

УДК 004.067:331.101.1

Исследование робастной устойчивости системы управления летательным аппаратом

Жуматаева Ж.Е.

Аннотация

Данная работа посвящена исследованию робастной устойчивости системы управления летательным аппаратом, построенной в классе трехпараметрических структурно-устойчивых отображений с законом управления, заданным в форме катастрофы «гиперболическая омбилика». Анализ устойчивости проводится на основе линейной аппроксимации и применении алгебраического критерия Гурвица. В работе показано, что при введении закона управления в форме катастрофы «гиперболическая омбилика» система управления движением летательного аппарата становится устойчивой к внешним возмущениям и помехам при любых неизвестных параметрах объекта управления и заданных параметрах регулятора. Полученные результаты подтверждаются численным экспериментом, проведенным на основе программного комплекса Vissim 6.0.

Ключевые слова:

устойчивость; робастность; катастрофа; стационарное состояние; критерий Гурвица; летательный аппарат

Большинство современных систем управления функционируют в условиях неопределенности. Это связано с различными факторами, такими как неточное знание математической модели объекта, старение элементов объекта при эксплуатации, при воздействии на объект внешних возмущений и т.п. Поэтому возникает необходимость построения таких автоматических систем, которые при изменяющихся параметрах объекта и влиянии внешних возмущений оставались бы не только в устойчивом состоянии, но и

обеспечивали требуемое качество функционирования. Для синтеза систем управления в условиях неопределенности разработано много методов [1-3]. При этом важную роль в теории построения систем управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости динамическими объектами играют системы с нелинейными законами управления, выбранными в классе структурно-устойчивых отображений [4], обеспечивающими им устойчивость при изменении параметров в широких пределах.

В работах Бейсенби М.А. [5], Утепебергеновой А.Т. [6], Сатыбалдиной Д.К. [7] и Тен В.В. [8] было проведено исследование динамических свойств систем управления в классе однопараметрических (катастрофа «складка»), двухпараметрических (катастрофа «сборка») и трехпараметрических (катастрофы «ласточкин хвост» и «эллиптическая омбилика») структурно-устойчивых отображений соответственно. Явное отличие заключается в том, что в первом случае имеется один управляющий параметр, во втором – два, а в третьем и четвертом три управляющих параметра соответственно, при этом в первых трех случаях одна фазовая координата, а в четвертом – две фазовые координаты. Рассмотренное в данной работе трехпараметрическое структурно-устойчивое отображение (катастрофа «гиперболическая омбилика») имеет три управляющих параметра (параметры регулятора) и две фазовые координаты, что дает больше возможностей для проектирования систем управления, в общем заключающееся в следующем:

- 1) Возможность варьирования координатами (индексами);
- 2) Расширение области устойчивости за счет появления нового управляющего параметра.

В данной работе рассмотрен подход к построению системы управления движением летательного аппарата (ЛА) (самолета) по тангажу, закон управления для которого задан в форме катастрофы «гиперболическая омбилика» [4].

Пусть летательный аппарат (ЛА) имеет постоянные, априорно-неопределенные параметры, значения которых лежат в заданной ограниченной области. Заметим, что подобная ситуация может иметь место при полете на различных режимах, когда высота, скорость и нагрузка (масса) ЛА изменяются медленно по сравнению с темпом угловых движений. Для описания динамики углового движения ЛА используем следующие линеаризованные уравнения [9]:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \omega_z(t) + a_y^\alpha \alpha(t) + a_y^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon(t) \\ \dot{\omega}_z(t) = -a_{m_z}^\alpha \alpha(t) - a_{m_z}^{\omega_z} \omega_z(t) - a_{m_z}^{\delta_\epsilon} \delta_\epsilon(t) \\ \dot{\vartheta}(t) = \omega_z(t) \end{cases} \quad (1)$$

