

Модификация технологии расчета расстояния между парами смежных кластеров в многоуровневой пороговой обработке

Ханыков И.Г.

Федеральный исследовательский центр Российской академии наук,

14 линия В.О., 39, Санкт-Петербург, 199178, Россия

e-mail: igk@iias.spb.su

Статья поступила 03.04.2021

Аннотация

Рассматривается технология реализации оригинального метода мультипороговой обработки. Приводится его идея, стратегия вычислений и расчетный пример. Выявляются недостатки оригинального метода – сложные расчетные формулы, требующие вспомогательных вычислений и отсутствие показателя, характеризующего качество очередного разбиения на кластеры. При сохранении оригинальной идеи и стратегии вычислений модификация метода мультипороговой обработки позволяет в два раза уменьшить количество сопутствующих операций по вычислению расстояний между парами смежных кластеров и оценить качество разбиений на кластеры. Устанавливается, что генерируемая модифицированным методом новая серия кусочно-постоянных разбиений является оптимальной. Приводимые расчетные примеры позволяют программисту реализовать как оригинальный, так и модифицированный вариант мультипороговой обработки с меньшими затратами времени на программирование.

Ключевые слова: мультипороговая обработка, среднеквадратичное отклонение, кусочно-постоянное разбиение, полутоновые изображения, кластеры пикселей.

1. Введение

Сегментация изображений относится к стадии предварительной обработки изображений. Она подразумевает разделение изображения на непересекающиеся области по общему признаку, которым может служить яркость или цвет пикселя. От ее результатов зависят последующие стадии выделения и классификации объектов интереса, анализа и распознавания сцен, прогнозирования ситуации. Сегментация применима во многих практических областях компьютерного зрения, например в медицине [1], в фотограмметрии [2], в задачах обработки снимков дистанционного зондирования Земли [3] и т. д.

Особый интерес представляет поиск унифицированного метода сегментации [4], который:

- 1) позволяет сегментировать изображения любого тематического содержания;
- 2) обрабатывает как цветные, так и изображения из оттенков серого;
- 3) отличается линейной вычислительной сложностью;
- 4) обходит проблемы неполной и чрезмерной сегментаций;
- 5) обладает установленным критерием качества сгенерированного разбиения.

Метод мультипороговой обработки [5] удовлетворяет части приведенных требований. Он не использует априорной информации об объектах интереса, что

позволяет сегментировать изображения любой тематики. Метод обладает линейной вычислительной сложностью. За счет переменного числа рассматриваемых кластеров метод генерирует множество разбиений и тем самым обходит проблему неполной и чрезмерной сегментаций.

К сожалению, метод обрабатывает изображения только из оттенков серого. Он использует сложную формулу вычисления расстояния между парами смежных кластеров и не обладает функционалом, оценивающим качество очередного сгенерированного разбиения.

В настоящей работе решается задача модификации метода мультипороговой обработки путем замены функции измерения расстояния между парами смежных кластеров и использования среднеквадратичного отклонения σ или суммарной квадратичной ошибки E как функционала качества.

2. Краткий обзор применения методов сегментации изображений

К простейшим методам сегментации изображений относится группа методов выделения границ. Среди этих методов выделяют фильтр Собеля [6, 7], Шарра [8, 9], Робертса [10], Прюитт [11]. Принцип их исполнения подобен. При помощи процедуры свертки эти фильтры проходят по целевому изображению. Разница заключается только в используемом ядре свертки.

Более сложным по отношению к перечисленным методам является детектор границ Кэнни [12]. Он состоит из нескольких этапов, которые включают сглаживание фильтром Гаусса [13] для устранения шумов, поиск градиента при помощи ядра фильтра Собеля, подавление «не-максимумов» (точек с не

максимальным значением градиента), двойную пороговую фильтрацию и уточнение границ. Схема детектора границ Кэнни является типовой, поскольку вместо фильтра Гаусса может выступить любой другой фильтр, например медианный [14]. Вместо ядра Собеля может быть использован любой другой оператор для поиска градиента.

Адаптивное выделение по порогу достигается при помощи метода Оцу [15]. К сожалению, методу Оцу характерна высокая вычислительная сложность, которая возрастает экспоненциально с ростом числа рассматриваемых порогов. Практически это заключается в том, что за приемлемое время метод Оцу вычислит только разбиение на два кластера (один порог). Для случая двух кластеров в ходе своего исполнения метод Оцу, варьируя значение порога, ищет минимальную сумму внутриклассовых дисперсий. И, найдя такую, присваивает значение 0 пикселям, чьи значения ниже значения найденного порога, и 255 – пикселям, чьи значения выше значения найденного порога. Помимо оригинальной версии метода Оцу существует его модификация, называемая мульти-Оцу метод [16]. Она разбивает исходное изображение на несколько уровней.

