

## **Динамика пластины с упруго присоединённой массой**

**Нигяр Эльбрус гызы Садыгова**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, МГУ им.*

*Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119991, Россия*

*e-mail: nig-dig@unesp.co.uk*

**Статья поступила 18.02.2020**

### **Аннотация**

В данной работе рассмотрена задача о динамической нагрузке балки ударяющим телом в присутствии промежуточного демпфера – пружины заданной жёсткости. Целью исследования являлось определение совместного движения механической системы: балка-пружина-тело, пренебрегая массой пружины. Движение балки моделируется уравнениями цилиндрических колебаний пластины. Полученные уравнения для совместного движения системы балка – пружина – тело состоит из уравнений для прогиба балки и уравнения движения тела, с учётом жёсткости пружины. Система уравнений, моделирующая движение, состоит из уравнения в частных производных четвёртого порядка по координате и второго порядка по времени, одним из граничных условий которого, является обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по времени. Задача решается методом интегрального преобразования Лапласа по времени. Для обращения полученного решения используется численный метод Дурбина. С помощью данного метода построены графики решений, позволяющие пронаблюдать поведение тела и вычислить

прогиб балки в момент времени. Графики аналитического и численного решений совпадают для малых начальных времен. Также показана зависимость искомых функций от основных параметров задачи: жёсткости пружины и изгибной жёсткости балки. Из иллюстрирующих графиков видно, что функции прогиба балки и движения тела зависят от жёсткости пружины прямо пропорционально, а от изгибной жёсткости балки - обратно пропорционально.

**Ключевые слова:** прогиб балки, колебание балки, пружина, напряжение, деформация, равновесие системы, метод Дурбина.

### Введение

В современной механике твердого деформируемого тела задачи нагружения пружины вызывают особый интерес. В бампере транспортного средства, в турникетной опоре железнодорожного средства пружина и прикрепленные к ней устройства служат для гашения энергии удара, в витринном устройстве пружина с объектом на ней используется для выталкивания товаров. В работе [1] рассматривается задача о совместных колебаниях твердого тела, упруго присоединенного к неоднородной двухступенчатой балке в двух точках закрепления. В работе [2] исследованы механические колебания твердого тела, соединенного упругими связями со стержнем.

Эти задачи были решены посредством вариационного принципа Гамильтона. В данной работе рассматривается задача, где в отличие от

предыдущих работ, один конец балки не является закрепленным, а также, решение находится с помощью интегрального преобразование Лапласа [3-4] по времени. Для численного решения обратного преобразования применяется метод Дурбина [5, 6]. Аналитическое и численное решение сравнивается путем сверки на малом промежутке времени.

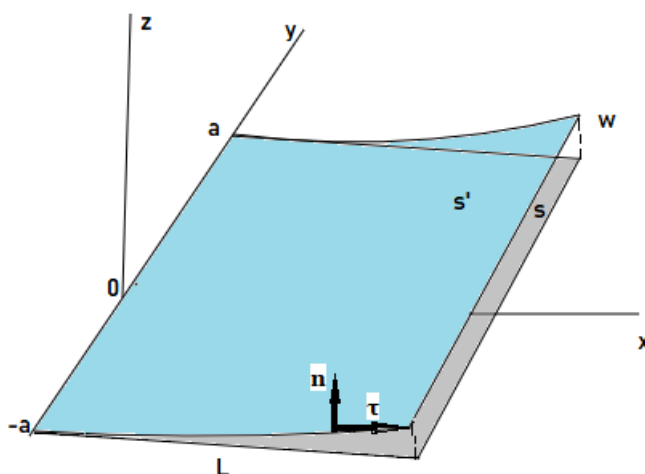


Рисунок 1.  $S$  – недеформированная срединная плоскость пластины,  $S'$  – положение точек срединной поверхности после цилиндрического изгиба,  $2a$  – ширина пластины,  $L$  – длина пластины,  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  – вектор нормали и касательной к образующей цилиндрической поверхности

Пластиной называют тело, которое в недеформированном состоянии является прямоугольным параллелепипедом, в котором один из размеров (толщина пластины –  $h$ ) много меньше двух остальных. Учитывая малую толщину кинематику движения материальных точек пластины можно свести к

движению точек, изначально находившихся на срединной плоскости (Рисунок 1). Ось  $z$  направим по нормали к срединной плоскости, ось  $x$  – по длине пластины ( $L$  – длина), ось  $y$  – по ширине ( $2a$  – ширина). Ограничимся случаем цилиндрического изгиба, при котором перемещения не зависят от координаты  $y$ .

