

УДК 539.3

Антиплоское нестационарное движение электромагнитоупругого полупространства с учетом пьезоэлектрических эффектов

Нгуен Тхань Тунг^{1*}, Тарлаковский Д.В.^{1,2**}

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Россия

*e-mail: thanhtung1106@gmail.com

**e-mail: tdvhome@mail.ru

Статья поступила 08.04.2019

Аннотация

Рассматривается однородное анизотропное электромагнитоупругое полупространство, отнесенное к прямоугольной декартовой системе координат. Замкнутая система уравнений включает уравнения движения, соотношения Коши для деформаций, уравнения Максвелла, а также линеаризованные обобщенный закон Ома и учитывающие пьезоэффекты физические соотношения. Начальные условия полагаются нулевыми и на бесконечности возмущения отсутствуют.

Рассмотрены различные виды симметрии входящих в физические соотношения тензоров. Показано, что антиплоское движение возможно для трансверсально изотропной среды в условиях отсутствия магнитных пьезоэффектов. На границе полупространства заданы нестационарные перемещение и электрическая индукция.

Для решения применяются преобразования Лапласа по времени и Фурье по пространственной координате, а также метод малого параметра, в качестве которого используется коэффициент, связывающий механическое и электромагнитное поля. Построена разрешающая рекуррентная система для коэффициентов соответствующих степенных рядов. Ее решение записывается в интегральном виде с ядрами в виде функций Грина. Найден явный вид последних.

Ключевые слова: антиплоский процесс, пьезоэлектрический эффект, поверхностные функции влияния, интегральные преобразования Лапласа и Фурье, совместное обращение преобразований.

Введение

В настоящее время достаточно подробно изучены статические и стационарные задачи электромагнитоупругости. Имеются также исследования некоторых нестационарных процессов в изотропных электромагнитоупругих телах. Аналитические же решения соответствующих связанных нестационарных задач для анизотропных сред практически отсутствуют.

Некоторые шаговые по времени схемы метода конечных элементов для задач с классическими краевыми условиями в рамках линейной теории пьезоэлектричества в квазистатическом приближении проанализированы в статье Наседкина А.В. [1]. В работах Бардзокаса Д.И., Сеника Н.А. [2], а так же Бардзокаса

Д.И., Кудрявцева Б.А., Сеника Н.А. [3] приведены основные соотношения электродинамики и описание пьезоэлектрических и магнитоупругих эффектов. Представлены постановки основных задач о возбуждении и распространении волн в различных средах. Приведены результаты исследований распространения гармонических волн в неограниченных электромагнитоупругих средах. Исследование объёмных волн в пьезоэлектриках и магнитоупругих средах строится с учётом электродинамических эффектов и проводимости материалов. Рассматриваются задачи, связанные с возбуждением поверхностных волн Рэлея, сдвиговых поверхностных волн и волн Лэмба. Метод решения этих задач основан на сведении их к системам сингулярных интегральных уравнений с последующим их решением методом Бубнова. В статьях [4-6] Кирилюк В.С. и Левчук О.И. рассмотрели связь между статическими задачами упругости и электроупругости, причём результат электроупругой задачи для пьезоэлектрика удалось получить без непосредственного решения, но с использованием соответствующей упругой задачи. Решение связанной задачи о перемещении жёсткого эллиптического диска в пьезоэлектрическом пространстве под действием приложенной силы вдоль оси поляризации удалось получить в аналитическом виде в [5].

Статьи Ватульяна А.О. [7-9] посвящены нестационарным задачам электротермоупругости. В [7] на основе обобщённого преобразования Фурье строятся фундаментальные решения в электроупругости, в [8] для уравнений термоэлектроупругости в квазистатической постановке для пьезоэлектрических тел

исследованы свойства решений по времени. Доказано их экспоненциальное убывание. В одномерном случае построена операторная связь наведённого потенциала тока и теплового потока. В [9] исследованы некоторые закономерности нестационарного движения для уравнений термоэластостатики на основе асимптотического анализа квадратичной формы операторного уравнения, порождённого краевой задачей.

В работах [10-16] приведены основные соотношения для связанных механического и электромагнитного полей. Использована линеаризованная модель, включающая уравнения Максвелла и обобщенный закон Ома. Для решения задач применены разложения в ряды, преобразование Лапласа по времени и интегральные представления с ядрами в виде функций Грина. Последние найдены в квазистатическом приближении. Построено аналитическое решение.

1. Постановка задачи и интегральное представление решения

Замкнутая система уравнений, описывающая связанные нестационарные процессы в анизотропной однородной электромагнитоупругой среде с учетом пьезоэффектов при отсутствии внешних массовых сил, в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеет следующий вид [10,11]:

- уравнения движения:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x_j} + F_i, \quad F_i = p_{ijk} \frac{\partial D_k}{\partial x_j} + q_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial x_j}. \quad (1)$$

- физические соотношения:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + p_{ijk} D_k + q_{ijk} B_k, \quad (2)$$

$$E_i = 4\pi(d_{ij} D_j + p_{kei} \varepsilon_{ke}), \quad H_i = 4\pi(b_{ij} B_j + q_{kei} \varepsilon_{ke}). \quad (3)$$

- соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (4)$$

- уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_e. \quad (5)$$

- линейризованная форма обобщенного закона Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \mathbf{B}_0 \right] \right) + \rho_{e0} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ - вектор перемещения; $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ и $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ - тензоры напряжений и деформаций; t - время; ρ - массовая плотность; $\mathbf{E} = E_i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{H} = H_i \mathbf{e}_i$ - векторы напряженностей электрического и магнитного полей; $\mathbf{D} = D_i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{B} = B_i \mathbf{e}_i$ - векторы электрической и магнитной индукций; $\mathbf{j} = j_i \mathbf{e}_i$ - плотность тока; c - скорость света; C_{ijkl} - тензор упругих постоянных; d_{ij} и b_{ij} - тензоры диэлектрической и магнитной податливости; p_{ijk} и q_{ijk} - тензоры пьезоэлектрической и пьезомагнитной податливости; ρ_e - плотность зарядов; σ - проводимость среды; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ - базисные орты; нижним индексом «0» обозначены величины соответствующие начальному состоянию; по повторяющимся латинским индексам проводится суммирование от 1 до 3.