Метод Оцу и детектор границ Кэнни из-за своей простоты реализации находят применение во многих прикладных областях, например, в задаче разработке алгоритма обнаружения маркерных изображений для вертикальной посадки беспилотного летательного аппарата [17].

Приведенные в настоящей работе методы сегментации могут представлять интерес для разработки систем пассивной оптической локации [18, 19, 20], которые определяют местоположение беспилотного летательного аппарата, сопоставляя фотоснимки подстилающей поверхности с цифровой картой местности,

составленной из ранее полученных аэрофотоснимков или спутниковых снимков территории полета.

3. Оригинальный метод мультипороговой обработки

Идея изложенного в работе [5] метода заключается в последовательном объединении смежных пар кластеров на гистограмме яркостей. Изначально один столбец гистограммы яркости составляет один кластер. Каждый кластер характеризуется числом входящих в него пикселей и средним значением яркости. За один проход по гистограмме яркостей просматриваются все смежные пары кластеров. Для каждой пары кластеров вычисляется функция расстояния. В конце каждого прохода объединяется пара кластеров с минимальным значением функции расстояния.

В общем случае, за 256 проходов генерируется все разбиения на кластеры. В частном случае, когда число непустых уровней серого равно $K < 256$ и требуется найти разбиение на $t < K$ уровня серого, потребуется $(K - t)$ проходов по гистограмме яркостей.

3.1. Стратегия объединения кластеров

Пусть C_k – это k -й кластер уровней серого цвета. Кластер C_k содержит уровни серого цвета в непрерывном диапазоне. Алгоритм объединения кластеров сводится к следующему:

- 1) Пусть целевая гистограмма яркостей содержит K различных непустых уровней серого. В начале процесса объединения каждый кластер назначается

каждому уровню серого. Количество кластеров равно K и каждый кластер содержит только один уровень серого.

2) Для t -уровневой пороговой обработки следующие шаги а), б), с) повторяются $(K - t)$ раз:

а) Для каждой смежной пары кластеров вычисляется расстояние $Dist$, которое указывает на различие между смежными кластерами.

б) Пара смежных кластеров с наименьшим расстоянием объединяются в один кластер.

с) Индексы кластеров C_k переназначаются, поскольку при слиянии количество кластеров уменьшается на единицу.

3) Наконец, получены t кластеры C_1, C_2, \dots, C_t с расчетными пороговыми значениями уровней серого цвета T_1, T_2, \dots, T_t .

3.2. Измерение расстояния $Dist$

Для определения расстояния между двумя соседними кластерами на гистограмме яркостей используется разница между средними значениями яркостей двух кластеров и дисперсия результирующего при слиянии кластера. Чтобы измерить две вышеупомянутые характеристики, рассмотрим гистограмму яркостей как функцию плотности вероятности. Пусть задана гистограмма яркостей целевого изображения: $h(z)$, $z = 0, 1, \dots, 255$, где z – уровень серого, а величина $h(z)$ указывает на частоту появления пикселя с уровнем серого z . Если определить $p(z)$ как $p(z) = h(z)/N$, где N – общее количество пикселей в изображении, то $p(z)$ – вероятность

появления пикселя с уровнем серого z . Также определим функцию $P(C_k)$ для кластера C_k следующим образом:

$$P(C_k) = \sum_{z=T_{k-1}+1}^{T_k} p(z), \quad \sum_{k=1}^K P(C_k) = 1. \quad (1)$$

Функция $P(C_k)$ указывает на вероятность появления пикселей, принадлежащих кластеру C_k .

Расстояние между кластерами C_{k1} и C_{k2} определяется через произведение двух дисперсий:

$$Dist(C_{k1}, C_{k2}) = \sigma_I^2(C_{k1} \cup C_{k2}) \sigma_A^2(C_{k1} \cup C_{k2}), \quad (2)$$

где параметр $\sigma_I^2(C_{k1} \cup C_{k2})$ соответствуют дисперсии между кластерами C_{k1} и C_{k2} , а параметр $\sigma_A^2(C_{k1} \cup C_{k2})$ соответствует внутриклассовой дисперсии, получаемой при объединении кластеров C_{k1} и C_{k2} в один укрупненный.