где $\vartheta(t), \omega(t)$ - угол и угловая скорость тангажа, $\alpha(t)$ - угол атаки, $\delta_e(t)$ - угол отклонения рулей высоты; $a_y^\alpha, a_y^{\delta_e}, a_{m_z}^\alpha, a_{m_z}^{\omega_z}, a_{m_z}^{\delta_e}$ - параметры ЛА. Их значения зависят от указанных выше факторов и могут изменяться в широких пределах в зависимости от высоты и скорости полета. Точные значения параметров априорно не определены. Предполагаем также, что динамикой исполнительного органа можно пренебречь и считать, что управлением является отклонение рулей $\delta_e(t)$. В данном случае предполагается, что используется очень быстрый и практически безынерционный привод руля высоты.

Положим

$$x_1 = \vartheta(t), x_2 = \omega_z(t), x_3 = \alpha(t),$$

$$a_1 = a_{m_z}^\alpha, a_2 = a_{m_z}^{\omega_z}, a_3 = a_{m_z}^{\delta_e}, a_4 = a_y^\alpha, a_5 = a_y^{\delta_e},$$

$$u = \delta_B(t).$$

Тогда уравнения углового движения ЛА примут вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = -a_1 x_3(t) - a_2 x_2(t) - a_3 u \\ \frac{dx_3}{dt} = x_2(t) + a_4 x_3(t) + a_5 u \end{cases} \quad (2)$$

Задача состоит в выборе такого управления $u(t)$, при котором выполняется равенство:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (|x_1(t)| + |x_2(t)| + |x_3(t)|) = 0 \quad (3)$$

для любых начальных значений переменных $x_i(t_0)$

В качестве закона управления выберем

$$u = -x_1^3 - x_2^3 - k_1 x_1 x_2 + k_2 x_2 + k_3 x_1 \quad (4)$$

Выбранная управляющая функция содержит две активные переменные x_1 и x_2 . Несмотря на то, что вектор состояний содержит три компоненты, из которых в законе управления могут быть учтены только две, выбор закона управления в данном виде

достаточно целесообразен, так как управление учитывается только в двух переменных, и на третью компоненту вектор управления никакого влияния не оказывает.

Таким образом, система (2) с законом управления (4) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -a_1x_3(t) - a_2x_2(t) - a_3(-x_1^3 - x_2^3 - k_1x_1x_2 + k_2x_2 + k_3x_1) \\ \frac{dx_3}{dt} = x_2(t) + a_4x_3(t) + a_5(-x_1^3 - x_2^3 - k_1x_1x_2 + k_2x_2 + k_3x_1) \end{cases} \quad (5)$$

Структурная схема, реализованная с помощью программного комплекса Vissim 6.0, представлена на рисунке 1.

