УДК: 531.5

Исследование резонансных колебаний математического маятника переменной длины

Красильников П.С., Сторожкина Т.А.

Исследуются линейные и нелинейные колебания математического маятника переменной длины, с помощью которого моделируют отдельные тона волновых движений жидкости в топливных баках ЛА. Показано, что нелинейная замена времени в уравнении линейных колебаний маятника приводит его к виду уравнения Матье, получено приближенное аналитическое решение этого уравнения при резонансе. Рассмотрены также нелинейные уравнения колебаний, содержащие члены третьего порядка малости. Построена амплитудно - частотная характеристика резонансных колебаний, показано, что амплитуда колебаний принимает конечное значение, в отличие от неограниченных значений линейного приближения.

Ключевые слова: параметрические колебания; резонанс; устойчивость равновесия; уравнение Матье

Введение. Линейные параметрические колебания при резонансе

Известно [1,2], что исследование волновых движений жидкости в топливных баках ракетоносителей основано на изучении колебаний совокупности эквивалентных математических маятников, при этом каждый маятник моделирует свой (n-ый) тон колебаний. Медленное изменение параметров системы и параметров внешнего воздействия ведет, при определенных условиях, к раскачке колебаний (параметрическому резонансу). Классическая маятниковая модель работает в этом случае плохо, поэтому требуется ее уточнение.

Статья посвящена изучению колебаний модифицированной модели, когда длины эквивалентных математических маятников меняются со временем по гармоническому закону, что позволяет исследовать резонансные эффекты волновых движений жидкости. Указанная модель применима, например в том случае, когда градиент массовых сил, воздействующих на ЛА, эволюционирует со временем.

Рассмотрим задачу о движении математического маятника переменной длины $l(t)$ (см. рис. 1). Длина маятника меняется периодически за счет того, что точка А совершает принудительные колебания с частотой ν и амплитудой a. Несмотря на широкую известность задачи строгое аналитическое исследование нелинейных колебаний маятника не проводилось. Известны описания его малых колебаний, когда, на основе приближенного анализа уравнения Матье, делается вывод об устойчивости тривиального положения равновесия [3, 4] в первом приближении и указываются резонансные соотношения, приводящие к параметрической неустойчивости. В недавно опубликованной работе [5] исследуется линейная устойчивость равновесия в строгой постановке на основе численных и приближенно аналитических расчетов периодических краевых задач. Показано, что диаграмма устойчивости отличается от классической диаграммы Айнса-Стретта, которую обычно используют при приближенном исследовании устойчивости равновесия маятника.

Проводились также исследования колебаний маятника, когда его длина меняется по формуле $l = l(\varepsilon t), \varepsilon << 1$ [6], получена зависимость амплитуды колебаний от длины маятника. В монографии [7] колебания такого маятника изучались для случая, когда скорость dl/dt изменения его длины зависит от обобщенной координаты и скорости $\varphi, \dot{\varphi}$ и длины l.

Исследуем параметрические колебания маятника при резонансе 1:2 как в линейной, так и нелинейной постановке, получим новые приближенные решения, описывающие колебания маятника.

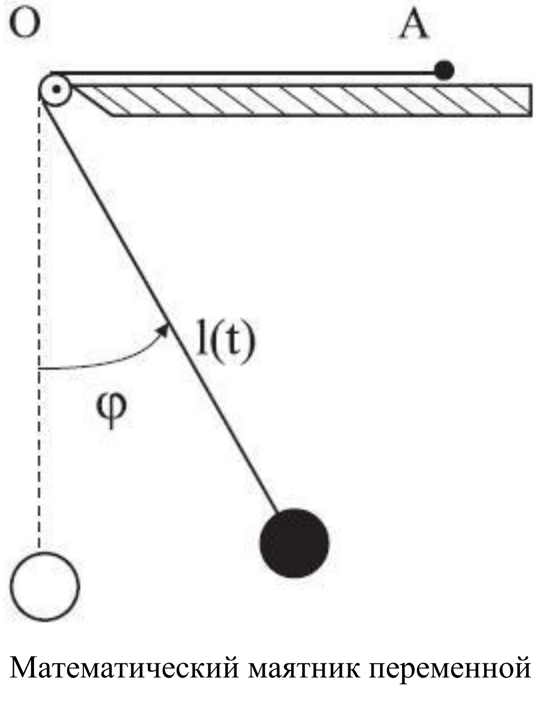

Рис. 1: Математический маятник переменной длины

Из теоремы об изменении кинетического момента следует, что уравнения вращения маятника около оси, проходящей через точку О, можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(ml^2(t)\dot{\varphi}) = -mgl(t)\sin\varphi. \qquad (1),$$