Межклассовая дисперсия $\sigma_I^2(C_{k1} \cup C_{k2})$ представляет собой сумму квадратов расстояний между средними значениями двух кластеров и общим средним значением обоих кластеров, и определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sigma_I^2(C_{k1} \cup C_{k2}) \\ &= \frac{P(C_{k1})}{P(C_{k1}) + P(C_{k2})} [m(C_{k1}) - M(C_{k1} \cup C_{k2})]^2 \\ &+ \frac{P(C_{k2})}{P(C_{k1}) + P(C_{k2})} [m(C_{k2}) - M(C_{k1} \cup C_{k2})]^2 \\ &= \frac{P(C_{k1})P(C_{k2})}{(P(C_{k1}) + P(C_{k2}))^2} [m(C_{k1}) - m(C_{k2})]^2 \end{aligned} \quad (3)$$

где $m(C_k)$ обозначает среднее значение кластера C_k , вычисляемое следующим образом:

$$m(C_k) = \frac{1}{P(C_k)} \sum_{z=T_{k-1}+1}^{T_k} zp(z) \quad (4)$$

и $M(C_{k1} \cup C_{k2})$ обозначает среднее значение укрупненного кластера из кластеров C_{k1} и C_{k2} определяемое следующим образом:

$$M(C_{k1} \cup C_{k2}) = \frac{P(C_{k1})m(C_{k1}) + P(C_{k2})m(C_{k2})}{P(C_{k1}) + P(C_{k2})} \quad (5)$$

Внутриклассовая дисперсия $\sigma_A^2(C_{k1} \cup C_{k2})$ является дисперсией всех значений пикселей в объединенном кластере. Она вычисляется следующим образом:

$$\sigma_A^2(C_{k1} \cup C_{k2}) = \frac{1}{P(C_{k1}) + P(C_{k2})} \times \sum_{z=T_{k1-1}+1}^{T_{k2}} [(z - M(C_{k1} \cup C_{k2}))^2 p(z)]. \quad (6)$$

3.3. Расчетный пример 1

Пусть дана гистограмма яркостей, представленная в таблице 1.

Таблица 1 – гистограмма яркостей.

Z	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
$h(z)$	3	1	4	8	10	5	0	0	15	3	1

Составим таблицу подготовительных расчетов. Исключим пустые яркости. Перенумеруем кластеры. Сосчитаем вероятность появления отдельной яркости $p(z)$ и отдельного кластера $P(z)$. Проставим среднее значение яркости по каждому

кластеру $m(C_k)$. Сосчитаем межклассовую дисперсию $\sigma_I^2(C_{k1} \cup C_{k2})$. Определим для каждой объединяемой пары кластеров новое среднее значение яркости $M(C_{k1} \cup C_{k2})$. Сосчитаем внутриклассовую дисперсию укрупненного кластера $\sigma_A^2(C_{k1} \cup C_{k2})$. Для каждой пары смежных кластеров найдем расстояние $Dist(C_{k1}, C_{k2})$ и выберем ту пару, которая сопутствуется минимальным расстоянием.

При вычислении внутриклассовой дисперсии укрупненного кластера $\sigma_A^2(C_{k1} \cup C_{k2})$ возникает потребность в вычислении суммы произведений вероятностей яркостей, входящих в укрупненный кластер, и квадрата разности между яркостями, входящими в укрупненный кластер, и средним значением яркости укрупненного кластера. Это второй сомножитель формулы (6):

$$\sum_{z=T_{k1-1}+1}^{T_{k2}} [(z - M(C_{k1} \cup C_{k2}))^2 p(z)]. \quad (7)$$

В таблице рисунка 1 второму сомножителю формулы (6) соответствует строчка 10, названная переменной *summa*. Значения межклассовых дисперсий σ_I^2 записаны в 8 строке и обозначены как «S^2_I». В 11 строке записаны значения внутриклассовых дисперсий σ_A^2 , обозначенные как «S^2_A». Значения расстояний *Dist* между смежными кластерами записаны в 12 строке. Желтым цветом выделено минимальное расстояние соответствующее паре кластеров 7 и 8. В клетках строк 8-12 столбца В таблицы рисунка 1 записаны контрольные значения «-1000», так как для первого кластера не существует предыдущего.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2	z	100	101	102	103	104	105	108	109	110
3	h(z)	3	1	4	8	10	5	15	3	1
4	кластер	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	p(z),вер-ть пикс.	0,06	0,02	0,08	0,16	0,2	0,1	0,3	0,06	0,02
6	P(z),вер-ть класт.	0,06	0,02	0,08	0,16	0,2	0,1	0,3	0,06	0,02
7	m, среднее класт.	100	101	102	103	104	105	108	109	110
8	S^2_I	-1000	0,1875	0,16	0,2222	0,2469	0,2222	1,6875	0,1389	0,1875
9	M, ср. глоб. класт.	-1000	100,25	101,8	102,67	103,56	104,33	107,25	108,17	109,25
10	summa	-1000	0,015	0,016	0,0533	0,0889	0,0667	0,675	0,05	0,015
11	S^2_A	-1000	0,1875	0,16	0,2222	0,2469	0,2222	1,6875	0,1389	0,1875
12	Dist	-1000	0,0352	0,0256	0,0494	0,061	0,0494	2,8477	0,0193	0,0352

Рисунок 1 – таблица предварительных расчетов.