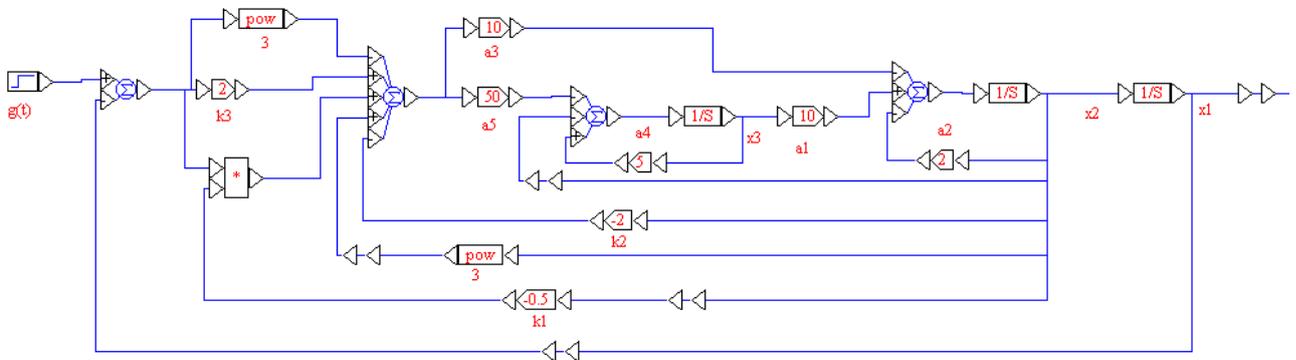


Рисунок 1

Из уравнений (5) определяем установившиеся состояния

$$\begin{aligned} x_{2S} &= 0 \\ a_3x_{1S}^3 + a_3x_{2S}^3 + a_3k_1x_{1S}x_{2S} - a_3k_3x_{1S} - (a_3k_2 + a_2)x_{2S} - a_1x_{3S} &= 0 \\ -a_5x_{1S}^3 - a_5x_{2S}^3 - a_5k_1x_{1S}x_{2S} + a_5k_3x_{1S} + (a_5k_2 + 1)x_{2S} + a_4x_{3S} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) имеет следующие стационарные состояния

$$x_{1S}^1 = 0, x_{2S}^1 = 0, x_{3S}^1 = 0 \quad (7)$$

$$x_{1S}^2 = \sqrt{k_3}, x_{2S}^2 = 0, x_{3S}^2 = 0 \quad (8)$$

$$x_{1S}^3 = -\sqrt{k_3}, x_{2S}^3 = 0, x_{3S}^3 = 0 \quad (9)$$

Исследование устойчивости стационарных состояний проводим на основе линейной аппроксимации. Для этого нелинейные члены в системе уравнений (5) разложим вокруг стационарных состояний (7)-(9) и, ограничиваясь членами первого приближения, получим

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -a_1x_3 - a_2x_2 - a_3[(-3x_{1S}^2 - k_1x_{2S} + k_3)x_1 + (-3x_{2S}^2 - k_1x_{1S} + k_2)x_2] \\ \frac{dx_3}{dt} = x_2 + a_4x_3 + a_5[(-3x_{1S}^2 - k_1x_{2S} + k_3)x_1 + (-3x_{2S}^2 - k_1x_{1S} + k_2)x_2] \end{cases} \quad (10)$$

Исследуем устойчивость стационарного состояния (7) с помощью алгебраического критерия Гурвица [10,11]. Для этого случая система (10) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -a_3k_3x_1 + (k_2 - a_2)x_2 - a_1x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = a_5k_3x_1 + (k_2 - 1)x_2 + a_4x_3 \end{cases} \quad (11)$$

Находим характеристическое уравнение системы (11).

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -a_3k_3 & k_2 - a_2 - \lambda & -a_1 \\ a_5k_3 & k_2 - 1 & a_4 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda^3 + (k_2 - a_2 + a_4)\lambda^2 - (k_2a_4 - a_2a_4 + a_1k_2 - a_1 - a_3k_3)\lambda + k_3(a_3a_4 - a_1a_5) = 0 \end{aligned}$$

Соответствующая характеристическому уравнению матрица Гурвица имеет вид

$$\Delta = \begin{pmatrix} k_2 - a_2 + a_4 & k_3(a_3a_4 - a_1a_5) & 0 \\ 1 & -k_2(a_4 + a_1) + a_3k_3 + a_2a_4 + a_1 & 0 \\ 0 & k_2 - a_2 + a_4 & k_3(a_3a_4 - a_1a_5) \end{pmatrix} \quad (12)$$

Таким образом, получаем условия устойчивости для системы (5) при стационарном состоянии (7)

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \Delta_1 = k_2 - a_2 + a_4 > 0 \\ \Delta_2 = [(-k_2(a_4 + a_1) + a_3k_3 + a_2a_4 + a_1)\Delta_1 - k_3(a_3a_4 - a_1a_5)] > 0 \\ \Delta_3 = k_3(a_3a_4 - a_1a_5)\Delta_2 > 0 \end{cases} \quad (13)$$

Ясно, что при положительных a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 для выполнения системы неравенств (13) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} a_2 - a_4 < k_2 < \infty \\ -\infty < k_3 < \infty \end{cases} \quad (14)$$