Далее ограничимся рассмотрением антиплоского движения (антиплоской деформации), которому соответствуют следующие перемещения:

$$u_1 = u_3 \equiv 0, u_2 = v(x, z, t), x = x_1, z = x_3. \quad (7)$$

При этом для удовлетворения уравнений движения в (1) при $i=1,3$ необходимо выполнение следующих равенств для тензоров физических постоянных:

$$\begin{aligned} C_{2111} = C_{2113} = C_{2133} = C_{2311} = C_{2313} = C_{2333} = 0, \\ P_{111} = P_{112} = P_{113} = P_{132} = P_{133} = P_{332} = P_{333} = 0, \\ q_{111} = q_{112} = q_{113} = q_{132} = q_{133} = q_{332} = q_{333} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что этим требованиям удовлетворяют кристаллы, обладающие гексагональной сингонией примитивного и планального классов [10,11], которые соответствуют трансверсально-изотропной среде.

Далее пренебрегаем пьезомагнитными эффектами, т.е. полагаем:

$$q_{ijk} = 0. \quad (9)$$

Кроме того, аналогично (7) полагаем, что компоненты электромагнитного рассматривать электромагнитное поле поля не зависят координаты x_2 и имеют место равенства:

$$D_1 = D_3 \equiv 0, D_{10} = D_{30} = 0, B_2 = 0, B_{01} = B_{20} = B_{03} = 0. \quad (10)$$

из которых согласно (5) и (6) получаем:

$$H_2 = 0, j_1 = j_3 = 0, \rho_e = \rho_{e0} = 0. \quad (11)$$

При изложенных допущениях система уравнений (1) – (6) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= C_{1212} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{2323} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + F_2, \quad F_2 = p_{223} \frac{\partial D_2}{\partial z}, \\
 \sigma_{12} &= 2C_{1212} \varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2C_{2323} \varepsilon_{23} + p_{223} D_2, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = 0, \\
 E_2 &= 4\pi(d_{22} D_2 + 2p_{223} \varepsilon_{23}), \quad H_1 = 4\pi b_{11} B_1, \quad H_3 = 4\pi b_{33} B_3, \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{22} = 0, \\
 \frac{\partial E_2}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial B_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_3}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j_2 + \frac{1}{c} \frac{\partial D_2}{\partial t}, \\
 j_1 &= \frac{\sigma B_{03}}{c} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad j_2 = \sigma E, \quad j_3 = -\frac{\sigma B_{01}}{c} \frac{\partial v}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Далее будем использовать следующие безразмерные параметры (при одинаковом начертании величин они обозначены штрихом, который в последующем изложении опускается):

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{x}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u' = \frac{u}{L}, \quad v' = \frac{v}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad \rho'_e = \frac{16\pi^2 d_{11} \rho_e L}{E_*}, \\
 H'_k &= \frac{H_k c_1}{4\pi b_{11} c E_*}, \quad B'_k = \frac{B_k c_1}{c E_*}, \quad \sigma'_{kl} = \frac{\sigma_{kl}}{C_{1111}}, \quad E'_k = \frac{E_k}{E_*}, \quad D'_k = \frac{4\pi d_{11} D_k}{E_*}, \quad j'_k = \frac{j_k}{\sigma E_*}, \\
 F'_k &= \frac{F_k L}{C_{1111}}, \quad C'_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}}{C_{1111}}, \quad p'_{ijk} = \frac{p_{ijk}}{E_*}, \quad b'_{kl} = \frac{b_{kl}}{b_{11}}, \quad d'_{kl} = \frac{4\pi d_{kl}}{d_{11}}, \\
 \alpha &= \frac{E_*^2}{16\pi^2 d_{11} C_{2323}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{C_{1111}}{\rho}}, \quad \eta_e = \frac{c_1}{c_e}, \quad \gamma = \frac{\gamma_e L}{c_1} = \frac{16\pi^2 d_{11} \sigma L}{c_1}, \\
 c_e^2 &= 16\pi^2 c^2 d_{11} b_{11}, \quad \gamma_e = 16\pi^2 d_{11} \sigma, \quad \eta_2^2 = \frac{C_{1111}}{C_{2323}}, \quad \gamma_2^2 = \frac{C_{1212}}{C_{2323}},
 \end{aligned}$$

где L и E_* - некоторые характерные линейный размер и напряженность электрического поля.