На рисунке 2 штрихпунктирной линией выделены области расчетной таблицы, подвергаемые изменениям при объединении двух смежных кластеров.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
15	z	100	101	102	103	104	105	108	109	110
16	h(z)	3	1	4	8	10	5	15	3	1
17	кластер	1	2	3	4	5	6	7	7	8
18	p(z),вер-ть пикс.	0,06	0,02	0,08	0,16	0,2	0,1	0,3	0,06	0,02
19	P(z),вер-ть класт.	0,06	0,02	0,08	0,16	0,2	0,1	0,36	0,36	0,02
20	m, среднее класт.	100	101	102	103	104	105	108,17	108,17	110
21	S^2_I	-1000	0,1875	0,16	0,2222	0,2469	0,2222	1,706	1,706	0,1676
22	M, ср. глоб. класт.	-1000	100,25	101,8	102,67	103,56	104,33	107,48	107,48	108,26
23	summa	-1000	0,015	0,016	0,0533	0,0889	0,0667	0,8348	0,8348	0,1137
24	S^2_A	-1000	0,1875	0,16	0,2222	0,2469	0,2222	1,8147	1,8147	0,2992
25	Dist	-1000	0,0352	0,0256	0,0494	0,061	0,0494	3,096	3,096	0,0501

Рисунок 2 – первый шаг последовательности объединений смежных кластеров.

Объединение кластеров 7 и 8 сопровождается следующими операциями:

- 1) Яркости 108 и 109 объединяются в один укрупненный кластер 7. Все остальные яркости, находящиеся правее объединенных, перенумеруются (клетки H17-J17).

2) Выполняется расчет вероятности появления $P(z)$ укрупненного кластера 7. Данные записываются в клетку Н19.

3) Значение вероятности $P(z)$ появления укрупненного кластера 7 записывается для каждой яркости, входящей в этот кластер. Данные копируются из клетки Н19 в клетку I19.

4) Рассчитывается средняя яркость m укрупненного кластера 7. Данные записываются в клетку Н20.

5) Значение средней яркости m укрупненного кластера 7 записывается в клетки каждой яркости, входящей в этот кластер. Данные копируются из клетки Н20 в клетку I20.

6) Рассчитывается значение межклассовой дисперсии σ^2_I для пары предыдущий-текущий кластеры (6 и 7). Данные записываются в клетку Н21.

7) Значение межклассовой дисперсии σ^2_I (6, 7) записывается в клетки входящих в текущий укрупненный кластер 7 яркостей. Данные копируются из клетки Н21 в клетку I21.

8) Расчет значения межклассовой дисперсии σ^2_I для пары текущий-следующий кластеры (7 и 8). Данные записываются в клетку J21.

9) Значение межклассовой дисперсии σ^2_I (7, 8) должны быть записаны в клетки входящих в кластер 8 яркостей. На данном этапе последовательного объединения смежных кластеров действие пропускается, так как в кластере 8 всего одна яркость.

10) Расчет глобальной средней яркости M , получаемой при объединении предыдущего и текущего кластеров (6 и 7). Данные записываются в клетку Н22.

11) Значение глобальной средней яркости $M(6, 7)$ записать в соответствующие клетки каждой яркости текущего кластера 7. Данные копируются из клетки H22 в клетку I22.

12) Расчет глобальной средней яркости M , получаемой при объединении текущего и следующего кластера (7 и 8).

13) Значение глобальной яркости $M(7, 8)$ должно быть записано в клетки всех яркостей кластера 8. В данном этапе это действие пропускается, так как в кластере 8 всего одна яркость.

14) Расчет множителя *summa* для пары предыдущий-текущий кластеры (6 и 7). Данные записываются в клетку H23.

15) Значение множителя *summa*(6, 7) записать во все клетки укрупненного кластера 7. Данные копируются из клетки H23 в клетку I23.

16) Расчет множителя *summa* для пары текущий-следующий кластеры (7 и 8). Данные записываются в клетку J23.

17) Значение множителя *summa*(7, 8) должно быть записано во все клетки следующего кластера 8. В данном этапе это действие пропускается, так как в кластере 8 всего одна яркость.