где φ - угловое отклонение от вертикали, m - масса маятника, $l(t)$ - его длина. После вычисления производной левой части, имеем

$$ml^2(t)\ddot{\varphi} + 2ml(t)\dot{\varphi}\frac{dl}{dt} + mgl(t)\sin\varphi = 0.$$

Для того чтобы привести уравнение колебаний к виду, не содержащему обобщенную скорость $\dot{\varphi}$, преобразуем равенство (1) с помощью замены времени $t \to \tau$:

$$d\tau = \frac{dt}{l^2(t)}.$$

Тогда уравнение колебаний примет вид:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \omega^2(\tau)\sin y = 0 \qquad (2)$$

Здесь $\omega^2(\tau) = gl^3(t(\tau))$ – периодическая функция τ, $y(\tau) = \varphi(t(\tau))$.

В случае малых колебаний, когда $y = \varepsilon \cdot x$, $y'' = \varepsilon \cdot x''$, $\varepsilon << 1$, имеем, с точностью до членов второго порядка малости по ε, линейное уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \omega^2(\tau)x = 0.$$

Считаем, что длина маятника мало меняется по сравнению со средней длиной l_0:

$$l = l_0\left(1 + \frac{a}{l_0}\cos(\nu t)\right), \quad a << l_0$$

Это значит, что параметр a/l_0 является малой величиной. Положим $\mu = a/l_0$.

Найдем явную зависимость $t(\tau)$ с точностью до членов второго порядка малости по μ. С этой целью подынтегральную функцию, входящую в формулу

$$\tau = \int_0^t \frac{ds}{l_0^2(1+\mu\cos(\nu s))^2}$$

в ряд по μ и проинтегрируем:

$$l_0^2\nu\tau = t\nu - 2\mu\sin(t\nu) + O(\mu^2)$$

Это равенство, если отбросить члены второго порядка малости по μ и рассматривать его как уравнение относительно νt, является уравнением Кеплера. Его решение представим рядом Лагранжа, сходящимся при $2\mu \le 0.662\ldots$:

$$\nu t(\mu,\tau)=l_0^2\nu\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}\left(\sin^n\varsigma\right)}{d\varsigma^{n-1}}\cdot(2\mu)^n,\ \varsigma=l_0^2\nu\tau$$

С точностью до членов второго порядка малости по μ, имеем:

$$t\nu=l_0^2\nu\tau+2\mu\sin(l_0^2\nu\tau)$$

Приближенное уравнение колебаний маятника примет вид:

$$x''+\omega_0^2(1+3\mu\cos(l_0^2\nu\tau))x=0,\qquad \omega_0^2=gl_0^3 \qquad (3)$$

Линейное уравнение (3) с периодическим по τ коэффициентом является уравнением Матье. Исследуем его при параметрическом резонансе, когда частота изменения коэффициента равна удвоенной собственной частоте колебаний, т.е. $l_0^2\nu=2\omega_0$. Несложно видеть, что этот резонанс имеет наглядный физический смысл: частота изменения длины $l(t)$ равна удвоенной собственной частоте колебаний маятника с фиксированной длиной нити l_0 :

$$\nu=2\sqrt{\frac{g}{l_0}} \qquad (4)$$

Если уравнение (3) записать в виде

$$x''+\omega_0^2x=-3\omega_0^2\mu\cos(l_0^2\nu\tau)x,$$

тогда периодический член уравнения Матье можно трактовать как внешнюю силу, воздействующую на линейный осциллятор. Используя малость $\mu=a/l_0$, можем считать, что в первом приближении угол x меняется по закону $x=\alpha\cos(\omega_0\tau)$. Подставляя это выражение в правую часть последнего равенства и преобразуя произведение косинусов с учетом резонансного соотношения, получим

$$x''+\omega_0^2x=-\frac{3\omega_0^2\mu\alpha}{2}(\cos(\omega_0\tau)+\cos(3\omega_0\tau))$$

Отсюда уже следует, что резонанс (4) ведет к нарастанию параметрических колебаний, поскольку в правой части присутствует резонансный член $\cos(\omega_0\tau)$. Однако такой анализ уравнения (3) является грубым, так как он справедлив только для малых значений амплитуды α невозмущенных колебаний $x=\alpha\cos(\omega_0\tau)$. Строгое решение уравнения с периодическим коэффициентом можно вычислить, используя теорию Флоке. Однако получить с помощью этой теории аналитическое решение возможно только в исключительных случаях, когда известно нормальное фундаментальное семейство решений. Для уравнения (3) такое семейство решений выражается через специальные функции Матье.