В этих величинах система уравнений (12) имеет такой вид (точками здесь и далее обозначены производные по безразмерному времени τ):

$$\eta_2^2 \ddot{v} = \gamma_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \alpha \xi \frac{\partial D_2}{\partial z}, \quad \xi = p_{223}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_2}{\partial z} = \dot{H}_1, \quad b_{33} \frac{\partial E_2}{\partial x} = -\dot{H}_3, \quad \frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} = \eta_e^2 (\gamma j_2 + \dot{D}_2), \\ j_2 = E_2 = d_{22} D_2 + \xi \frac{\partial v}{\partial z}, \quad H_1 = B_1, \quad H_3 = b_{33} B_3, \\ \sigma_{12} = C_{1212} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \sigma_{23} = C_{2323} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \alpha \xi D_2 \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Полагаем, что среда занимает полуплоскость, на границе которой $z \geq 0$, на границе которой заданы перемещение и ненулевая компонента вектора электрической индукции:

$$v|_{z=0} = V_0(x, \tau), \quad D_2|_{z=0} = d_{20}(x, \tau). \quad (15)$$

На бесконечности возмущения отсутствуют, а в начальный момент времени $\tau = 0$ имеют место невозмущенное состояние:

$$v|_{\tau=0} = \dot{v}|_{\tau=0} = H_1|_{\tau=0} = H_3|_{\tau=0} = D_2|_{\tau=0} = 0. \quad (16)$$

Решение начально-краевой задачи (13) - (16) записываем в виде сверток (они обозначаются звездочками) по времени и координате x :

$$\begin{aligned} v(x, z, \tau) = G_{vv}(x, z, \tau) ** V_0(x, \tau) + G_{vd}(x, z, \tau) ** d_{20}(x, \tau), \\ D_2(x, z, \tau) = G_{dv}(x, z, \tau) ** V_0(x, \tau) + G_{dd}(x, z, \tau) ** d_{20}(x, \tau). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь G_{vv}, G_{dv} и G_{vd}, G_{dd} - поверхностные функций Грина, которые есть ограниченные решения начально-краевых задач, включающих уравнения (13) – (14) начальные условия (16) и соответственно граничные условия:

$$\begin{aligned} v|_{z=0} &= \delta(x, y)\delta(\tau), D_2|_{z=0} = 0, \\ v|_{z=0} &= 0, D_2|_{z=0} = \delta(x, y)\delta(\tau). \end{aligned} \quad (18)$$

где $\delta(\xi)$ – дельта-функция Дирака.

Остальные параметры электромагнитного поля и напряжения могут быть найдены с помощью соотношений (14).

2.Изображения функций Грина

К задачам для функций Грина применяем экспоненциальное преобразования Фурье по координате x и преобразование Лапласа по времени (индексы « F » и « L » указывают на изображения; q и s - соответствующие параметры). В результате система уравнений (13) – (14) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 v^{FL}}{\partial z^2} - k_2^2(q, s)v^{FL} + \alpha\xi \frac{\partial D_2^{FL}}{\partial z} = 0, k_2(q, s) = \sqrt{\gamma_2^2 q^2 + \eta_2^2 s^2}, \operatorname{Re} k_2 > 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_2^{FL}}{\partial z} &= sH_1^{FL}, iq b_{33} E_2^{FL} = sH_3^{FL}, \frac{\partial H_1^{FL}}{\partial z} + iq H_3^{FL} = \eta_e^2 (\gamma j_2^{FL} + sD_2^{FL}), \\ j_2^{FL} &= E_2^{FL}, E_2^{FL} = d_{22} D_2^{FL} + \xi \frac{\partial v^{FL}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (20)$$

Соотношение (20) сводится к одному уравнению:

$$\left(d_{22} - \alpha\xi^2\right) \frac{\partial^2 D_2^{FL}}{\partial z^2} - d_{22} k_e^2(q, s) D_2^{FL} + \xi \kappa_v(q, s) \frac{\partial v^{FL}}{\partial z} = 0. \quad (21)$$

где

$$k_e^2(q, s) = \lambda_e(q, s) + \eta_e^2 s^2 / d_{22}, \lambda_e(q, s) = \eta_e^2 \gamma s + q^2 b_{33}, \operatorname{Re} k_e > 0, \\ \kappa_v(q, s) = k_2^2(q, s) - \lambda_e(q, s) = (\gamma_2^2 - b_{33})q^2 + \eta_2^2 s^2 - \eta_e^2 \gamma s.$$

Изображения граничных условий (18) записываются так:

$$\begin{aligned} G_{vv}^{FL} \Big|_{z=0} = 1, G_{dv}^{FL} \Big|_{z=0} = 0, \\ G_{vd}^{FL} \Big|_{z=0} = 0, G_{dd}^{FL} \Big|_{z=0} = 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Общие ограниченные решения системы уравнений (19), (21) имеют вид:

$$\begin{pmatrix} G_{vv}^{FL} \\ G_{dv}^{FL} \end{pmatrix} = C_{1v} \gamma_1 e^{-\lambda_1 z} + C_{2v} \gamma_2 e^{-\lambda_2 z}, \begin{pmatrix} G_{vd}^{FL} \\ G_{dd}^{FL} \end{pmatrix} = C_{1d} \gamma_1 e^{-\lambda_1 z} + C_{2d} \gamma_2 e^{-\lambda_2 z}, \gamma_j = \begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \gamma_{2j} \end{pmatrix} (j=1,2). \quad (23)$$

Здесь C_{jv}, C_{jd} - постоянные интегрирования, λ_1 и λ_2 - обладающие положительной действительной частью корни характеристического уравнения:

$$\det \mathbf{A} = (d_{22} - \alpha \xi^2) \lambda^4 - [d_{22}(k_2^2 + k_e^2) - \alpha \xi^2 \lambda_e] \lambda^2 + d_{22} k_2^2 k_e^2 = 0. \quad (24)$$

а γ_j - решения следующих однородных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \gamma_{2j} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} (\lambda^2 - k_2^2) & \alpha \xi \lambda \\ \xi \kappa_v \lambda & [\lambda^2 (d_{22} - \alpha \xi^2) - d_{22} k_e^2] \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Отсюда следует, что компоненты векторов γ_j можно выбрать следующим образом:

$$\gamma_{1j} = \alpha \xi \lambda_j, \gamma_{2j} = k_2^2 - \lambda_j^2. \quad (26)$$

