.16E-05	0.0094	1265.04	210.7	226.8	1702.54
2	15	800	2.00E-05	0.0094	1265.04	210.7	302.4	1778.14
2	15	1000	1.87E-05	0.0094	1265.04	210.7	378	1853.74
2	20	200	2.57E-05	0.01	1308.72	246.4	75.6	1630.72
2	20	400	2.34E-05	0.0098	1308.72	246.4	151.2	1706.32
2	20	600	2.15E-05	0.0097	1308.72	246.4	226.8	1781.92
2	20	800	2.00E-05	0.0096	1308.72	246.4	302.4	1857.52
2	20	1000	1.88E-05	0.0096	1308.72	246.4	378	1933.12

Параметры и вес оболочки при $\varphi_k = 18^\circ$ и $\varphi_k = 26^\circ$

Таблица 2

φ_k °	α °	δ мм	$H_{об}$ мм	F мм ²	W_{max} м	σ_1 кг/мм ²	$G_{об}$ Н	$G_{доп}$ Н	G_k Н	G Н
26	0	1	15	400	2.48E-05	0.0113	698.04	210.7	151.2	1059.94
26	10	1	15	400	2.60E-05	0.0113	698.04	210.7	151.2	1059.94
26	30	1	15	400	2.28E-05	0.0113	698.04	210.7	151.2	1059.94
18	0	1	15	400	3.67E-05	0.0113	698.04	147.2	108	953.24
18	10	1	15	400	4.68E-05	0.0113	698.04	147.2	108	953.24
18	30	1	15	400	4.86E-05	0.0113	698.04	147.2	108	953.24

В соответствии с проведенными расчетами можно сделать следующие выводы:

1. Выбранный для расчета и проектирования оболочки аналитический подход был полностью оправдан и подтвержден численным экспериментом с помощью программы "NASTRAN". Такой подход существенно экономит время при проведении проектировочных расчетов и обеспечивает необходимую точность проводимым расчетам.
2. Найдены оптимальные положения опор, при которых обеспечивается необходимое условие минимума прогиба w при обеспечении условия минимума массы.
3. Показано, что величина площади сечения кольца не влияет на его оптимальное положение (рис. 3).
4. Изменение изгибной жесткости кольца EI_k мало влияет на изменение величин прогиба оболочки (рис. 5).
5. Изменение площади сечения кольца мало влияет на различие в величинах прогибов и максимальное положение максимальных прогибов при отклонении вертикальной оси оболочки (рис 6).
6. Использование трехслойной панели позволяет уменьшить общий вес конструкции.

Определена конструктивно применимая минимальная масса конструкции 92,1 кг при

$$w_{\max} = 3.07 \times 10^{-5} \text{ m (таблица 1)}.$$

Список литературы

1. Воскресенский Д.И. и др. Антенны и устройства СВЧ. – М.: МАИ, 1999. - 528 с.
2. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.: Гостехиздат, 1949.-784 с.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. - 636 с.
4. Рекач В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. – М.: Высшая школа, 1973. - 384 с.
5. Дудченко А.А. Оптимальное проектирование элементов авиационных конструкций из композиционных материалов. – М.: МАИ, 2002.- 83 с.
6. Ендогур А.И. и др. Сотовые конструкции. Выбор параметров и проектирование. – М.: Машиностроение, 1986.- 200 с.
7. Еанкина Н. А. Радиотелескопы и радиометры. – М.: Наука, 1973. -415с.
8. Христиансен У., Хёгбом И. Радиотелескопы. – М.: Мир, 1988. -303с.
9. Гуань Шивэй, Дудченко А. А., Ендогур А. И. Проектирование оптимальных трёхслойных конструкций цилиндрической формы. // Электронный журнал «Труды МАИ», вып 15. – <http://www.mai.ru> (25.03.2004)

Сведения об авторах

Гуань Шивэй, доцент Пекинского авиационно-космического университета, аспирант кафедры строительной механики и прочности Московского авиационного института (государственного технического университета).

Телефон: 745-28-23-1022, E-mail: guanshiwei@msn.com.

Дудченко Александр Александрович, профессор кафедры строительной механики и прочности Московского авиационного института (государственного технического университета) , д.т.н.

Телефон: 1584277.

Ендогур Аскольд Иванович, профессор кафедры проектирования самолетов Московского авиационного института (государственного технического университета) , д.т.н.

Телефон: 1584865.