Для построения решения в конечном виде воспользуемся следующим приближенным подходом. Будем искать решение уравнения (3) в тригонометрической форме

$$x=\alpha(\tau)\cos(\omega_0\tau)+\beta(\tau)\sin(\omega_0\tau),$$

где $\alpha(\tau),\beta(\tau)$ – неизвестные функции τ. Подставим это выражение в уравнение (3). После преобразований получим следующее равенство:

$$(\beta'' - 2\alpha'\omega_0)\sin(\omega_0\tau) + (\alpha'' + 2\beta'\omega_0)\cos(\omega_0\tau) +$$
$$+\frac{3\omega_0^2\mu}{2}\cdot[\alpha(\cos(\omega_0\tau)+\cos(3\omega_0\tau)) + \beta((\sin(3\omega_0\tau) - \sin(\omega_0\tau))] = 0.$$

Отбросим члены, содержащие $\cos(3\omega_0\tau), \sin(3\omega_0\tau),$ так как, в силу нерезонансности, они мало влияют на характер колебаний. Такое упрощение дифференциальных уравнений представляет собой операцию усреднения, которая подавляет осциллирующие члены, мало влияющие на вековую составляющую движений.

В результате, приравнивая нулю коэффициенты при разных гармониках, получим следующие уравнения относительно α и β:

$$\alpha'' + 2\beta'\omega_0 + \frac{3\mu\omega_0^2}{2}\alpha = 0, \qquad \beta'' - 2\alpha'\omega_0 - \frac{3\mu\omega_0^2}{2}\beta = 0. \qquad (5)$$

Ищем их решение в виде

$$\alpha = A_1\exp\{\lambda\tau\}, \qquad \beta = A_2\exp\{\lambda\tau\}.$$

Подставляя эти функции в уравнения (5), получим

$$(\lambda^2 + 3\mu\omega_0^2/2)A_1 + 2\omega_0\lambda A_2 = 0$$
$$-2\omega_0\lambda A_1 + (\lambda^2 - 3\mu\omega_0^2/2)A_2 = 0.$$

Отсюда следует, что искомые нетривиальные решения существуют только в том случае, когда определитель этой системы равен нулю, т.е. λ является корнем характеристического уравнения

$$\lambda^4 + 4\omega_0^2\lambda^2 - \omega_0^4(3\mu/2)^2 = 0.$$

Решая это уравнение относительно λ, получим два чисто мнимых корня

$$\lambda_{1,2} = \mp\frac{1}{2}\omega_0\sqrt{-8-2\sqrt{16+9\mu^2}}$$

и два действительных корня

$$\lambda_{3,4} = \mp\frac{1}{2}\omega_0\sqrt{-8+2\sqrt{16+9\mu^2}}$$

Общее решение системы уравнений (4) имеет вид

$$\alpha_i = \sum_{i=1}^{4} C_i\exp\{\lambda_i\tau\}, \quad \beta_i = \sum_{i=1}^{4} C_i\gamma_i\exp\{\lambda_i\tau\}, \quad \gamma_i = \frac{4\omega_0\lambda_i}{2\lambda_i^2 - 3\omega_0^2\mu}.$$

Таким образом, колебания по x неограниченно возрастают по экспоненте из-за наличия в структуре решения $\alpha(\tau), \beta(\tau)$, функции $\exp\{\lambda_4\tau\}$, $\lambda_4 > 0.$

Для того, чтобы получить вещественное решение $x(\tau)$, необходимо выделить действительную часть комплексных решений уравнений (5). Опуская промежуточные выкладки, получим:

$$\alpha(\tau) = (C_1 + C_2)\cos(\omega_* \tau) + C_3 e^{\lambda_3 \tau} + C_4 e^{\lambda_4 \tau},$$

$$\beta(\tau) = (C_1 + C_2)\frac{4\omega_0 \omega_*}{2\omega_*^2 + 3\omega_0^2 \mu}\sin(\omega_* \tau) - \frac{4\omega_0 \lambda_4}{2\lambda_4^2 - 3\omega_0^2 \mu}\left(C_3 e^{\lambda_3 \tau} - C_4 e^{\lambda_4 \tau}\right)$$

Из этого вывода следует, что при параметрическом резонансе колебания должны нарастать до бесконечности. В действительности же наблюдаются периодические колебания при параметрическом резонансе, поэтому изложенные результаты не объясняют существование ограниченных резонансных движений. Дело в том, что с увеличением амплитуды колебаний существенную роль играют нелинейные члены, имеющие порядок малости ε^2, $\varepsilon^3, \ldots$, и отброшенные при выводе уравнения (3). Это значит, что вопрос о существовании и устойчивости периодических режимов при параметрическом резонансе относится к нелинейной теории колебаний.