18) Расчет внутриклассовой дисперсии для пары предыдущий-текущий кластер $\sigma^2_A(6, 7)$. Данные записываются в клетку H24.

19) Значения внутриклассовой дисперсии $\sigma^2_A(6, 7)$ записываются в клетки всех яркостей укрупненного кластера 7. Данные копируются из клетки H24 в клетку I24.

20) Расчет внутриклассовой дисперсии для пары текущий-следующий кластер $\sigma^2_A(7, 8)$. Данные записываются в клетку J24.

21) Значение внутриклассовой дисперсии $\sigma^2_A(7, 8)$ записать во все клетки следующего кластера 8. На данном этапе это действие пропускается, так как в кластере 8 всего одна яркость.

22) Рассчитать расстояние у пары предыдущий-текущий кластеры $Dist(6,7)$ для каждой яркости текущего укрупненного кластера 7. Данные записываются в клетки H25, I25.

23) Рассчитать расстояние у пары текущий-следующий кластеры $Dist(7,8)$ для каждой яркости следующего кластера 8. Данные записываются в клетки J25.

24) Выбор пары кластеров, характеризующейся минимальным расстоянием. В клетке D25 таблицы рисунка 2 желтым цветом отмечено минимальное расстояние, соответствующее паре кластеров 2 и 3.

Серия операций по объединению пары смежных кластеров 7 и 8 таблицы рисунка 1 в укрупненный кластер 7 таблицы рисунка 2 завершается определением нового минимального расстояния и соответствующей ему пары кластеров. В таблице рисунка 2 очередному минимальному расстоянию 0,0256 (клетка D25) соответствует пара кластеров 2 и 3. Серия сопутствующих операций по объединению кластеров 2 и 3 изменяет данные таблицы рисунка 2. Измененные данные выделены штрихпунктирной линией на рисунке 3. Новый укрупненный кластер 2 состоит из двух яркостей (101, 102). Для него заново рассчитаны вероятность появления и среднее значение яркости. Рассчитаны и записаны в соответствующие клетки таблицы показатели, требующие данных от соседних

кластеров 1 и 3: межклассовые дисперсии, глобальные средние яркости, внутриклассовые дисперсии и расстояния между смежными парами кластеров.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
33 z		100	101	102	103	104	105	108	109	110
34 h(z)		3	1	4	8	10	5	15	3	1
35 кластер		1	2	2	3	4	5	6	6	7
36 p(z), вер-ть пикс.		0,06	0,02	0,08	0,16	0,2	0,1	0,3	0,06	0,02
37 P(z), вер-ть класт.		0,06	0,1	0,1	0,16	0,2	0,1	0,36	0,36	0,02
38 m, среднее класт.		100	101,8	101,8	103	104	105	108,17	108,17	110
39 S ² _I	-1000	0,7594	0,7594	0,3408	0,2469	0,2222	1,706	1,706	0,1676	
40 M, ср. глоб. класт.	-1000	101,13	101,13	102,54	103,56	104,33	107,48	107,48	108,26	
41 summa	-1000	0,1375	0,1375	0,1046	0,0889	0,0667	0,8348	0,8348	0,1137	
42 S ² _A	-1000	0,8594	0,8594	0,4024	0,2469	0,2222	1,8147	1,8147	0,2992	
43 Dist	-1000	0,6526	0,6526	0,1371	0,061	0,0494	3,096	3,096	0,0501	

Рисунок 3 – второй шаг последовательности объединений смежных кластеров.

Процесс укрупнения первого кластера за счет объединения с ним второго отличается от укрупнения других кластеров. Поскольку для первого кластера отсутствует предыдущий, то для него невозможен расчет межклассовой дисперсии σ^2_I , глобальной средней яркости M , вспомогательного множителя $summa$, внутриклассовой дисперсии σ^2_A и расстояния $Dist$. В соответствующие клетки записаны контрольное значение «-1000». Но аналогичные параметры для последующего за первым второго кластера, требующие данных от двух кластеров 1 и 2, доступны.