Определяя с помощью граничных условий постоянные интегрирования и подставляя их в (23), получаем изображения функций Грина:

$$\begin{aligned} G_{vv}^{FL}(q, z, s) &= \sum_{k=1}^2 R_{vvk}(q, s) e^{-\lambda_k z}, & G_{dv}^{FL}(q, z, s) &= \sum_{k=1}^2 R_{dvk}(q, s) e^{-\lambda_k z}, \\ G_{vd}^{FL}(q, z, s) &= \sum_{k=1}^2 R_{vdk}(q, s) e^{-\lambda_k z}, & G_{dd}^{FL}(q, z, s) &= \sum_{k=1}^2 R_{ddk}(q, s) e^{-\lambda_k z}. \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} R_{vv1}(q, s) = R_{dd2}(q, s) &= \frac{\lambda_1(k_2^2 - \lambda_2^2)}{D(q, s)}, & R_{vv2}(q, s) = R_{dd1}(q, s) &= \frac{\lambda_2(\lambda_1^2 - k_2^2)}{D(q, s)}, \\ R_{dv1}(q, s) = -R_{dv2}(q, s) &= \frac{(k_2^2 - \lambda_2^2)(k_2^2 - \lambda_1^2)}{\alpha \xi D(q, s)}, \\ R_{vd1}(q, s) = -R_{vd2}(q, s) &= -\frac{\alpha \xi \lambda_1 \lambda_2}{D(q, s)}, & D(q, s) &= (\lambda_1 - \lambda_2)(k_2^2 + \lambda_1 \lambda_2). \end{aligned}$$

Очевидно, аналитически построить оригиналы функций в (27) затруднительно. Поэтому далее аналогично [12 - 14] будем использовать метод малого параметра, в качестве которого примем ξ в (13). Отметим, что при $\xi = 0$ уравнения в системе (19), (21) становятся независимыми, т.е. в этом варианте независимы механическое и электромагнитное поля.

Функции Грина представим в виде степенных рядов по параметру ξ :

$$G_{ij}(x, z, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} G_{ijm}(x, z, \tau) \xi^m, \quad ij = \{vv, dv, vd, dd\}. \quad (28)$$

При этом ограничиваемся двучленным приближением по этому параметру, и приближенные равенства заменяем точными. Коэффициенты разложений:

$$\lambda_j = \lambda_{j0} + \alpha \xi^2 \lambda_{j1} \quad (j = 1, 2). \quad (29)$$

корней характеристического уравнения (24) находим, подставляя в него (29) и приравнивая коэффициенты при нулевой и второй степенях параметра ξ с неравенств $\text{Re } \lambda_j > 0$:

$$\lambda_{10}^2 = k_e^2, \lambda_{20}^2 = k_2^2, \lambda_{10} = k_e, \lambda_{20} = k_2, \lambda_{j1} = \frac{(\lambda_{j0}^2 - \lambda_e) \lambda_{j0}}{2d_{22} [2\lambda_{j0}^2 - (k_2^2 + k_e^2)]} \quad (j = 1, 2). \quad (30)$$

Используя эти результаты, получаем следующие представления изображений функций Грина с точностью до линейного по ξ слагаемого:

$$\begin{aligned} G_{vv}^{FL}(q, z, s) &= e^{-k_2 z}, G_{dv}^{FL}(q, z, s) = 2\xi \lambda_{21}(q, s) (e^{-k_e z} - e^{-k_2 z}), \\ G_{vd}^{FL}(q, z, s) &= -\frac{\alpha \xi k_e}{k_e^2 - k_2^2} (e^{-k_e z} - e^{-k_2 z}), G_{dd}^{FL}(q, z, s) = e^{-k_e z}. \end{aligned} \quad (31)$$

3. Оригиналы функций Грина и решения задачи

Структура изображений функций Грина такова, что даже в линейном приближении по малому параметру аналитически найти оригинал невозможно. И, прежде всего, это связано с неоднородностью функции $k_e(q, s)$ в (21). Поэтому подобно [13, 14] будем использовать квазистатический аналог функций Грина, полагая $\eta_e = 0$. Тогда формулы (31) такой вид:

$$\begin{aligned} G_{vv}^{FL}(q, z, s) &= f_1^{FL}(q, z, s), G_{dv}^{FL}(q, z, s) = \frac{\xi}{d_{22}} [f_6^{FL}(q, z, s) - f_3^{FL}(q, z, s)] \\ G_{vd}^{FL}(q, z, s) &= \alpha \beta_3 \xi [f_5^{FL}(q, z, s) - f_2^{FL}(q, z, s)], G_{dd}^{FL}(q, z, s) = f_4^{FL}(q, z), \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$f_1^{FL}(q, z, s) = e^{-k_2 z}, f_2^{FL}(q, z, s) = \frac{|q|}{P_1(q, s)} e^{-k_2 z}, f_3^{FL}(q, z, s) = k_2 e^{-k_2 z},$$

$$f_4^{FL}(q, z) = e^{-\beta_3 |q| z}, f_5^{FL}(q, z, s) = \frac{|q|}{P_1(q, s)} e^{-\beta_3 |q| z}, f_6^{FL}(q, z, s) = k_2(q, s) e^{-\beta_3 |q| z}, \quad (33)$$

$$P_1(q, s) = k_2^2(q, s) - b_{33} q^2.$$

Оригинал первой функции в (23) находится последовательным обращением преобразований Фурье и Лапласа с помощью таблиц и свойств преобразований:

$$f_1(x, z, \tau) = -\frac{z \eta_2^2}{\pi \gamma_2} (\gamma_2^2 \tau^2 - \eta_2^2 r_2^2)_+^{-3/2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + \gamma_2^2 z^2}. \quad (34)$$

