УДК 531.36: 534.1

Раскачивание и стабилизация равновесия двухмассового маятника ограниченным параметрическим управлением

Мухаметзянова А.А.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, СГАУ, Московское шоссе 34, Самара, 443086, Россия

e-mail: Alain.20@mail.ru

Аннотация

Исследуется задача о параметрическом управлении плоскими движениями двухмассового маятника, происходящими в однородном поле силы тяжести. Моделируется маятник двумя одинаковыми невесомыми стержнями с двумя равными точечными массами на концах стержней, другие концы шарнирно закреплены в общей неподвижной точке. Управлением считается зависящий от движения центра масс маятника закон изменения угла между стержнями. Приняты условия об ограниченности с двух сторон перемещений центра масс маятника и о непрерывности производной управляющего закона. Построены уравнения управляемых движений и предложены новые законы управления раскачкой и успокоением маятника в окрестности нижнего положения равновесия. Асимптотическая устойчивость и неустойчивость нижнего положения маятника в случаях его успокоения и раскачки соответственно доказана построением функции

Ляпунова. Теоретические результаты проиллюстрированы графическим представлением численных расчетов.

Ключевые слова: двухмассовый маятник, функция Ляпунова, управление, асимптотическая устойчивость, принцип качелей.

Введение

Одной из классических проблем задач теоретической механики о маятниковых движениях является задача об управлении маятника переменной длины или качелями. Качели могут моделироваться одномассовым [1] или двухмассовым [2] маятником. В работе [3] авторами был построен оригинальный непрерывный закон движения подвижной массы по принципу качелей, решающий задачи о раскачивании и торможении двухмассового маятника. Используя этот закон, в статье [4] были получены решения для задач о диаметральной переориентации и гравитационной стабилизации плоских движений спутника на круговой орбите с помощью подвижной массы, а в работе [5] приведены решения задачи об орбитальном маневрировании спутника посредством космической тросовой системы (космической пращи) с подвижной массой. Задача о гравитационной стабилизации двух противоположных радиальных положений относительного равновесия спутника-гантели на круговой орбите относительно плоских возмущений решена аналогичным управлением в работе [6]. Однако управления, предложенные в этих работах, обладали существенным недостатком, затрудняющим реализацию полученных решений на практике. А именно, они не предполагали ограниченности расстояния перемещения подвижной массы вдоль стержня маятника. Авторами работы [3] приведен численный пример, в котором обсуждалась возможность продления стержня маятника вверх за его точку подвеса. В работах [7, 8] были предложены модифицированные законы управлением подвижной массой по принципу качелей, которые обладают свойством ограниченности относительного перемещения этой массы вдоль стержня.

В работе [9] предлагалась к рассмотрению другая модель двухмассового маятника, представляющего собой совокупность двух симметрично отклоненных от оси симметрии одинаковых по длине и массе маятников, с возможностью управлять величиной угла между ними. Были предложены непрерывные законы управления этим углом, позволяющие раскачивать и гасить колебания рассматриваемой модели по принципу качелей. Авторами статьи [10] были получены управляющие законы, учитывающие ограничения на перемещения центра масс рассмотренного маятника. Но они имели разрывную в нескольких точках производную, что означает наличие ударов в процессе движения.

В данной работе для модели двухмассового маятника, предложенной в [9], получены ограниченные с двух сторон и имеющие непрерывную производную законы управлением углом между стержнями маятника, решающие задачи о стабилизации и о его раскачке в окрестности нижнего положения равновесия. Ограниченность и непрерывность управляющего закона позволяют на основе классической теории устойчивости аналитически доказать асимптотическую устойчивость и неустойчивость различных движений маятника путем построения соответствующих функций Ляпунова. С помощью представленных графиков численного моделирования движений системы наглядно иллюстрируется асимптотическая устойчивость полученных решений.

1 Постановка задачи

Рассмотрим модель двухмассового маятника, состоящую из двух равных точечных масс m, неподвижно закрепленных на концах двух невесомых стержней одинаковой длины b. Пусть другие концы стержней шарнирно закреплены в общей неподвижной точке O. Движения маятника происходят в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Угол между стержнями обозначим 2ψ. Центр масс маятника будет находиться на пересечении биссектрисы этого угла с отрезком, соединяющим обе точечные массы. Расстояние от точки O до центра масс обозначим l (Рис.1).