Серия последовательных объединений приводит расчетную таблицу данных к виду представленному на рисунке 4, в которой присутствует только два кластера 1 и 2. Желтым цветом (клетка H132) отмечено минимальное и единственное расстояние. Поскольку величина $Dist$ должна быть больше нуля и с каждым шагом последовательного объединения только возрастает, поэтому контрольное значение

«-1000» не учитывается. Зеленым цветом (клетка H129) выделено значение яркости, которое получится при объединении двух оставшихся кластеров 1 и 2 в один укрупненный кластер.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
122 z		100	101	102	103	104	105	108	109	110
123 h(z)		3	1	4	8	10	5	15	3	1
124 кластер		1	1	1	1	1	1	2	2	2
125 p(z), вер-ть пикс.		0,06	0,02	0,08	0,16	0,2	0,1	0,3	0,06	0,02
126 P(z), вер-ть класт.		0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,38	0,38	0,38
127 m, среднее класт.		103,1613	103,16	103,16	103,16	103,16	103,16	108,26	108,26	108,26
128 S ² _I		-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	6,1324	6,1324	6,1324
129 M, ср. глоб. класт.		-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	105,1	105,1	105,1
130 сумма		-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	7,53	7,53	7,53
131 S ² _A		-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	7,53	7,53	7,53
132 Dist		-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	46,177	46,177	46,177

Рисунок 4 – предпоследний шаг последовательности объединения кластеров.

Последний шаг последовательности объединений можно опустить, так как вероятность появления единого кластера равна 1. Среднее значение яркости определено на предыдущем предпоследнем шаге. Другие значения недоступны.

4. Модификация технологии мультипороговой обработки

Модификация метода мультипороговой обработки заключается в применении приращения суммарного квадратичной ошибки ΔE в качестве формулы расчета [21] расстояния между парами смежных кластеров при сохранении оригинальной идеи и стратегии объединения кластеров. Возникающее при объединении двух смежных кластеров 1 и 2 приращение суммарной квадратичной ошибки ΔE рассчитывается по формуле:

$$\Delta E = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \|I_1 - I_2\|^2, \quad (8)$$

где n_1 и n_2 – число пикселей в кластерах 1 и 2, I_1 и I_2 – значения средних яркостей по кластерам 1 и 2, $\| \|^2$ – квадрат Евклидова расстояния.

Если значение ΔE указывает на приращение суммарной квадратичной ошибки при выборе смежной пары кластеров для объединения, то аккумулярованное значение суммарной квадратичной ошибки E указывает на качество текущего разбиения на кластеры. Значение суммарной квадратичной ошибки E текущего шага разбиения вычисляется через значения предыдущего шага:

$$E_{\text{шаг } i} = E_{\text{шаг } i-1} + \Delta E_{\text{шаг } i-1}. \quad (9)$$

Индекс i указывает на порядковый номер шага последовательного объединения смежных пар кластеров. Он принимает целочисленные значения в диапазоне от 1 до $K-1$: $i \in [1, K-1]$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Суммарная квадратичная ошибка начального разбиения равна 0: $E_{\text{шаг } 0} = 0$.

Суммарная квадратичная ошибка E связана со среднеквадратичным отклонением σ равенством:

$$\sigma^2 = \frac{E}{N},$$

где N – число пикселей в изображении. Обе величины равносильно характеризуют качество разбиения изображения на кластеры. Для изображений из оттенков серого область допустимых значений среднеквадратичного отклонения σ ограничена диапазоном $[0, 127,5]$.

4.1. Расчетный пример 2

Для данных таблицы 1 рассчитаем последовательность объединений смежных пар кластеров. Начальное разбиение представлено в таблице рисунка 5. Все 9 непустых кластеров пронумерованы. Число пикселей и средняя яркость кластера (строки 5 и 6) совпадают с изначальными значениями (строки 2 и 3). По формуле 8 рассчитаны значения приращений суммарных квадратичных ошибок пар смежных кластеров. Поскольку для первого кластера не существует предыдущего, поэтому в клетку В7 записано контрольное значение «-1000». Значение суммарной квадратичной ошибки первоначального разбиения равно 0 (клетка К8). Желтым цветом выделено наименьшее приращение суммарной квадратичной ошибки ΔE соответствующее объединению кластеров 1 и 2 (клетка С7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ШАГО	гистограмма яркости									
2	z	100	101	102	103	104	105	108	109	110	
3	h(z)	3	1	4	8	10	5	15	3	1	
4	кластер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
5	n, число пикс. в класт.	3	1	4	8	10	5	15	3	1	
6	l, средн. яркость класт.	100	101	102	103	104	105	108	109	110	
7	dE	-1000	0,75	0,8	2,66667	4,44444	3,33333	33,75	2,5	0,75	
8	E										0

Рисунок 5 – Начальное разбиение.