Нелинейные параметрические колебания

Исследуем дифференциальное уравнение (2) с учетом членов третьего порядка малости по ε (ε - мера отклонения фазовой точки (y, y') от положения равновесия).

Как и ранее, положим $y = \varepsilon x$, $y' = \varepsilon x'$. Подставим эти переменные в уравнения (2) и разложим его в ряд по ε:

$$\varepsilon x'' + \omega^2(\tau)\sin \varepsilon x = 0$$

Удержим в полученном уравнении члены до третьего порядка и сократим на ε:

$$x'' + \omega^2(\tau)\left(x - \frac{\varepsilon^2 x^3}{6}\right) = 0.$$

Разложим квадрат частоты ω^2 в ряд по μ до членов порядка μ включительно:

$$\omega^2(\tau) = g l_0^3 (1 + \mu\cos(t\nu))^3 = g l_0^3 (1 + 3\mu\cos(t\nu)).$$

Зависимость $t(\tau)$ найдена выше: $t\nu = l_0^2 \nu\tau + 2\mu\sin(l_0^2 \nu\tau)$.

Положим $\varepsilon^2 = \mu$, будем иметь

$$x'' + g l_0^3 (1 + 3\mu\cos(l_0^2 \nu\tau))\left(x - \frac{\mu x^3}{6}\right) = 0.$$

Раскроем скобки и отбросим слагаемые порядка μ^2. Получим следующее уравнение:

$$x'' + g l_0^3 (1 + 3\mu\cos(l_0^2 \nu\tau))x - \mu g l_0^3 \frac{x^3}{6} = 0, \quad \mu << 1. \qquad (6)$$

Исследуем уравнение (6) методом усреднения. Для этого запишем решение порождающего уравнения $(\mu = 0)$ через амплитуду α и фазу β:

$$\begin{cases} x = \alpha\cos\beta, \quad \beta = \omega_0(\tau + \tau_0) \\ x' = -\alpha\omega_0 \sin\beta \end{cases}$$

Введем замену переменных $x, x' \to \alpha, \beta$ на основе этих формул. Составим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют неизвестные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$. После преобразований получим

$$\begin{cases} -\alpha'\omega_0 \sin\beta - \alpha\omega_0\beta'\cos\beta + \omega_0^2\alpha\cos\beta = \mu\cdot f(\alpha\cos\beta) \\ \alpha'\cos\beta - \alpha\beta'\sin\beta + \alpha\omega_0\sin\beta = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$f(x) = \omega_0^2\frac{x^3}{6} - 3\omega_0^2\cos(l_0^2\nu\tau)x$$

Приведем систему (7) к виду одночастотной системы уравнений. Для этого следует исключить величины α' и β' из равенств (7):

$$\begin{cases} \alpha' = -\dfrac{\mu}{\omega_0}\sin\beta\cdot f(\alpha\cos\beta) \\ \beta' = \omega_0 - \dfrac{\mu}{\alpha\omega_0}\cos\beta\cdot f(\alpha\cos\beta), \end{cases} \tag{8}$$

Здесь

$$f(x) = \omega_0^2\frac{x^3}{6} - 3\omega_0^2\cos(l_0^2\nu\tau)x.$$

Положим $z = l_0^2\nu\tau$ (z – новая переменная), приведем уравнения колебаний (8) к виду двухчастотной системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha' = \mu\left(-\dfrac{\omega_0}{12}\alpha^3\sin 2\beta\cos^2\beta + \dfrac{3}{2}\omega_0\alpha\cos z\sin 2\beta\right) \\ \beta' = \omega_0 + \mu\left(-\dfrac{\omega_0}{6}\alpha^2\cos^4\beta + 3\omega_0\cos z\cos^2\beta\right) \\ z' = l_0^2\nu. \end{cases} \tag{9}$$