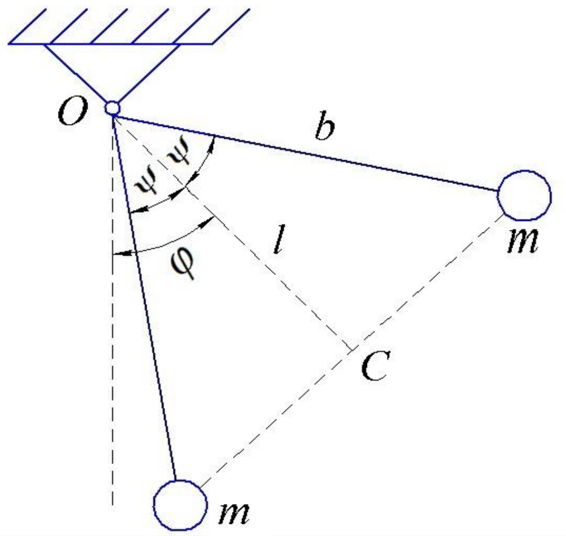

Рис. 1. Двухмассовый маятник

Движение маятника будем описывать обобщенной координатой, равной величине угла φ между биссектрисой и вертикалью. Управлением будем считать величину угла $\psi = \psi(\varphi, \dot{\varphi})$, являющуюся непрерывной функцией вектора фазового состояния маятника, где точка обозначает производную по времени.

Составим уравнения движения маятника в виде уравнения Лагранжа второго рода, для этого выпишем кинетическую и потенциальную энергии маятника:

$$T = mb^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2),$$

$$\Pi = -2mgb\cos\varphi\cos\psi$$

и кинетический потенциал

$$L = T - \Pi = mb^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) + 2mgb\cos\varphi\cos\psi.$$

Имеем уравнение движения:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{b}\sin\varphi\cos\psi = 0, \qquad (1)$$

где g – ускорение сил тяготения.

Как и в работе [9], поставим и решим две задачи об управлении плоскими движениями параметрического маятника. Необходимо построить непрерывные законы управления для угла ψ, реализующие раскачку и асимптотическое успокоение колебаний соответственно в окрестности нижнего положения равновесия. При решении задачи будем учитывать следующие два предположения. Движения центра масс маятника вдоль биссектрисы угла 2ψ должны быть ограничены с двух сторон. Управляющий закон должен иметь непрерывную производную.

2 Стабилизация нижнего положения равновесия маятника

На основе второго метода классической теории устойчивости построением соответствующей функции Ляпунова решим задачу об асимптотическом успокоении колебаний двухмассового маятника относительно его нижнего положения равновесия. Построим управляющий закон согласно равенствам:

$$\psi = \begin{cases} \arccos\dfrac{l_0 + a\sin\varphi\sin\dot{\varphi}}{b}, \quad при \quad -\dfrac{\pi}{2} < \dot{\varphi} < \dfrac{\pi}{2}; \\ \arccos\dfrac{l_0 + a\cdot\sin\varphi\cdot sign(\dot{\varphi})}{b}, \; при \; \dot{\varphi} \in \left(-\infty, -\dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right); \end{cases} \tag{2}$$

где величина $l_0 = const > 0$ задает некоторое положение стержней маятника, соответствующее его нижнему положению равновесия. Положим $l_0 = b/2$. Число a должно удовлетворять условию $0 < a = const < l_0$.

Подставив закон (2) в уравнение (1), получим уравнения управляемых движений маятника:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \dfrac{(l_0 + a\sin\varphi\sin\dot{\varphi})g}{b^2}\sin\varphi = 0, \quad при \quad -\dfrac{\pi}{2} < \dot{\varphi} < \dfrac{\pi}{2}; \\ \ddot{\varphi} + \dfrac{g\left(l_0 + a\cdot\sin\varphi\cdot sign(\dot{\varphi})\right)}{b^2}\sin\varphi = 0, \quad при \; \dot{\varphi} \in \left(-\infty, -\dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right); \end{cases} \tag{3}$$

Выберем функцию Ляпунова $V = V(\varphi, \dot{\varphi})$ согласно равенству:

$$V = \dot{\varphi}^2(1 + k\varphi\dot{\varphi}) + \frac{2gl_0}{b^2}(1 - \cos\varphi) \tag{4}$$