Вторую функцию представляем в виде:

$$f_2^{FL}(q, z, s) = \Phi^F(q) f_{21}^{FL}(q, z, s), \quad \Phi^F(q) = |q|, \quad f_{21}^{FL}(q, z, s) = \frac{1}{P_1(q, s)} e^{-k_2 z}. \quad (35)$$

К изображениям f_{21}^{FL} и f_3^{FL} применяем алгоритм совместного обращения преобразований Фурье и Лапласа [17]. В результате получаем

$$f_{21}(x, z, \tau) = H(\tau - \eta_2 z) * f_{20}(x, z, \tau), \quad f_3(x, z, \tau) = \ddot{f}_{30}(x, z, \tau - \eta_2 z), \quad (36)$$

где

$$f_{20}(x, z, \tau) = \frac{z \tau r_2^2 S(x, z, \tau)}{\pi Y(x, z, \tau)} (\gamma_2^2 \tau^2 - \eta_2^2 r_2^2)_+^{-1/2},$$

$$f_{30}(x, z, \tau) = \frac{1}{\pi r_2^4} \left[\gamma_2^4 \tau^2 z^2 (\gamma_2^2 \tau^2 - \eta_2^2 r_2^2)_+^{-1/2} - x^2 (\gamma_2^2 \tau^2 - \eta_2^2 r_2^2)_+^{1/2} \right].$$

$$Y(x, z, \tau) = Q^2(x, z, \tau) + 4(\gamma_2^2 - b_{33})^2 x^2 z^2 \tau^2 (\gamma_2^2 \tau^2 - \eta_2^2 r_2^2),$$

$$S(x, z, \tau) = \gamma_2^2 Q(x, z, \tau) + 2(\gamma_2^2 - b_{33}) x^2 (\gamma_2^2 \tau^2 - \eta_2^2 r_2^2),$$

$$Q(x, z, \tau) = (\gamma_2^2 - b_{33}) \left[\tau^2 (\gamma_2^2 z^2 - x^2) - \eta_2^2 z^2 r_2^2 \right] + \eta_2^2 r_2^4.$$

Здесь $\tau_+ = \tau H(\tau)$, где $H(\tau)$ – функция Хевисайда.

Для вычисления оригинала функции $f_2^{FL}(q, z, s)$ сначала обращаем преобразование Фурье с использованием таблиц [19] и его свойств (C - постоянная Эйлера):

$$\varphi(x) = |q|^{F^{-1}} = \left(\frac{q^2}{|q|} \right)^{F^{-1}} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\ln|x| + C) = -\frac{1}{\pi x^2}. \quad (37)$$

Тогда, учитывая формулы (35) и (36), приходим к равенству:

$$f_2(x, z, \tau) = -\frac{1}{\pi} H(\tau - \eta_2 z) * \frac{1}{x^2} * f_{20}(x, z, \tau). \quad (38)$$

Для вычисления оригиналов остальных функций в (33) записываем их так:

$$\begin{aligned} f_4^{FL}(q, z, s) &= \psi^F(q, z), \quad f_5^{FL}(q, z, s) = f_2^{FL}(q, 0, s) \psi^F(q, z), \\ f_6^{FL}(q, z, s) &= f_3^{FL}(q, 0, s) \psi^F(q, z), \quad \psi^F(q, z) = e^{-\beta_3 |q| z}. \end{aligned} \quad (39)$$

Оригиналы первых сомножителей во втором и третьем равенствах получаем из с помощью (35) и (36):

$$\begin{aligned} f_2(x, 0, \tau) &= -\frac{1}{\pi x^2} * H(\tau) * f_{20}(x, 0, \tau) = 0, \\ f_3(x, 0, \tau) &= \ddot{f}_{30}(x, 0, \tau), \quad f_{30}(x, 0, \tau) = -\frac{1}{\pi x^2} (\gamma_2^2 \tau^2 - \eta_2^2 x^2)_+^{1/2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Отсюда с помощью (40) приходим к такому выводу:

$$f_5(x, z, \tau) = 0. \quad (41)$$

Оригинал функции $\psi^F(q, z)$ находим с помощью таблиц:

$$\psi(x, z) = \frac{z}{\pi r_3^2}, \quad r_3 = \sqrt{x^2 + \beta_3^2 z^2}. \quad (42)$$

Тогда оригиналы функций $f_4^{FL}(q, z, s)$ и $f_6^{FL}(q, z, s)$ записываются следующим образом:

$$f_4(x, z, \tau) = \frac{z}{\pi r_3^2} \delta(\tau), f_6(x, z, \tau) = \frac{z}{\pi} \ddot{f}_{30}(x, 0, \tau) * \frac{1}{r_3^2} = -z\ddot{J}(x, z, \tau),$$

$$J(x, z, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\gamma_2 \eta_2^{-1} \tau}^{\gamma_2 \eta_2^{-1} \tau} \frac{\sqrt{\gamma_2^2 \tau^2 - \eta_2^2 \xi^2} d\xi}{\xi^2 [(x - \xi)^2 + \beta_3^2 z^2]}. \quad (43)$$

Последний интеграл с помощью разложения подынтегральной функции на элементарные дроби и соответствующей замены переменной [19, 20] находится в явном виде:

$$J(x, z, \tau) = \frac{2b(x, z, \tau) \tilde{C}(x, z, \tau) \operatorname{sign} x}{g_0(x, z, \tau) h_0(x, z, \tau) \sqrt{h_2^2(x, z, \tau) + g_2^2(x, z, \tau)}}. \quad (44)$$