### Материалы и методы

При цилиндрическом изгибе геометрия пластины фактически задается кривой её срединного волокна в любом сечении  $y = const$ . На любой выделенный элемент действует система сил и моментов. Рассмотрим уравнения равновесия пластины, считая, что на неё действуют массовые силы с плотностью  $G(s, t)$  и распределенные по поверхности силы с линейной плотностью  $q(s, t)$ , где  $s$  – длина дуги срединного волокна балки  $0 \leq s \leq L$ ,  $t$  – время. Примем в качестве начального состояния, недеформированное горизонтальное положение и будем считать, что срединное волокно не меняет своей длины.

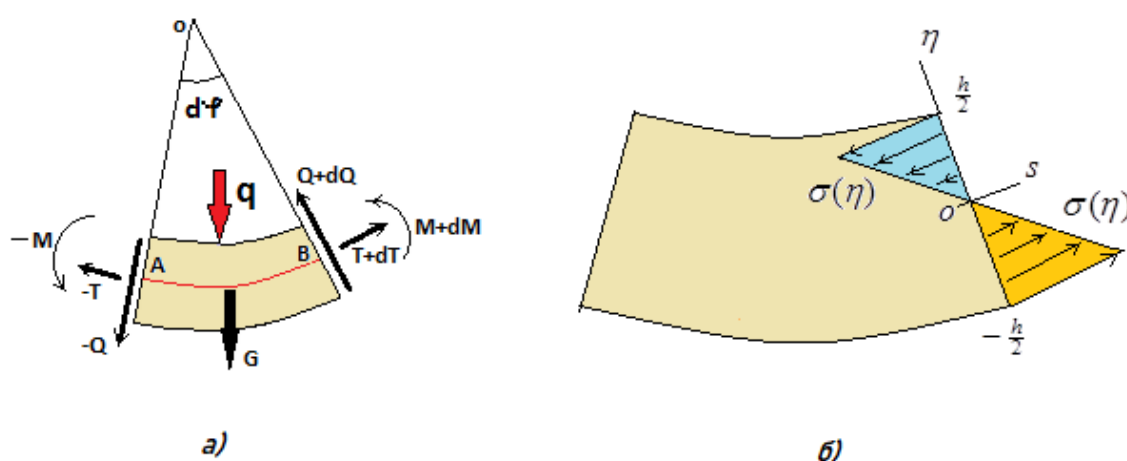


Рисунок 2. (а) – Выделенный малый элемент балки с действующими на него силами, (б) – распределение нормального напряжения в сечении  $s=const$

Введём в рассмотрение материальные координаты  $s, y, \eta$ , вмороженные в упругую среду. В начальном, недеформированном состоянии координата  $s$  совпадает с координатой  $x$ , координата  $\eta$  – с координатой  $z$ . Примем гипотезу плоских сечений, согласно которой начальные сечения  $x=const$  после деформации остаются ортогональными изогнутому нейтральному волокну (Рисунок 2 а-б). В данных предположениях единственной, отличной от нуля деформацией будет растяжение волокна, изначально параллельного координате  $s$ . Пусть после изгиба нейтральное волокно составляет в каждой локальной точке с координатой  $s$  угол  $\varphi(s)$  с осью  $x$ . Тогда векторы нормали и касательной (Рисунок 1) можно записать в следующей форме:

$$\mathbf{\tau} = \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_z \sin \varphi, \mathbf{n} = -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \varphi \quad (1)$$

Тогда относительное удлинение (деформацию) волокна с координатой  $\eta$  можно выразить при помощи радиуса кривизны нейтрального волокна, для которого  $\eta = 0$ :

$$\varepsilon = -\frac{\eta}{R} \frac{1}{R} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad (2)$$

Воспользуемся законом Гука, связывающим напряжения и деформации в локальной декартовой системе координат с базисом  $\mathbf{\tau}, \mathbf{e}_y, \mathbf{\eta}$ , учитывая, что в силу гипотезы плоских сечений, данные оси являются главными. Кроме того, единственной отличной от нуля деформацией будет деформация  $\varepsilon_{\tau\tau} = \varepsilon$ . Деформация по направлению  $y$  в силу наших предположений также равна нулю  $\varepsilon_{yy} = 0$ . Используя малую толщину пластины, примем гипотезу о плоском

напряжённом состоянии  $\sigma_{nn} \approx 0$ . В результате, получим  $E$  –модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона:

$$\varepsilon_{\tau\tau} = \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma_{\tau\tau} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{\tau\tau}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{yy} = 0 = \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\tau\tau} \Rightarrow \sigma_{yy} = \nu \sigma_{\tau\tau}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{nn} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{\tau\tau} + \sigma_{yy}) \Rightarrow \varepsilon_{nn} = -\frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_{\tau\tau}, \quad (5)$$