Эта функция $V(\varphi, \dot{\varphi})$ является положительно определенной при любых значениях коэффициента k в окрестности нижнего положения равновесия $\varphi = \dot{\varphi} = 0$. Она допускает бесконечно малый высший предел по своим переменным φ, $\dot{\varphi}$. Вычислим производную этой функции по времени в силу уравнения (3):

$$\dot{V} = -\frac{g}{b^2}\left(l_0 + a\sin\varphi\sin\dot{\varphi}\right)\sin\varphi\left(2\dot{\varphi} + 3k\varphi\dot{\varphi}^2\right) + k\dot{\varphi}^4 + \frac{2gl_0}{b^2}\dot{\varphi}\sin\varphi. \tag{5}$$

После разложения в правой части равенства (5) функции $\sin\varphi$ в ряд по степеням переменной и выполнения элементарных преобразований, после отбрасывания слагаемых старше четвертой степени относительно φ, $\dot{\varphi}$ получим, что производная (4) в окрестности положения $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ с точностью до слагаемых четвертого порядка малости равна

$$\dot{V} \approx k\dot{\varphi}^4 + \varphi^2 x\dot{\varphi}^2(-\frac{3kgl_0 + 2ag}{b^2}).$$

При выборе коэффициента k согласно равенству

$$k = -\frac{a}{3l_0}$$

будем иметь оценку производной функции Ляпунова $\dot{V}$ в виде:

$$\dot{V} \approx -\frac{a}{3l_0}\dot{\varphi}^4 - \frac{ag}{b^2}\dot{\varphi}^2\varphi^2 \leq -\frac{a}{3l_0}\dot{\varphi}^4.$$

Таким образом, производная подобранной функции Ляпунова будет отрицательно определенной по скорости $\dot{\varphi}$ функцией. Множество $\{\dot{\varphi} = 0\}$ не содержит решений системы (3), кроме нулевого решения $\varphi = 0$. Согласно теореме Барбашина-Красовского [11] имеем асимптотическую устойчивость нижнего положения равновесия $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ маятника.

Ниже приведены графики проведенных численных расчетов. Они подтверждают сделанные выводы об асимптотической устойчивости нижнего положения равновесия $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ маятника. Кроме того, на графиках демонстрируется асимптотическое затухание амплитуды колебаний не только в малой окрестности, но и при произвольно заданных больших начальных отклонениях. На рис. 2 изображен график зависимости угла φ от времени. Интегрирование проводилось при следующих значениях параметров системы: $l_0 = 2$ *м*, $a = 1$ *м*, $b = 4$ *м*, $g = 9{,}81$ *м/с²*, и начальных данных: $\varphi(t_0) = 0$ *рад*, $\dot{\varphi}(t_0) = 3{,}5$ *рад/с*. Интегрирование проведено при $t \in [0{,}100]$ *с*.

Из рис. 2 видно, что при движении с большой начальной скоростью происходит асимптотическое затухание колебаний маятника в окрестности точки $\varphi = 4\pi$, $\dot{\varphi} = 0$ после двух совершенных оборотов против часовой стрелки вокруг точки подвеса. Положение равновесия $\varphi = 4\pi$, $\dot{\varphi} = 0$ физически соответствует положению $\varphi = \dot{\varphi} = 0$. И хотя положение равновесия $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ маятника не является асимптотически устойчивым в целом, численное решение показывает, что все равно затухание его колебаний при управлении (2) происходит при любых начальных условиях.