При стационарном состоянии (8) система (10) примет вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2a_3k_3x_1 - [a_2 + a_3(k_2 - k_1\sqrt{k_3})]x_2 - a_1x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -2a_5k_3x_1 + [1 + a_5(k_2 - k_1\sqrt{k_3})]x_2 + a_4x_3 \end{cases} \quad (15)$$

Характеристическое уравнение системы (15) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2a_3k_3 & -[a_2 + a_3(k_2 - k_1\sqrt{k_3}) + \lambda] & -a_1 \\ -2a_5k_3 & 1 + a_5(k_2 - k_1\sqrt{k_3}) & a_4 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= -\lambda^3 + (a_4 - a_2 - a_3(k_2 - k_1\sqrt{k_3}))\lambda^2 + [(a_2a_4 + 2a_3k_3 - a_1 + (k_2 - k_1\sqrt{k_3}) \times \\ &\times (a_3a_4 - a_1a_5)]\lambda + 2k_3(a_1a_5 - a_3a_4) = 0 \end{aligned}$$

Составив соответствующую характеристическому уравнению матрицу Гурвица, определим условия устойчивости стационарного состояния (8).

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_4 - a_2 - a_3(k_2 - k_1\sqrt{k_3}) > 0 \\ \Delta_2 = \Delta_1[2a_3k_3 + a_2a_4 - a_1 + (a_3a_4 - a_1a_5)(k_2 - k_1\sqrt{k_3})] + 2k_3(a_1a_5 - a_3a_4) > 0 \\ \Delta_3 = 2k_3(a_1a_5 - a_3a_4)\Delta_2 > 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} k_2 - k_1\sqrt{k_3} < 0 \\ k_3 > 0 \end{cases} \quad (16)$$

Исследуем устойчивость стационарного состояния (9). В этом случае система (10) примет вид

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2a_3k_3x_1 - [a_2 + a_3(k_2 + k_1\sqrt{k_3})]x_2 - a_1x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -2a_5k_3x_1 + [1 + a_5(k_2 + k_1\sqrt{k_3})]x_2 + a_4x_3 \end{cases} \quad (17)$$

Характеристическое уравнение системы (17) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2a_3k_3 & -(a_2 + a_3(k_2 + k_1\sqrt{k_3}) + \lambda) & -a_1 \\ -2a_5k_3 & a_5(k_2 + k_1\sqrt{k_3}) + 1 & a_4 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda^3 + (a_4 - a_2 - a_3(k_2 + k_1\sqrt{k_3}))\lambda^2 + [(2a_3k_3 + a_2a_4 - a_1 + (k_2 + k_1\sqrt{k_3}) \times \\ &\times (a_3a_4 - a_1a_5))\lambda] + 2k_3(a_1a_5 - a_3a_4) = 0 \end{aligned}$$

Соответствующая характеристическому уравнению матрица Гурвица имеет вид

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_4 - a_2 - a_3(k_2 + k_1\sqrt{k_3}) & 2k_3(a_1a_5 - a_3a_4) & 0 \\ -1 & 2a_3k_3 + a_2a_4 - a_1 + (k_2 + k_1\sqrt{k_3})(a_3a_4 - a_1a_5) & 0 \\ 0 & a_4 - a_2 - a_3(k_2 + k_1\sqrt{k_3}) & 2k_3(a_1a_5 - a_3a_4) \end{pmatrix}$$

Стационарное состояние (9) будет устойчиво при выполнении условий

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_4 - a_2 - a_3(k_2 + k_1\sqrt{k_3}) > 0 \\ \Delta_2 = \Delta_1[2a_3k_3 - a_1 + a_2a_4 + (k_1\sqrt{k_3} + k_2)(a_3a_4 - a_1a_5)] + 2k_3(a_1a_5 - a_3a_4) > 0 \\ \Delta_3 = 2k_3(a_1a_5 - a_3a_4)\Delta_2 > 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} k_2 + k_1\sqrt{k_3} < 0 \\ k_3 > 0 \end{cases} \quad (18)$$

Из полученных условий (14), (16) и (17) следует, что при фиксированных положительных значениях a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 система (5) является устойчивой при любых значениях, как положительных, так и отрицательных, параметров k_1, k_2, k_3 . Система, неустойчивая в одном стационарном состоянии (7)-(9), становится устойчивой в другом, и наоборот, что подтверждается результатами численного эксперимента, проведенного с помощью программного комплекса Vissim 6.0 (рисунки 2-5).