Вычислим с помощью MAPLE временное среднее от правых частей первого и второго уравнений многочастотной системы (9) вдоль быстрых движений $\beta = \omega_0\tau + \beta_{10}$, $z = l_0^2\nu\tau$ невозмущенной системы (9) $(\mu = 0)$:

$$\bar{X}_1(\alpha,\beta_{10}) =$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(-\frac{\omega_0}{12}\alpha^3\sin(2\omega_0\tau+2\beta_{10})\cos^2(\omega_0\tau+\beta_{10})+1{,}5\omega_0\alpha\cos(l_0^2\nu\tau)\sin(2\omega_0\tau+2\beta_{10})\right)d\tau =$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{24T(2\omega_0+l_0^2\nu)(l_0^2\nu-2\omega_0)}\cdot(\alpha^2\cos^4\beta_{10}(4\omega_0^2-l_0^4\nu^2)-\alpha^2\cos^4(\omega_0T+\beta_{10})(4\omega_0^2-l_0^4\nu^2)+$$
$$+18\omega_0\cos(2\omega_0T+Tl_0^2\nu+2\beta_{10})(2\omega_0-l_0^2\nu)+18\omega_0\cos(2\omega_0T-Tl_0^2\nu+2\beta_{10})(2\omega_0+l_0^2\nu)-$$
$$-72\omega_0^2\cos 2\beta_{10})$$
$$\bar{X}_2(\alpha,\beta_{10}) =$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(-\frac{\omega_0}{6}\alpha^2\cos^4(\omega_0\tau+\beta_{10})+3\omega_0\cos(l_0^2\nu\tau)\cos^2(\omega_0\tau+\beta_{10})\right)d\tau =$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{\alpha^2(l_0^4\nu^2-4\omega_0^2)}{192T(2\omega_0+l_0^2\nu)(l_0^2\nu-2\omega_0)}\cdot(\sin 4\beta_{10}+8\sin 2\beta_{10}-\sin(4\omega_0T+4\beta_{10})-$$
$$-8\sin(2\omega_0T+2\beta_{10})-12\omega_0T)+$$
$$+\lim_{T\to\infty}\frac{3\omega_0}{4T(2\omega_0+l_0^2\nu)(l_0^2\nu-2\omega_0)}\cdot(\sin(l_0^2\nu T-2\omega_0T-2\beta_{10})(l_0^2\nu+2\omega_0)+$$
$$+\sin(l_0^2\nu T+2\omega_0T+2\beta_{10})(l_0^2\nu-2\omega_0))+$$
$$+\lim_{T\to\infty}\frac{3\omega_0}{2T(2\omega_0+l_0^2\nu)(l_0^2\nu-2\omega_0)l_0^2\nu}\cdot(2l_0^2\nu\sin 2\beta_{10}+\sin(l_0^2\nu T)(l_0^4\nu^2-4\omega_0^2))$$

Видно, что временное среднее терпит разрыв при резонансе

$$l_0^2\nu = 2\omega_0. \qquad (10)$$

Исследуем колебания в окрестности параметрического резонанса (10). В этом случае резонансная расстройка $\Delta = 2\omega_0 - l_0^2\nu$ есть величина малая, порядка μ. Введем вместо β медленную переменную

$$2\theta = 2\beta - z.$$

Запишем систему уравнений (9) в переменных α,θ,z:

$$\begin{cases} \alpha' = \mu\left(-\frac{\omega_0}{12}\alpha^3\sin(2\theta+z)\cos^2(\theta+0{,}5z)+1{,}5\omega_0\alpha\cos z\sin(2\theta+z)\right) \\ \theta' = \left(\omega_0-\frac{l_0^2\nu}{2}\right)+\mu\left(-\frac{\omega_0}{6}\alpha^2\cos^4(\theta+0{,}5z)+3\omega_0\cos z\cos^2(\theta+0{,}5z)\right) \\ z' = l_0^2\nu. \end{cases} \qquad (11)$$

Видно, что производная θ' есть величина малая, порядка μ, т.к. $\left(\omega_0-\frac{l_0^2\nu}{2}\right)\sim\mu$.