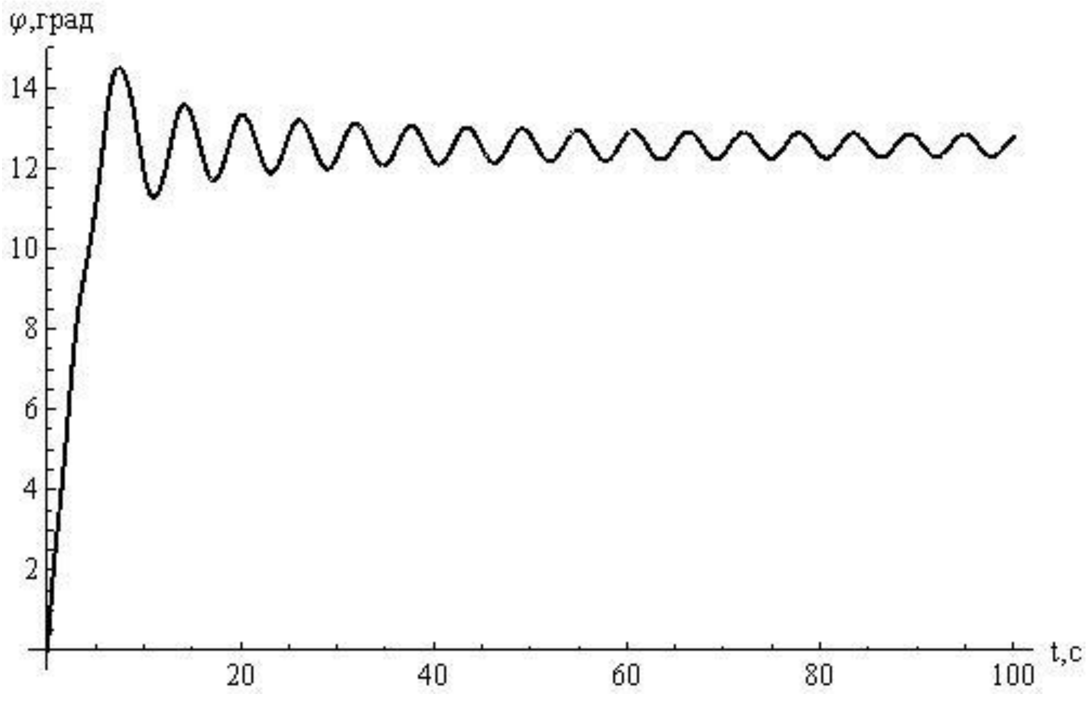

Рис. 2. Зависимость угла φ от времени

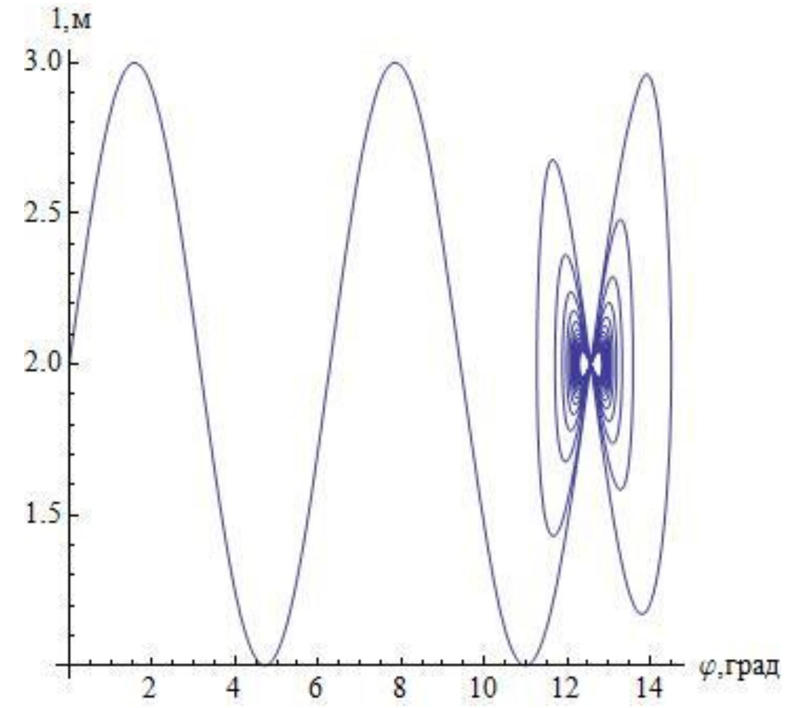

Рис. 3. Зависимость положения центра масс от угла отклонения.

На рис. 3 представлено поведение величины расстояния l от точки подвеса до центра масс маятника в зависимости от угла φ. Точка C согласно заданному ограничению $a=1$ *м* не удаляется от $l_0=2$ *м* больше, чем на 1 *м*, и с течением времени асимптотически приближается к положению l_0.