где

$$\tilde{C} = C(a + b) + D, C = -\frac{2\gamma_2^2 \tau^2 x}{r_3^4}, D = \frac{4\gamma_2^2 x^2 \tau^2 - r_3^2 (\gamma_2^2 \tau^2 + \eta_2^2 r_3^2)}{r_3^4},$$

$$a = \frac{c}{2\eta_2^2 x}, b = -\frac{1}{2\eta_2^2 x} \sqrt{c^2 - 4\eta_2^2 \gamma_2^2 \tau^2 x^2}, c = \gamma_2^2 \tau^2 + \eta_2^2 \beta_3^2 z^2 + \eta_2^2 x^2, g_0 = P_2(a + b),$$

$$g_2 = \sqrt{\frac{P_2(a - b)}{P_2(a + b)}}, h_0(x, z, \tau) = \sqrt{\gamma_2^2 \tau^2 - \eta_2^2 (a + b)^2}, h_2 = \sqrt{\frac{\eta_2^2 (a - b)^2 - \gamma_2^2 \tau^2}{\gamma_2^2 \tau^2 - \eta_2^2 (a + b)^2}},$$

$$P_2(\xi) = (x - \xi)^2 + \beta_3^2 z^2.$$

Суммируя все результаты этого пункта, оригиналы функций Грина в (32) записываем так:

$$G_{vv}(x, z, \tau) = \dot{K}_{vv}(x, z, \tau), G_{dv}(x, z, \tau) = \ddot{K}_{dv}(x, z, \tau),$$

$$G_{vd}(x, z, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_{vd}(x, z, \tau), G_{dd}(x, z, \tau) = K_{dd}(x, z) \delta(\tau). \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned}
 K_{vv}(x, z, \tau) &= \frac{z\tau_+}{\pi\gamma_2 r_2^2} (\gamma_2^2 \tau^2 - \eta_2^2 r_2^2)_+^{-1/2}, \quad K_{dd}(x, z) = \frac{z}{\pi r_3^2}, \\
 K_{dv}(x, z, \tau) &= -\frac{\xi}{d_{22}} [zJ(x, z, \tau) + f_{30}(x, z, \tau - \eta_2 z)], \\
 K_{vd}(x, z, \tau) &= -\frac{\alpha\beta_3 \xi}{\pi} H(\tau) * (\ln|x| + \mathbf{C}) * f_{20}(x, z, \tau).
 \end{aligned} \tag{46}$$

При этом интегральные соотношения (17) с использованием свойств свертки приобретают такой вид:

$$\begin{aligned}
 v(x, z, \tau) &= K_{vv}(x, z, \tau) * \dot{V}_0(x, \tau) + K_{vd}(x, z, \tau) * \frac{\partial^2 d_{20}(x, \tau)}{\partial x^2}, \\
 D_2(x, z, \tau) &= K_{dv}(x, z, \tau) * \ddot{V}_0(x, \tau) + K_{dd}(x, z) * d_{20}(x, \tau).
 \end{aligned} \tag{47}$$

4. Примеры расчетов

В качестве примера материал рассмотрим кварц, который имеет следующие физические характеристики [21, 22]:

$$\begin{aligned}
 C_{1111} &= 1.072 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad C_{1212} = 0.579 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad C_{2323} = 0.399 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \\
 d_{11} &= 5.11 \cdot 10^{-10} \text{ м/ф}, \quad d_{22} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ м/ф}, \\
 b_{11} &= -8.2 \cdot 10^{-6} \text{ а/(тл} \cdot \text{м)}, \quad b_{33} = -8 \cdot 10^{-6} \text{ а/(тл} \cdot \text{м)}, \quad p_{223} = 2.3 \cdot 10^{-12} \text{ в/м}.
 \end{aligned}$$

Принимая $E_* = 1B / \text{м}$ и $L = 1 \text{ м}$, получаем безразмерные параметры:

$$\eta_2^2 = 2.68, \quad \gamma_2^2 = 1.45, \quad b'_{33} = 0.98, \quad p'_{223} = 2.3 \cdot 10^{-12}, \quad d'_{22} = 12.3.$$

На рис. 1 – 3 приведены графики изменения вычисленных по формулам (46) ядер $K_{vv}(x, z, \tau)$, $K_{dv}(x, z, \tau)$, $K_{dd}(x, z, \tau)$ свертков по координате x при $z = 0.05$ для различных значений моментов времени: $\tau = 0,2$ (сплошные кривые), $\tau = 0,4$ (пунктирные кривые) и $\tau = 0,6$ (штриховые кривые), а на рис.4 изображены графики изменения по координате x при $\tau = 0,2$ в разные координате: $z = 1$ (штриховые кривые), $z = 2$ (штриховые кривые) и $z = 3$ (сплошные кривые).