Проведем усреднение системы уравнений (11) по быстрой переменной z:

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{3}{4}\mu\omega_0\alpha\sin 2\theta \\ \theta' = \left(\omega_0 - \frac{l_0^2\nu}{2}\right) - \frac{1}{16}\omega_0\alpha^2\mu + \frac{3}{4}\mu\omega_0\cos 2\theta \end{cases} \tag{12}$$

Для получения стационарных значений амплитуды и фазы колебания приравняем правые части системы (12) нулю. Получим соотношения:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\mu\omega_0\alpha\sin 2\theta = 0 \\ \left(\omega_0 - \frac{l_0^2\nu}{2}\right) - \frac{1}{16}\omega_0\alpha^2\mu + \frac{3}{4}\mu\omega_0\cos 2\theta = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{9}{16}\mu^2\omega_0^2 = \left(\frac{1}{16}\omega_0\alpha^2\mu - \left(\omega_0 - \frac{l_0^2\nu}{2}\right)\right)^2 \tag{14}$$

Из уравнения (14) найдем связь между амплитудой α частотой ν:

$$\frac{1}{16}\omega_0\alpha^2\mu - \left(\omega_0 - \frac{l_0^2\nu}{2}\right) = \pm\frac{3}{4}\mu\omega_0$$

$$\alpha^2 = \frac{16}{\omega_0\mu}\left(\left(\omega_0 - \frac{l_0^2\nu}{2}\right) \pm \frac{3}{4}\mu\omega_0\right) = \frac{8}{\omega_0}\delta \pm 12,$$

где $\delta = \frac{\Delta}{\mu}$.

Окончательно имеем

$$\alpha_1(t) = \sqrt{\frac{8}{\omega_0}\delta + 12}, \qquad \alpha_2(t) = \sqrt{\frac{8}{\omega_0}\delta - 12}. \tag{15}$$

При помощи этой зависимости строим резонансную кривую (см. рис. 2)

Найдем выражения для θ_1, θ_2 из системы уравнений (13):

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Теперь найдем выражения для β_1, β_2:

$$\beta_1 = \theta_1 + \frac{z}{2} = 0 + \frac{l_0\nu\tau}{2} = \frac{t\nu}{2} - \mu\sin(t\nu),$$

$$\beta_2 = \theta_2 + \frac{z}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{l_0\nu\tau}{2} = \frac{\pi + t\nu}{2} - \mu\sin(t\nu).$$

Тогда резонансные колебания описываются формулами

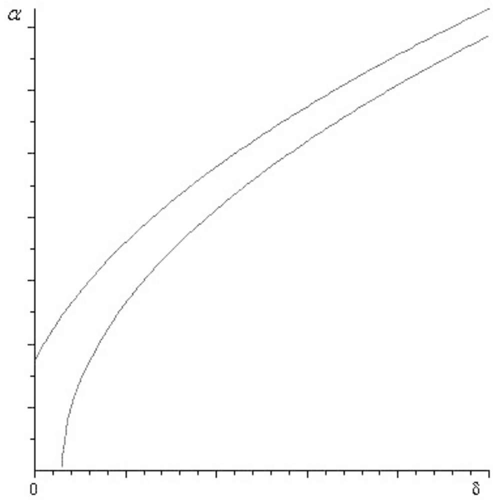

Рис. 2: Резонансная кривая

$$x_1 = \alpha_1 \cos \beta_1 = \sqrt{\frac{8}{\omega_0}\delta + 12} \cdot \cos\left(\frac{t\nu}{2} - \mu \sin(t\nu)\right),$$

$$x_2 = \alpha_2 \cos \beta_2 = \sqrt{\frac{8}{\omega_0}\delta - 12} \cdot \cos\left(\frac{\pi + t\nu}{2} - \mu \sin(t\nu)\right).$$

Таким образом, видно, что параметрические резонансные колебания носят неограниченные характер в линейном приближении, а в нелинейном приближении при любом фиксированном δ (т.е. при фиксированной частоте ν из резонансной области) амплитуда принимает конечные значения.

Литература

1. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977.
2. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет--носителей космических аппаратов. --- 2-е изд. перераб. М.: Машиностроение, 1983
3. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. Москва-Ленинград, ГИТТЛ, 1950
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., «Наука», ГРФМЛ, 1974
5. Акуленко Л.Д, Нестеров С.В. Устойчивость равновесия маятника переменной длины // ПММ. 2009. № 6. С. 893-901
6. М. Борн Лекции по атомной механике, Киев, 1934
7. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М., Изд-во МГУ, 1971, 507 с.

Сведения об авторах

Красильников Павел Сергеевич, зав. кафедрой Московского авиационного института (государственного технического университета), профессор, д.ф.-м.н.

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993; тел.: (499) 158-43-95, e-mail: krasil06@rambler.ru

Сторожкина Татьяна Александровна, студент Московского авиационного института (государственного технического университета)

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993;

тел.: 8-926-910-01-26; e-mail: st628@yandex.ru