3 Управление раскачиванием маятника

Проведем решение задачи о раскачке маятника из малой окрестности нижнего положения равновесия. Выберем управляющий закон для изменения величины угла ψ согласно равенствам:

$$\psi=\begin{cases} \arccos\dfrac{l_0-a\sin\varphi\sin\dot{\varphi}}{b}, \quad \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2}<\dot{\varphi}<\dfrac{\pi}{2}; \\ \arccos\dfrac{l_0-a\cdot\sin\varphi\cdot sign(\dot{\varphi})}{b}, \ \text{при} \ \dot{\varphi}\in\left(-\infty,-\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{2},+\infty\right). \end{cases} \tag{6}$$

При законе (6) уравнение управляемых движений маятника (1) запишется в виде:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \dfrac{(l_0 - a\sin\varphi\sin\dot{\varphi})g}{b^2}\sin\varphi = 0, \quad \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2} < \dot{\varphi} < \dfrac{\pi}{2}; \\ \ddot{\varphi} + \dfrac{g\left(l_0 - a\cdot\sin\varphi\cdot sign\left(\dot{\varphi}\right)\right)}{b^2}\sin\varphi = 0, \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} \in \left(-\infty, -\dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right). \end{cases} \tag{7}$$

Для обоснования процесса раскачивания маятника докажем неустойчивость нулевого решения системы (7). Опять воспользуемся положительно определенной функцией Ляпунова (4). Полная производная по времени в силу уравнений (7) от функции (4) с точностью до слагаемых четвертого порядка малости имеет вид:

$$\dot{V} \approx k\dot{\varphi}^4 + \varphi^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{2ag - 3kgl_0}{b^2}\right). \tag{8}$$

При выборе коэффициента $k = \dfrac{a}{3l_0}$ будем иметь:

$$\dot{V} \approx \frac{a}{3l_0}\dot{\varphi}^4 + \frac{ag}{b^2}\dot{\varphi}^2\varphi^2.$$

На основании первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [15] имеем неустойчивость нижнего положения $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ маятника.

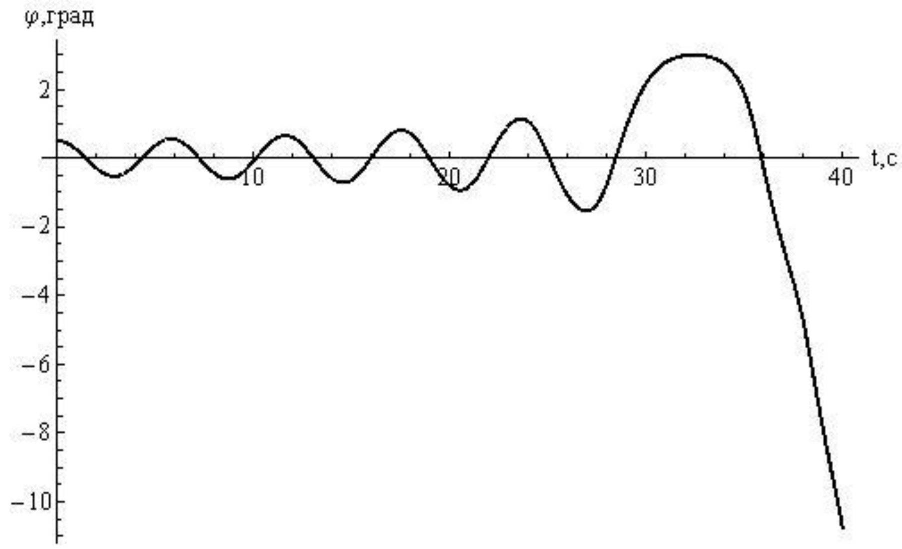

Рис. 4. Зависимость угла φ от времени

На рис. 4 изображен график зависимости угла φ от времени, отображающий нарастание с течением времени амплитуды и скорости колебания маятника и переход от колебательного к вращательному движению. Интегрирование уравнения движения (7) проведено на временном промежутке $t \in [0,100]$ *с* при следующих значениях параметров системы: $l_0 = 2$ *м*, $a = 1$ *м* $b = 4$ *м*, $g = 9{,}81$ *м/с*^{2} и начальных данных: $\varphi(t_0) = 0{,}5$ *рад*, $\dot{\varphi}(t_0) = 0$ *рад/с*. Рис. 5 представляет поведение величины расстояния l от точки подвеса до центра масс маятника в зависимости от угла φ. Видно, что во все время движения удаление центра масс маятника от точки $l_0 = 2$ *м* не превосходит одного метра (это ограничение на перемещение центра масс задано в управлении числом $a = 1$).