На рисунках 2-3 приведены результаты численного эксперимента, проведенного с помощью Vissim 6.0 по схеме из рисунка 1 при значении параметров $k_2 = -2, k_3 = 3, a_1 = 10, a_2 = 2, a_3 = 10, a_4 = 5, a_5 = 50$ (фиксируем), меняем $k_1 = 0.5$ и $k_1 = -0.5$.

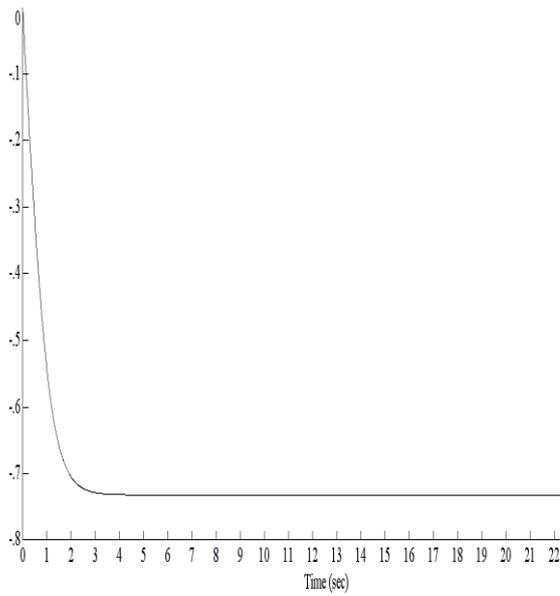


Рисунок 2

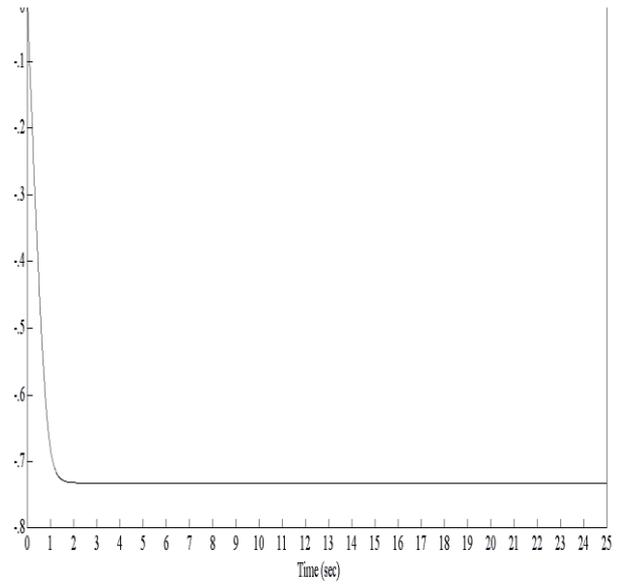


Рисунок 3

На рисунках 4-5 показаны результаты численного эксперимента, проведенного при значении параметров $k_1 = 1.5, k_3 = 7, a_1 = 10, a_2 = 2, a_3 = 10, a_4 = 5, a_5 = 50$ (фиксируем); меняем $k_2 = 2$ и $k_2 = -2$.