Фактически, закон Гука сводится к соотношению:

$$\varepsilon = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma, \text{ где } \sigma = \sigma_{\tau\tau}, \quad (6)$$

Учитывая (2), (3), получим:

$$\sigma(s, \eta) = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon(s, \eta) = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\eta}{R(s)} = -\frac{E}{1-\nu^2} \eta \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad (7)$$

Наличие и асимметричный характер распределения действующих в сечении  $s=const$  напряжений  $\sigma$  приводит к возникновению изгибающего момента  $M(s)$  при равной нулю равнодействующей силе:

$$\mathbf{M} = -\int_A [\mathbf{r} \times \sigma \boldsymbol{\tau}] dA = \frac{4aE}{(1-\nu^2)R} \int_0^{\frac{h}{2}} \eta^2 d\eta \cdot \mathbf{e}_y = D \frac{1}{R} \cdot \mathbf{e}_y = D \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_y, \quad (8)$$

так как:

$$\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\tau} & \mathbf{e}_y & \mathbf{n} \\ 0 & y & \eta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \eta \mathbf{e}_y - y \mathbf{n}, \quad D = \frac{aEh^3}{6(1-\nu^2)}, \quad (9)$$

В выражении (5)  $D$  – называется цилиндрической жёсткостью пластины прямоугольной формы с шириной  $2a$  и толщиной  $h$  относительно оси изгиба, параллельной  $y$  и проходящей через центр тяжести сечения. Помимо нормальных напряжений в сечении действуют и касательные напряжения,

равнодействующую которых по сечению обозначим как  $Q(s)$  (Рисунок 2а). Эту силу в технических приложениях называют перерезывающей. Выпишем условия равновесия элемента, показанного на Рисунке 2а. Если оставаться в рамках гипотезы плоских сечений, то  $\mathbf{Q} = Q\mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к срединному волокну. Учитывая это, запишем условия равновесия сил и моментов:

$$d(Q\mathbf{n}) + \rho a h d s \mathbf{G} + \mathbf{q} d s = 0, \quad (10)$$

$$dM + d s \boldsymbol{\tau} \times Q\mathbf{n} + d s \boldsymbol{\tau} \times 2\rho a h d s \mathbf{G} + \frac{d s}{2} \boldsymbol{\tau} \times d s \mathbf{q} = 0, \quad (11)$$

Если пренебречь массовыми силами тяжести, то в качестве массовых сил остаются силы инерции  $\mathbf{G} = -\ddot{\mathbf{r}}(s, t)$ . После деления на длину  $ds$  и предельного перехода, получим (в согласии с (5), (1)) уравнения движения балки:

$$\frac{\partial(Q\mathbf{n})}{\partial s} + \mu \frac{\partial \mathbf{r}^2}{\partial t^2} + \mathbf{q} = 0, \quad (12)$$

где  $\mu = 2\rho a h$ ;

$$\frac{\partial M}{\partial s} - Q = 0, M(s, t) = D \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad (13)$$

так как:

$$\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\tau} & \mathbf{e}_y & \mathbf{n} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_y, \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{e}_x \cos \varphi(s, t) + \mathbf{e}_z \sin \varphi(s, t), \mathbf{n} = -\mathbf{e}_x \sin \varphi(s, t) + \mathbf{e}_y \cos \varphi(s, t), \quad (15)$$

$$\mathbf{r} = x(s, t)\mathbf{e}_x + z(s, t)\mathbf{e}_z, \quad (16)$$

$$\frac{\partial x(s, t)}{\partial s} = \cos \varphi(s, t), \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} = \sin \varphi(s, t), \quad (17)$$

Исключим в уравнениях (6) момент и спроектируем на оси (x,z):

$$-\frac{\partial Q}{\partial s} \sin \varphi - Q \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \mu \frac{\partial x^2}{\partial t^2} + q_x = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} \cos \varphi - Q \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \mu \frac{\partial z^2}{\partial t^2} + q_y = 0, \quad (19)$$

$$Q = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}, M(s, t) = D \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \varphi(s, t), \frac{\partial z}{\partial s} = \sin \varphi(s, t). \quad (21)$$

Ведём прогиб пластины  $w(s, t) = z(s, t)$ . В случае малых углов поворота  $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$  и отсутствии внешних поверхностных сил  $\mathbf{q} \equiv 0$  из (19) получим:

$$x \approx s, \varphi \approx \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (22)$$

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (23)$$

$$Q = D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, M = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (24)$$

Балка скреплена пружиной заданной жёсткости  $k$  с телом массы  $m$  (Рисунок 3). Начальная длина пружины равна  $b_0$ , балка находится в горизонтальном недеформированном состоянии. В момент времени, который мы примем за начало отсчёта  $t = 0$ , масса имеет начальную скорость  $v_z = -V_0$ . Необходимо определить совместное движение механической системы: балка-пружина-тело, пренебрегая массой пружины.