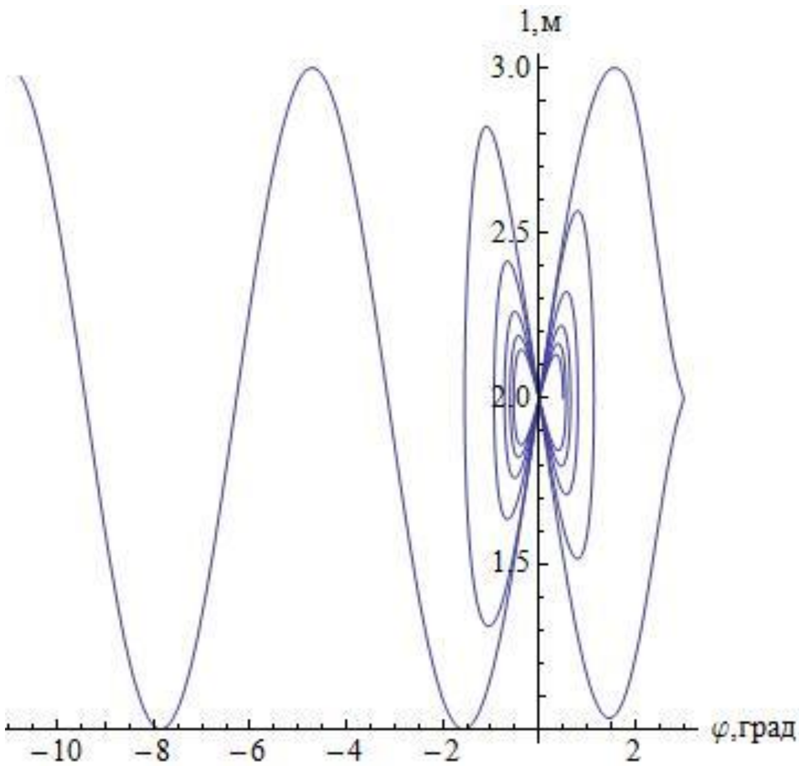

Рис. 5. Зависимость положения центра масс от угла отклонения.

Заключение

В работе для задачи параметрического управления плоскими движениями двухмассового маятника предложены новые ограниченные законы управления с непрерывной производной, решающие задачи о раскачке и стабилизации нижнего положения маятника. Для предложенных законов управления методом функций Ляпунова доказана асимптотическая устойчивость и неустойчивость соответствующих движений. Аналитические результаты проиллюстрированы численными расчетами. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании управляемых маятниковых движений различных механических систем.

Представленные результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России №9.540.2014/К.

Библиографический список

1. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». - Алма-Ата: Наука, 1981. - 253 с.

2. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Оптимальное управление раскачиванием качелей // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 92-101.

3. Асланов В.С., Безгласный С.П. Устойчивость и неустойчивость управляемых движений двухмассового маятника переменной длины // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 32-46.

4. Асланов В.С., Безгласный С.П. Гравитационная стабилизация спутника с помощью подвижной массы // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. № 4. С. 565-575.

5. Безгласный С.П., Пиякина Е.Е. Параметрическое управление движениями космической тросовой системы // Космические исследования. 2015. Т. 53. № 4. С. 353-359.

6. Безгласный С.П., Краснов М.В., Мухаметзянова А.А. Параметрическое управление плоскими движениями спутника-гантели // Журнал «Труды МАИ», 2015, выпуск №82: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=58455 (дата публикации 26.06.2015).

7. Безгласный С.П., Пиякина Е.Е., Талипова А.А. Ограниченное управление двухмассовым маятником // Автоматизация процессов управления. 2013. Т. 34. № 4. С. 35-41.

8. Безгласный С.П., Батина Е.С., Пиякина Е.Е., Параметрическое управление с ограничением движениями двухмассового маятника // Журнал «Труды МАИ», 2014, выпуск № 72: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=47314 (дата публикации 27.01.2014).

9. Безгласный С.П. Управление движениями параметрического маятника // Известия Саратовского университета. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15. № 1. С. 67-73.

10. Безгласный С.П., Краснов М.В., Мухаметзянова А.А. Ограниченное управление движениями двухмассового маятника // Журнал «Труды МАИ», 2015, выпуск 79: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=55758 (дата публикации 19. 01. 2014).

11. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. - М.: Наука, 1966. 530 с.