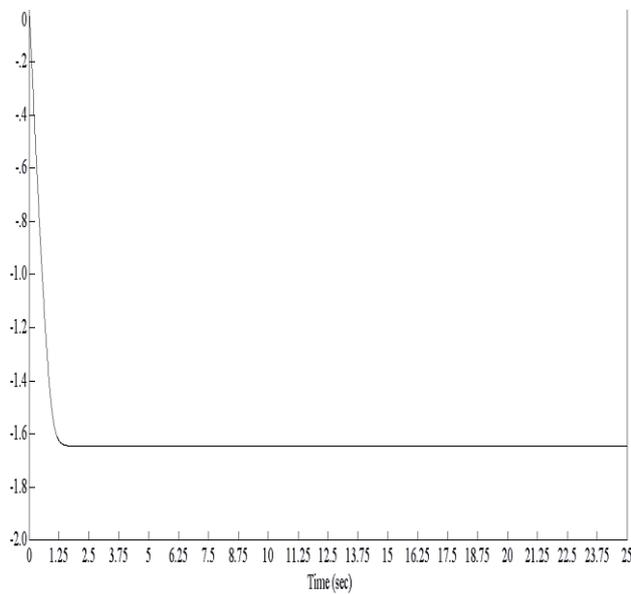


Рисунок 4

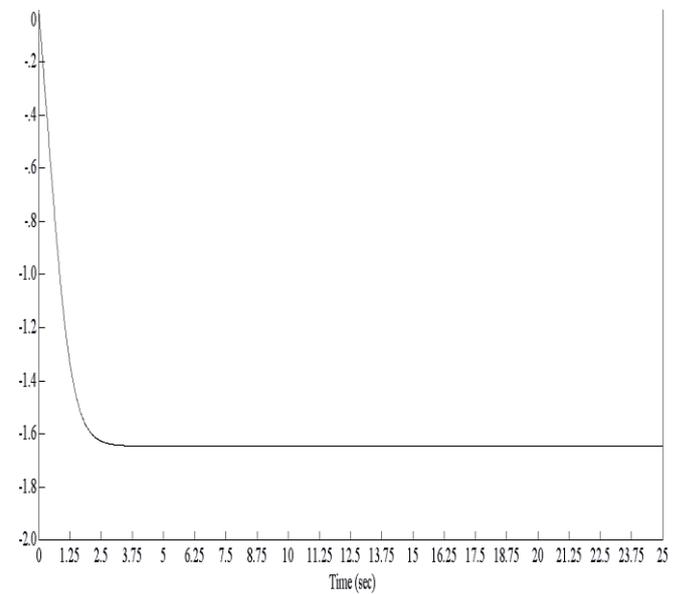


Рисунок 5

На рисунках 6-7 показаны результаты численного эксперимента, проведенного при значении параметров $k_1 = 1.5, k_2 = -2, a_1 = 10, a_2 = 2, a_3 = 10, a_4 = 5, a_5 = 50$ (фиксируем); меняем $k_3 = 7$ и $k_3 = -7$.