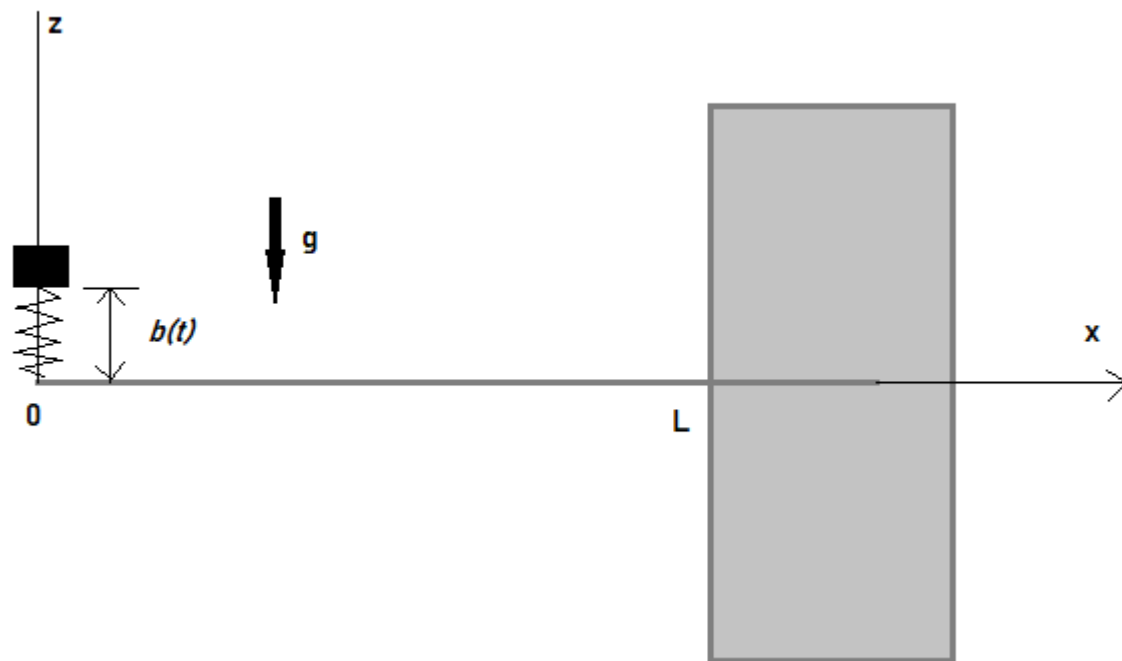


Рисунок 3. Балка скреплена пружиной заданной жёсткости  $k$  с телом массы  $m$

Обозначим вертикальную координату тела как  $z(t)$ . Учитывая прогиб балки, текущая длина пружины будет равна:

$$b(t) = z(t) - w_0(t), \text{ где } w_0(t) = w(x, t)|_{x=0}, \quad (25)$$

Это позволяет вычислить силу, которая растягивает (или сжимает) пружину где:

$$F = k(b(t) - b_0) = k(z(t) - w(0, t) - b_0). \quad (26)$$

Движение тела происходит под действием силы  $F$ , взятой с обратным знаком. Учитывая начальные условия, получим для движения тела определяющие уравнения и начальные данные:

$$m\ddot{z}(t) = -k(z(t) - w(0, t) - b_0) - mg(10), \quad (27)$$

$$z(0) = b_0, \dot{z}(0) = -V_0, w(0,0) = 0, \quad (28)$$

На левый край пластины  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$  начинает действовать поперечная сила  $Q$ . Если сила  $F$  положительна, то есть пружина растягивается, то поперечная сила направлена вверх. Наоборот, когда пружина сжимается, поперечная сила направлена вниз. С учётом этого уравнения и условия для пластины будут такими:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, 0 < x < L; \quad (29)$$

$$t = 0, w = 0, \dot{w} = 0; \quad (30)$$

$$x = 0, M = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0}, Q = D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = k(z(t) - w(0, t) - b_0); \quad (31)$$

$$x = L, w|_{x=L} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0. \quad (32)$$

### Результаты и обсуждение

Для удобства численных расчётов перейдём к безразмерным переменным (со знаком звёздочки):

$$x = Lx^*, w = hw^*, t = \frac{L}{V_0} t^*, z = hz^*, b_0 = hb_0^*, \quad (33)$$