Объединение найденной «минимальной пары» (пары кластеров, которой сопутствуется минимальное приращение суммарной квадратичной ошибки) сопровождается серией операций по модификации таблицы данных рисунка 5. Результаты первого шага объединения представлены в таблице рисунка 6. Штрихпунктирной линией выделены измененные данные. Желтым цветом

обозначено новое найденное минимальное приращение суммарной квадратичной ошибки.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
15	ШАГ 1										
16	z	100	101	102	103	104	105	108	109	110	
17	h(z)	3	1	4	8	10	5	15	3	1	
18	кластер	1	1	2	3	4	5	6	7	8	
19	n, число пикс. в класт.	4	4	4	8	10	5	15	3	1	
20	I, средн. яркость класт	100,25	100,25	102	103	104	105	108	109	110	
21	dE	-1000	-1000	6,125	2,66667	4,44444	3,33333	33,75	2,5	0,75	
22	E										0,75

Рисунок 6 – Первый шаг последовательности объединений.

Следующие сопутствующие операции совершены в ходе объединения яркостей 100 и 101 в укрупненный кластер 1:

- 1) Объединены кластеры 1 и 2 в укрупненный кластер 1 (клетки С18).
- 2) Перенумерованы последующие кластеры за укрупненным (клетки С18-118).
- 3) Подсчитано число пикселей укрупненного кластера 1 (клетка В19).
- 4) Значение числа пикселей кластера 1 записано во все соответствующие ячейки укрупненного кластера 1 (клетка С19).
- 5) Рассчитано средняя яркость I укрупненного кластера 1 (клетка В20).
- 6) Значение средней яркости I записано в соответствующие клетки укрупненного кластера 1 (клетка С20).
- 7) Для пары предыдущий-текущий кластер должно быть рассчитано значение приращения суммарной квадратичной ошибки ΔE . Эта операция

пропускается, так как у первого кластера отсутствует предыдущий. В клетку В21 записано контрольное значение «-1000».

8) Значение приращения суммарной квадратичной ошибки ΔE должно быть записано во все соответствующие клетки текущего кластера. На данном шаге последовательного объединения клетку С21 записывается контрольное значение «-1000»

9) Рассчитано приращения суммарной квадратичной ошибки ΔE для пары текущий-следующий кластер (1,2).

10) Значение ΔE должно быть записано во все соответствующие клетки следующего кластера 2. Операция пропущена, так как кластер 2 состоит из одной яркости.

11) Выбирается новая «минимальная пара» кластеров. Желтым цветом выделено приращение суммарной квадратичной ошибки пары кластеров 7 и 8.

12) Рассчитывается значение суммарной квадратичной ошибки текущего разбиения по формуле 9 (клетка К37).

После второго шага последовательности объединений таблица данных выглядит так, как показано на рисунке 7. Укрупнен 7 кластер за счет слияния с ним кластера 8 с яркостью 110. Рассчитаны новые значения числа пикселей, средней яркости по укрупненному кластеру 7, приращение суммарной квадратичной ошибки ΔE , возникающее при объединении кластеров 6 и 7, а также значение суммарной квадратичной ошибки текущего разбиения.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
30	ШАГ 2										
31	z	100	101	102	103	104	105	108	109	110	
32	h(z)	3	1	4	8	10	5	15	3	1	
33	кластер	1	1	2	3	4	5	6	7	7	
34	n, число пикс. в класт.	4	4	4	8	10	5	15	4	4	
35	I, средн. яркость класт.	100,25	100,25	102	103	104	105	108	109,25	109,25	
36	dE	-1000	-1000	6,125	2,66667	4,44444	3,33333	33,75	4,93421	4,93421	
37	E										1,5

Рисунок 7 – Второй шаг последовательности объединений.

На рисунках 8 и 9 приведены предпоследний и последний шаги последовательности объединения смежных кластеров пикселей.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
106	ШАГ 7										
107	z	100	101	102	103	104	105	108	109	110	
108	h(z)	3	1	4	8	10	5	15	3	1	
109	кластер	1	1	1	1	1	1	2	2	2	
110	n, число пикс. в класт.	31	31	31	31	31	31	19	19	19	
111	I, средн. яркость класт.	103,161	103,161	103,161	103,161	103,161	103,161	108,263	108,263	108,263	
112	dE	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	306,622	306,622	306,622	
113	E										69,87776

Рисунок 8 – седьмой шаг последовательности объединений

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
122	z	100	101	102	103	104	105	108	109	110	
123	h(z)	3	1	4	8	10	5	15	3	1	
124	кластер	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
125	n, число пикс. в класт.	50	50	50	50	50	50	50	50	50	
126	I, средн. яркость класт.	105,1	105,1	105,1	105,1	105,1	105,1	105,1	105,1	105,1	
127	dE	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	-1000	
128	E										376,5