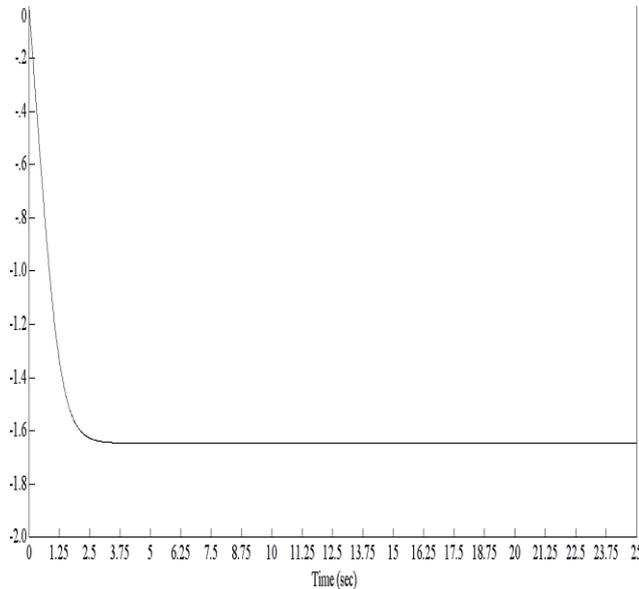


Рисунок 6

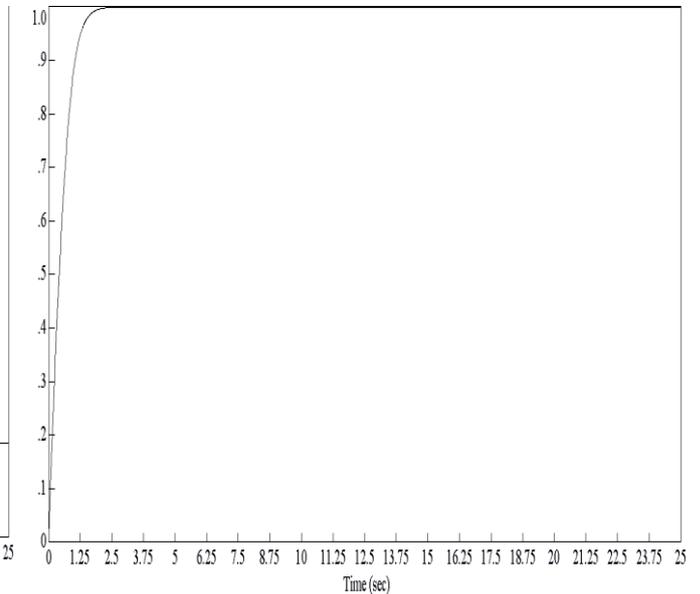


Рисунок 7

Таким образом, убеждаемся, что линеаризованная модель системы управления движением летательного аппарата за счет введения в контур управления закона управления в форме катастрофы «гиперболическая омбилика» становится робастно устойчивой в неограниченно широких пределах изменения параметров объекта управления a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и устанавливаемых параметров регулятора k_1, k_2 и k_3 . Приведенные результаты численного эксперимента, полученные с использованием программы-симулятора Vissim 6.0., подтверждают полученные результаты. Отсюда следует, что при некотором, достаточно небольшом уклонении от опорных значений, основываясь на результатах анализа линеаризованной модели, можно сделать предположение о робастной устойчивости системы управления летательным аппаратом по тангажу.

Библиографический список

1. Бесекерский В.А., Небылов А.В. Робастные системы автоматического управления. – М.: Наука, Москва, 1983. – 239 с.

2. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление – М.: Наука, Москва, 2002. – 303 с.
3. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления: Учебник / Под ред. Н.Д. Егупова; издание 2-е, стереотипное. – М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, Москва, 2002. – 744 с., ил.
4. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 254 с., ил.
5. Бейсенби М.А. Модели, методы анализа и синтеза предельно устойчивых систем управления, д.т.н., Алматы, 1998. – 205 с.
6. Утепбергенова А.И. Методы анализа и синтеза систем управления в классе структурно-устойчивых отображений (на примере катастрофы сборки), к.т.н., Алматы, 2002. – 134 с.
7. Сатыбалдина Д.К. Исследование робастности систем управления, построенных в классе катастроф ласточкин хвост, к.т.н., Алматы, 2007. – 140 с.
8. Тен В.В. Исследование динамических свойств системы управления с повышенным потенциалом робастной устойчивости (на примере катастрофы эллиптической омбилики), к.т.н., Астана, 2004. – 146 с.
9. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB^R. – СПб.: Наука, Санкт-Петербург, 2000. – 475 с., ил. 86.
10. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. Изд. 4-е, перераб. и доп. – СПб, Изд-во «Профессия», Санкт-Петербург, 2003. – 753 с. – (Серия «Специалист»).
11. Воронов А.А. и др. Основы теории автоматического регулирования и управления. Учеб. пособие для вузов. М., «Высш. школа», Москва, 1977.

Сведения об авторе

Жуматаева Жанат Есиркеповна, старший преподаватель Кызылординского Государственного университета им.Коркыт Ата, e-mail: zhanat_kyz@mail.ru