Общая система уравнений (27), (28) примет вид:

$$D \frac{h}{L^4} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + \mu \frac{hV_0^2}{L^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} = 0, 0 < x^* < 1, \quad (34)$$

$$m \frac{hV_0^2}{L^2} \frac{d^2 z^*}{dt^{*2}} = -kh(z^* - w^*(0, t^*) - b_0^*) - mg, \quad (35)$$

$$t^* = 0, w^* = 0, \dot{w}^* = 0; z^* = b_0^*, \frac{V_0 h}{L} \dot{z}^* = -V_0; \quad (36)$$

$$x^* = 0, \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \Big|_{x^*=0} = 0, D \frac{h}{L^3} \frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*3}} \Big|_{x^*=0} = kh(z^* - w^*(0, t^*) - b_0^*); \quad (37)$$

$$x^* = 1, w^*|_{x^*=1} = 0, \frac{\partial w^*}{\partial x^*}|_{x^*=1} = 0. \quad (38)$$

Для удобства, введём замену функции  $Z^*(t^*) = z^*(t^*) - b_0^*$ , и не будем писать знак звёздочки, понимая все переменные безразмерными. В результате получим следующую формулировку задачи – решить совместно систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, 0 < x < 1, \quad (39)$$

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + q^2 Z = q^2 w(0, t) - \beta, \quad (40)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$t = 0, w = 0, \dot{w} = 0; Z = 0, \dot{Z} = -r; \quad (41)$$

$$x = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=0} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}|_{x=0} = f \cdot Z - f \cdot w(0, t); \quad (42)$$

$$x = 1, w|_{x=1} = 0, \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=1} = 0. \quad (43)$$

Как оказалось, задача (39), (41) зависит от следующих безразмерных параметров:

$$p^2 = \frac{D}{\mu L^2 V_0^2} = \frac{E h^2}{12(1-\nu^2)\rho L^2 V_0^2}, q^2 = \frac{k L^2}{m V_0^2}, \beta = \frac{g}{L V_0}, r = \frac{L}{h}, f = \frac{k L^3}{D}, \quad (44)$$

Будем решать задачу с использованием интегрального преобразования Лапласа [3, 7, 8] по времени:

$$u(t) \rightarrow \text{образ} \quad \tilde{u}(s) = \int_0^\infty u(t) \exp(-st) dt, \quad (45)$$

$$\tilde{u}(s) \rightarrow \text{оригинал} \quad u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \tilde{u}(s) \exp(st) ds. \quad (46)$$

Применим к уравнениям (39) и условиям (40) преобразование Лапласа (45):

$$s^2 \tilde{w} + p^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} = 0, 0 < x < 1 \quad s^2 \tilde{Z} + r + q^2 \tilde{Z} = q^2 \tilde{w}(0, s) - \frac{\beta}{s} x = 0, \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = f \cdot \tilde{Z} - f \cdot \tilde{w}(0, s); \quad (47)$$

$$x = 1, \tilde{w}|_{x=1} = 0, \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad (48)$$

Второе уравнение позволяет исключить образ  $\tilde{Z}(s)$  и свести определение образа  $\tilde{w}(x, s)$  к следующей краевой задаче:

$$s^2 \tilde{w} + p^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} = 0, 0 < x < 1, \quad (49)$$

$$x = 0, \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = f \cdot \left( \frac{q^2}{s^2 + q^2} - 1 \right) \cdot \tilde{w}(0, s) - \frac{f \cdot r}{s^2 + q^2} - \frac{f \cdot \beta}{s(s^2 + q^2)}; \quad (50)$$

$$x = 1, \tilde{w}|_{x=1} = 0, \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0. \quad (51)$$

$$\tilde{Z} = -\frac{r}{s^2 + q^2} - \frac{\beta}{s(s^2 + q^2)} + \frac{q^2}{s^2 + q^2} \tilde{w}(0, s), \quad (52)$$

Решая дифференциальное уравнение находим:

$$\tilde{w}(x, s) = C_1 \cdot e^{nx(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + C_2 \cdot e^{-nx(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + C_3 \cdot e^{inx(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + C_4 \cdot e^{-inx(-s^2)^{\frac{1}{4}}}, \quad (53)$$