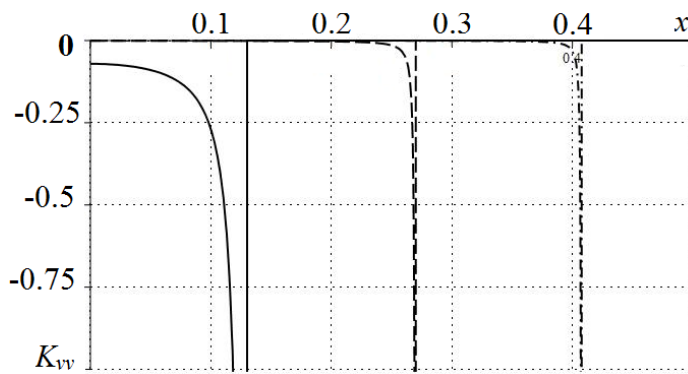


Рис.1

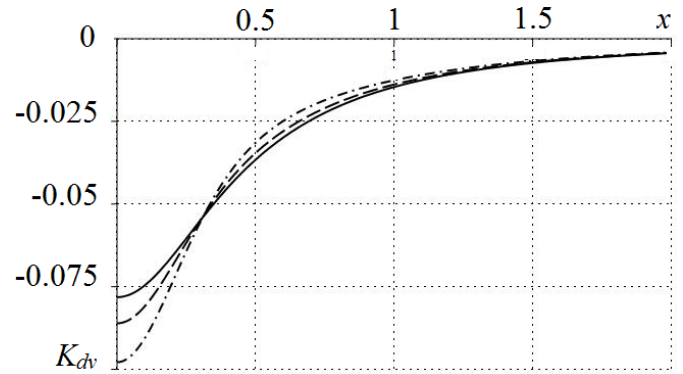


Рис.2

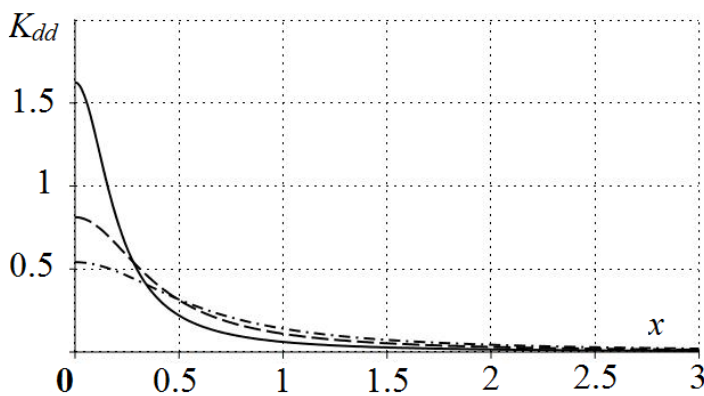


Рис.3

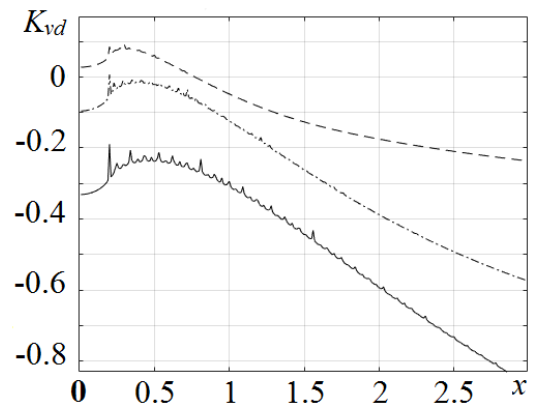


Рис.4

Далее для примера рассматриваем следующий вариант правых частей граничных условий (15):

$$d_{20}(x, \tau) = H(\tau)x_+, V_0(x, \tau) = \tau_+ \delta(x).$$

Им соответствует следующий вид равенств (47):

$$\begin{aligned} v(x, z, \tau) &= K_{vv}(x, z, \tau) * H(\tau) + K_{vd}(x, z, \tau) * H(\tau), \\ D_2(x, z, \tau) &= K_{dv}(x, z, \tau) + H(\tau)K_{dd}(x, z) * x_+. \end{aligned} \quad (48)$$

Две свертки находятся в явном виде (второй интеграл понимаем в регуляризованном смысле):

$$K_{vv}(x, z, \tau) * H(\tau) = \frac{z}{\pi \gamma_2^3 r_2^2} (\gamma_2^2 \tau^2 - \eta_2^2 r_2^2)_+^{1/2}, K_{dd}(x, z) * x_+ = -\frac{z}{\pi} \left(x \operatorname{arccctg} \frac{x}{\beta_3 z} + \ln r_3 \right).$$

Вторую свертку в первом равенстве в (48) преобразовываем следующим образом:

$$K_{vd}(x, z, \tau) * H(\tau) = -\frac{2\alpha\beta_3\xi z}{\pi^2} H(\tau - \eta_2 z) \int_{\eta_2 z}^{\tau} \xi(\xi - \eta_2 z) F(\xi, z) d\xi. \quad (49)$$

где

$$F(\xi, z) = \int_0^{\gamma_2 \eta_2^{-1} \sqrt{\xi^2 - \eta_2^2 z^2}} \frac{(\zeta^2 + \gamma_2^2 z^2) S(\zeta, z, \xi) d\zeta}{Y(\zeta, z, \xi) \sqrt{\gamma_2^2 (\xi^2 - \eta_2^2 z^2) - \eta_2^2 \zeta^2}}.$$

Интеграл в (49) находим численно. На рис.5 приведены графики изменения вычисленной по формулам (48) электрической индукции $D_2(x, z, \tau)$ по координате x при $z=0.1$ для различных значений моментов времени: $\tau=0.1$ (сплошные кривые), $\tau=0.2$ (пунктирные кривые) и $\tau=0.3$ (штриховые кривые), а на рис.6

приведены графики изменения вычисленных по формулам (48) перемещения $v(x, z, \tau)$ по координате x при $\tau = 0,2$ в разные координате: $z = 1$ (штриховые кривые), $z = 2$ (штриховые кривые) и $z = 3$ (сплошные кривые).

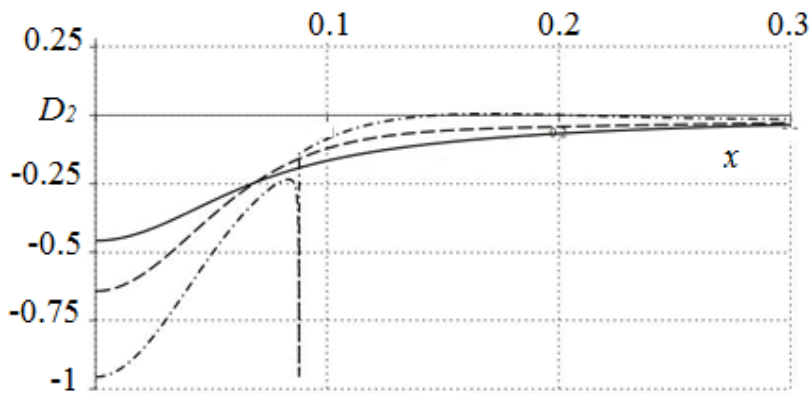


Рис.5

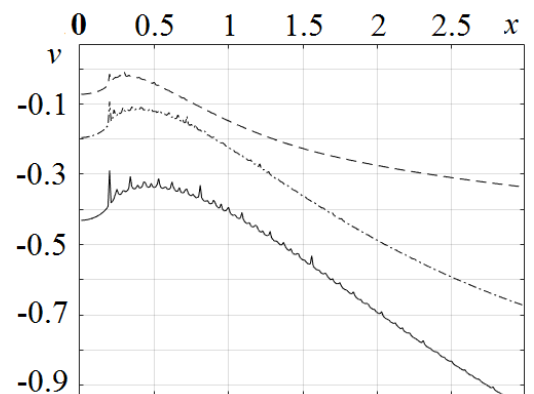


Рис.6

5. Заключение

Построено аналитическое решение задачи об антиплоском распространении нестационарных поверхностных возмущений в анизотропной однородной электромагнитоупругой среде с учетом пьезоэффектов. С помощью квадратур находим решение в виде ядер функций Грина. Установлено, что поправки, вносимые в решение учетом пьезоэлектрических свойств среды, имеют порядок коэффициента, связывающего механическое и электромагнитное поля.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-08-00493).

Библиографический список

1. Наседкин А.В. Исследование шаговых по времени схем метода конечных элементов для нестационарных задач электроупругости с классическими граничными условиями // Механика деформируемых тел: Межвузовский сборник научных трудов. - Ростов на-Дону: Донской государственный технический университет, 1994. С. 78 - 84.
2. Бардзокас Д.И., Сенник Н.А. Контактные задачи электроупругости. - М.: Физматлит, 2001. С. 583 - 606.
3. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сенник Н.А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. - М.: Едиториал, 2003. – 336 с.
4. Кирилук В.С. О взаимосвязи решений статических контактных задач теории упругости электроупругости для полупространства // Прикладная механика. 2006. Т. 42. № 11. С. 69 - 84.
5. Кирилук В.С. О перемещениях жесткого эллиптического диска в трансверсально-изотропном пьезоэлектрическом пространстве // Теоретическая и прикладная механика. 2007. № 43. С. 16 - 21.
6. Кирилук В.С., Левчук О.И. Электроупругое напряженное состояние пьезокерамического тела с параболоидальной полостью // Прикладная механика. 2006. Т. 42. № 9. С. 59 - 69.
7. Ватульян А.О. Об анализе движений в термоэлектроупругости // Труды 4-й Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды»

(Ростов-на-Дону, 27-28 октября 1998). - Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 1998. Т. 1. С. 79 - 83.

8. Ватульян А.О. Фундаментальные решения в нестационарных задачах электроупругости // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60. № 2. С. 309 - 312.

9. Ватульян А.О., Домброва О.Б. Коэффициентные обратные задачи электроупругости // Труды 5-й Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 12-14 октября 1999). - Ростов на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2000. Т. 2. - С. 48 - 52.

10. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Линейные уравнения движения термоэлектромагнитоупругой среды // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: ІМА-пресс, 2009. Вып. 10. С. 57 – 62.

11. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Dynamic Processes in Thermoelectromagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media // In: Encyclopedia of Thermal Stresses. Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014, vol. 2, pp. 1064 - 1071.

12. Вестяк В.А., Лемешев В.А. Одномерные нестационарные волны в толстостенной электромагнитоупругой сфере // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций: Сб. науч. трудов. – Днепропетровск: ДГУ, 2009. Вып. 13. С. 24 - 30.

13. Вестяк В.А., Лемешев В.А. Радиальные нестационарные колебания толстостенной электромагнитоупругой сферы // Материалы XV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Ярополец, 16-20 февраля 2009): Тезисы докладов. – М: Типография «Парадиз», 2009. Т. 1. С. 43.
14. Вестяк В.А., Лемешев В.А. Распространение нестационарных радиальных возмущений от цилиндрической полости в электромагнитоупругой среде // Материалы XIV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Ярополец, 18-22 февраля 2008): Тезисы докладов. - М: ИД МЕДИАПРАКТИКА-М, 2008. Т. 1. С. 59 – 60.
15. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267>
16. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Моментно упругая полуплоскость под действием поверхностных нестационарных нормальных перемещений // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=99731>.
17. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. - Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.

18. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965. – 388 с.
19. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971. – 1108 с.
20. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т.1. Элементарные функции. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 632 с.
21. Григорьев И.С., Мейлихов Е.З. Физические величины. Справочник. - М.: Энергоатомиздат, 1991. - 1232 с.
22. Най Дж. Физические свойства кристаллов. - М.: Мир, 1967. – 386 с.