Где коэффициенты  $C_1, C_2, C_3, C_4$  имеют следующий вид:

$$C_1(s) = -\frac{1}{2} (f(rs + \beta)) (ie^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - ie^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - 2 - e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}}) / ((4i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 + ifs^2 e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - ie^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} fs^2 + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + ifs^2 e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} +$$

$$fs^2 e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - fs^2 e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + fs^2 e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - fs^2 e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} +$$

$$4i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 - ie^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} fs^2) s); \quad (54)$$

$$C_2(s) = \frac{1}{2} (f(rs + \beta) (ie^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + 2i + ie^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} -$$

$$e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}}) / ((4i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 + ifs^2 e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - ie^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} fs^2 +$$

$$i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} +$$

$$ifs^2 e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} +$$

$$i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} +$$

$$fs^2 e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - fs^2 e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + fs^2 e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - fs^2 e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} +$$

$$4i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 - ie^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} fs^2) s); \quad (55)$$

$$C_3(s) = \frac{1}{2} (f(rs + \beta) (ie^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - ie^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + 2 + e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} +$$

$$e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}}) / ((4i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 + ifs^2 e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - ie^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} fs^2 +$$

$$i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} +$$

$$ifs^2 e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} +$$

$$i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 q^2 e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} +$$

$$fs^2 e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - fs^2 e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + fs^2 e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - fs^2 e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} +$$

$$4i(-s^2)^{\frac{3}{4}} n^3 s^2 - ie^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} fs^2) s); \quad (56)$$

$$\begin{aligned}
C_4(s) = & -\frac{1}{2}(f(rs + \beta))(ie^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + ie^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + 2i - e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + \\
& e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}}) / ((4i(-s^2)^{\frac{3}{4}}n^3q^2 + ifs^2e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - ie^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}}fs^2 + \\
& i(-s^2)^{\frac{3}{4}}n^3s^2e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}}n^3s^2e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}}n^3q^2e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + \\
& ifs^2e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}}n^3q^2e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}}n^3s^2e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + \\
& i(-s^2)^{\frac{3}{4}}n^3s^2e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}}n^3q^2e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + i(-s^2)^{\frac{3}{4}}n^3q^2e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + \\
& fs^2e^{(-1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - fs^2e^{(-1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + fs^2e^{(1+i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} - fs^2e^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}} + \\
& 4i(-s^2)^{\frac{3}{4}}n^3s^2 - ie^{(1-i)n(-s^2)^{\frac{1}{4}}}fs^2) s); \tag{57}
\end{aligned}$$

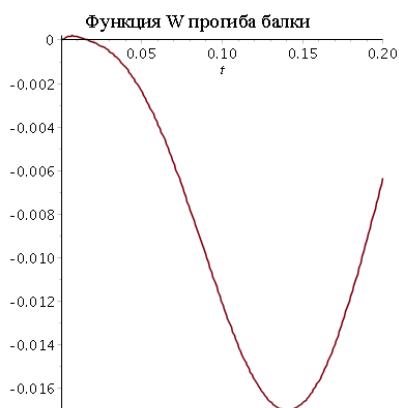
Простым вычислением и подстановкой находим функцию координаты тела:

$$\tilde{Z}(s) = \frac{q^2(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)}{q^2 + s^2} - \frac{\beta}{s(q^2 + s^2)} - \frac{r}{q^2 + s^2}; \tag{58}$$

Возьмем следующие значения для параметров:

$$\rho = 500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, E = 2,0 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \nu = 0,3, a = 0,5 \text{ м}, h = 0,1 \text{ м}, L = 1,5 \text{ м}, V_0 = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}, k = \frac{10^4 \text{ Н}}{\text{м}}, m = 70 \text{ кг}. \tag{59}$$

Используя метод Дурбина находим оригиналы функций прогиба и координаты тела (Рисунок 4 а-б):



а)



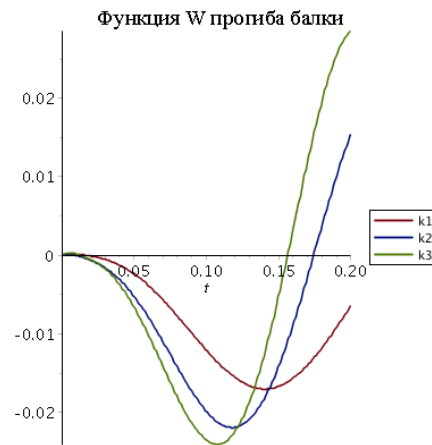
б)

Рисунок 4. Оригиналы функций прогиба и координаты тела

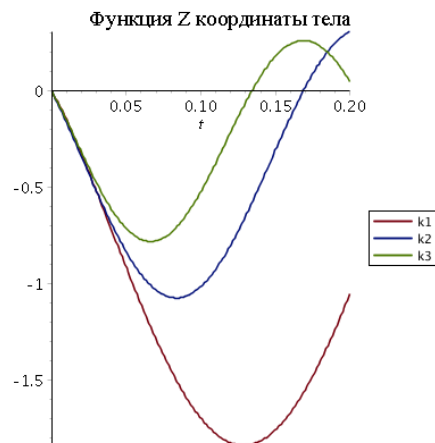
Проверим зависимость функций прогиба балки и координаты тела от параметров жесткости пружины и размера балки:

а) жесткость пружины (Рисунок 5 а-б):

$$k_1 = 10^4 \text{ Н/м}, k_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ Н/м}, k_3 = 3 \cdot 10^4 \text{ Н/м} \quad (60)$$



а)



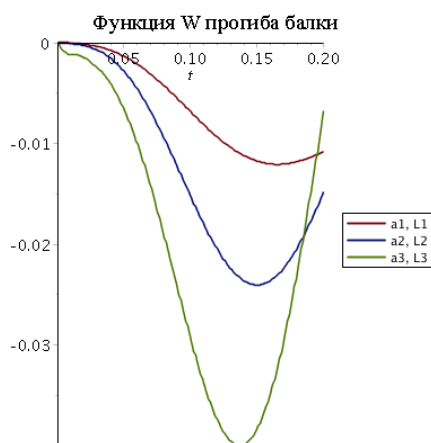
б)

Рисунок 5. Зависимость функций прогиба балки и координаты тела от параметров жесткости пружины

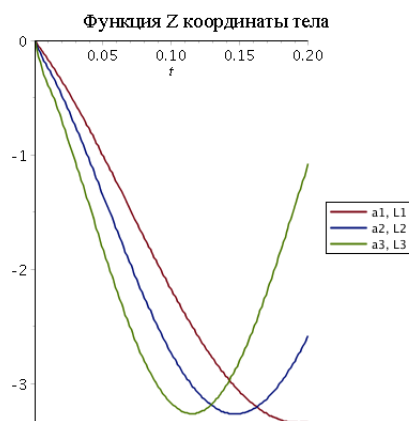
б) размер балки (Рисунок 6 а-б):

$$a_1 = 0,5 \text{ м}, a_2 = 0,7 \text{ м}, a_3 = 0,9 \text{ м}, L_1 = 1,5 \text{ м}, L_2 = 2 \text{ м}, L_3 = 2,5 \text{ м}, \quad (61)$$





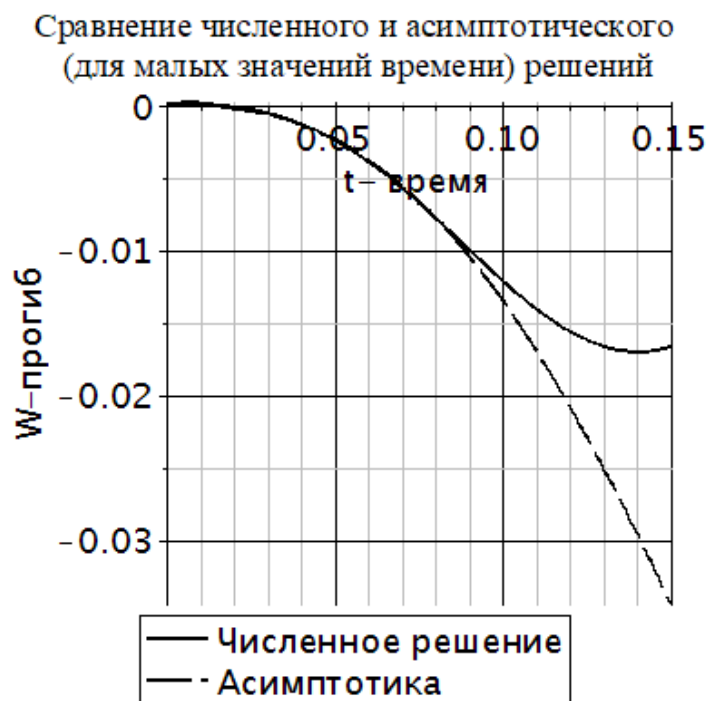
а)



б)

Рисунок 6. Зависимость функций прогиба балки и координаты тела от размера балки

Сравнение аналитического и численного метода Дурбина [5, 9-12]. Покажем, что аналитическое и численное решение обратного преобразования Лапласа [3, 13-16] методом Дурбина [5, 17-21] на малых промежутках времени совпадают (Рисунок 7 а-б).



а)



б)

Рисунок 7. Сравнение аналитического и численного метода Дурбина

## Выводы

С помощью условия равновесия сил и моментов построена система уравнений решения задачи нагружения балки пружиной с закрепленной массой. Используя прямое преобразование Лапласа система уравнений была значительно упрощена. Решив дифференциальное уравнение был найден образ функции прогиба, а постановкой - образ функции движения тела. Численный метод Дурбина обращения интегрального преобразования Лапласа в данной задаче является применимым. Метод дает результаты, на начальном малом участке времени совпадающие с аналитическим решением.

Подстановкой конкретных чисел в параметры решений были построены графики функции прогиба и функции координаты тела от времени. Для сравнения зависимости функций от параметров жесткости пружины и размера балки были построены графики этих функций от данных параметров при различных их значениях. Было выяснено, что при увеличении жесткости пружины значения функции прогиба и функции координаты тела также увеличиваются. А при увеличении жесткости балки значения функции прогиба и функции координаты тела уменьшаются. Этот результат полностью отражает практическую постановку.

### Библиографический список

1. Баргуев С.Г. Колебания неоднородной балки с упруго присоединённым телом с двумя степенями свободы. – М.: Наука, 2017. – 358 с.
2. Ryu J., Byeon H., Lee S.J., Sung H.J. Flapping dynamics of a flexible plate with Navier slip // *Physics of Fluids*, 2019, vol. 31, no. 9, article no. 091901.
3. Prabavathi D., Selvaraj A., Jothi E., Shanmugan S. Rotating oscillations of solar cooker with a permeable bar plate in a couple stress of fluid dynamics // *International Journal of Engineering and Advanced Technology*, 2019, vol. 8, no. 5, pp. 876 - 879.
4. Yakovleva T.V., Krysko V.A., Krysko V.A. Nonlinear dynamics of the contact interaction of a three-layer plate-beam nanostructure in a white noise field // *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1210, no. 1, article no. 012160.
5. Tekin G., Kadloğlu F. Viscoelastic behavior of shear-deformable plates // *International Journal of Applied Mechanics*, 2017, vol. 9, no. 6, article no. 1750085.
6. Туркова В.А., Степанова Л.В. Различные режимы циклического нагружения неупругой пластины: конечно-элементный анализ двухосного нагружения упругопластической пластины с эллиптическим вырезом // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. № 3. С. 207 - 221.
7. Баргуев С.Г. К исследованию колебаний твердого тела с двумя степенями свободы на балке Эйлера-Бернулли // *Сборник научных трудов по материалам VII Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы*

- научных исследований» (Иваново, 15 декабря 2016). – Иваново: Изд-во ИП Цветков, С. 18 - 21.
8. Cha P.D. Free vibrations of a uniform beam with multiple elastically mounted two-degree-of-freedom systems // *Journal of Sound and Vibration*, 2007, vol. 307, no. 1 - 2, pp. 386 - 392.
  9. Wu J.-J., Whittaker A.R. The natural frequencies and mode shapes of a uniform cantilever beam with multiple two-DOF spring-mass systems // *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol. 227, no. 2, pp. 361 - 381.
  10. Миджидон А.Д., Баргуев С.Г. О вынужденных колебаниях механической системы, установленной на упругом стержне // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. 2004. № 1. С. 32 - 34.
  11. Шургальский Э.Ф., Еникеев И.Х., Даниленко Н.В., Карепанов С.К., Боджолян В.А. Вихревой пылеуловитель. Авторское свидетельство SU 1627219 A1, 15.02.1991.
  12. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Экспериментальная проверка математической модели вынужденных колебаний разомкнутой тонкостенной оболочки с малой присоединенной массой и жестко заземленными краями // *Труды МАИ*. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)
  13. Даниленко Н.В., Костин А.В., Шургальский Э.Ф., Еникеев И.Х., Карепанов С.К. Вихревой пылеуловитель. Авторское свидетельство SU 1526834 A1, 07.12.1989.

14. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>
15. Еникеев И.Х., Кузнецова О.Ф., Полянский В.А., Шургальский Э.Ф. Математическое моделирование двухфазных закрученных потоков модифицированным методом крупных частиц // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988. № 28(1). С. 90.
16. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90079>
17. Еникеев И.Х. Численное исследование обтекания затупленных тел потоком газозвеси. Дисс. .... канд. физ.-мат.наук. – М.: 1984. - 116 с.
18. Еникеев И.Х. Расчет дозвуковых газодисперсных потоков в криволинейных каналах методом крупных частиц // Теоретические основы химической технологии. 2006. № 40(1). С. 85 - 94.
19. Русланцев А.Н., Думанский А.М. Деформирование углепластиков под действием переменных во времени нагрузок // Труды МАИ. 2017. № 97. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=87163>

20. Шомахов А.Ю. Об асимптотике второго момента спектральной оценки однородного поля // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2013. № 4. С. 45 - 55.

21. Шомахов А.Ю. Об оценке скорости сходимости математического ожидания статистики LN к линейному функционалу от спектральной плотности  $L(F)$  стационарной гауссовской последовательности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2012. № 2. С. 33 - 42.