Рисунок 9 – восьмой шаг последовательности объединений

4.2. Сопоставление последовательностей объединений

Изменение формулы расчета расстояния с произведения межклассовой и внутриклассовой дисперсий на приращение суммарной квадратичной ошибки ΔE влияет на последовательность объединения пар смежных кластеров. В таблицах 2 и 3 записаны пошаговые распределения яркостей по кластерам пикселей оригинального и модифицированного метода. Колонки образуют непустые уровни оттенков серого цвета (яркостей). В строках записано распределение яркостей по кластерам. В каждой очередной строке число колонок уменьшается на одну объединением пар смежных яркостей. Число возможных шагов последовательного объединения равно $K-1$. Согласно данным таблиц 2 и 3 видно, что совпадают только тривиальные случаи первого и последнего разбиения. Распределения яркостей по кластерам у промежуточных разбиений разнятся. Как следствие различаются и средние значения яркостей по кластерам.

Преимущество использования суммарной квадратичной ошибки в том, что с каждым очередным шагом объединения пары смежных кластеров ее значение накапливается. Аккумулятивное значение служит индикатором качества разбиения на кластеры. Каждому разбиению в соответствие ставится суммарная квадратичная ошибка или среднеквадратичное отклонение. Поскольку на выходе алгоритма – серия разбиений, а для каждого разбиения известна его значение целевой функции качества, то можно построить график зависимости целевой функции от числа кластеров в разбиении. График кривой считается оптимальным, если он отвечает минимально возможному значению суммарной квадратичной ошибки E при каждом числе кластеров пикселей.

Таблица 2 – Пошаговое распределение яркостей по кластерам в оригинальном методе

Шаг	Яркости									Кластеры (Яркости)
	100	101	102	103	104	105	108	109	110	
0	1(100)	2(101)	3(102)	4(103)	5(104)	6(105)	7(108)	8(109)	9(110)	
1	1(100)	2(101)	3(102)	4(103)	5(104)	6(105)	7(108,17)		8(110)	
2	1(100)	2(101,8)		3(103)	4(104)	5(105)	6(108,17)		7(110)	
3	1(100)	2(101,8)		3(103)	4(104,33)		5(108,17)		6(110)	
4	1(100)	2(101,8)		3(103)	4(104,33)		5(108,26)			
5	1(100)	2(102,54)			3(104,33)		4(108,26)			
6	1(100)	2(103,5)					3(108,26)			
7	1(103,16)						2(108,26)			
8	1(105,1)									

Таблица 3 – пошаговое распределение яркостей по кластерам в
модифицированном методе

Шаг	Яркости									
	100	101	102	103	104	105	108	109	110	
0	1(100)	2(101)	3(102)	4(103)	5(104)	6(105)	7(108)	8(109)	9(110)	Кластеры (Яркости)
1	1(101,25)		2(102)	3(103)	4(104)	5(105)	6(108)	7(109)	8(110)	
2	1(101,25)		2(102)	3(103)	4(104)	5(105)	6(108)	7(109,25)		
3	1(101,25)		2(102,67)		3(104)	4(105)	5(108)	6(109,25)		
4	1(101,25)		2(102,67)		3(104,33)		4(108)	5(109,25)		
5	1(101,25)		2(102,67)		3(104,33)		4(108,26)			
6	1(102,06)				2(104,33)		3(108,26)			
7	1(103,16)						2(108,26)			
8	1(105,1)									

В работе [22] описаны свойства последовательности оптимальных разбиений. При возрастании числа кластеров g от 1 до числа всего кластеров K последовательность оптимальных приближений описывается монотонной последовательностью значений E_g , которые нестрого уменьшаются от максимального значения E_1 при единственном кластере до 0 при всех пикселях, отнесенных к различным кластерам. Нетривиальным свойством оптимальных приближений является выпуклость последовательности значений E_g :

$$E_g = \frac{E_{g-1} + E_{g+1}}{2}, g = 2, 3, \dots, K - 1.$$

Нарушение выпуклости значений ошибки E_g свидетельствует об отклонении получаемых разбиений от оптимальных.

4.3. Экспериментальные результаты

На рисунке 10 изображен пример генерации серии разбиений стандартного тестового изображения «Лена» из оттенков серого. Размер исходного изображения – 512x512 пикселей. Для данного тестового изображения доступно 164 непустых уровня оттенков серого. На рисунке 11 представлен график зависимости среднеквадратичного отклонения σ от числа кластеров в разбиении.

Компьютерный эксперимент подтвердил, что генерируемая модифицированным методом последовательность значений суммарных квадратичных ошибок E разбиений образует выпуклую кривую, а сами кусочно-постоянные разбиения являются последовательностью оптимальных разбиений.

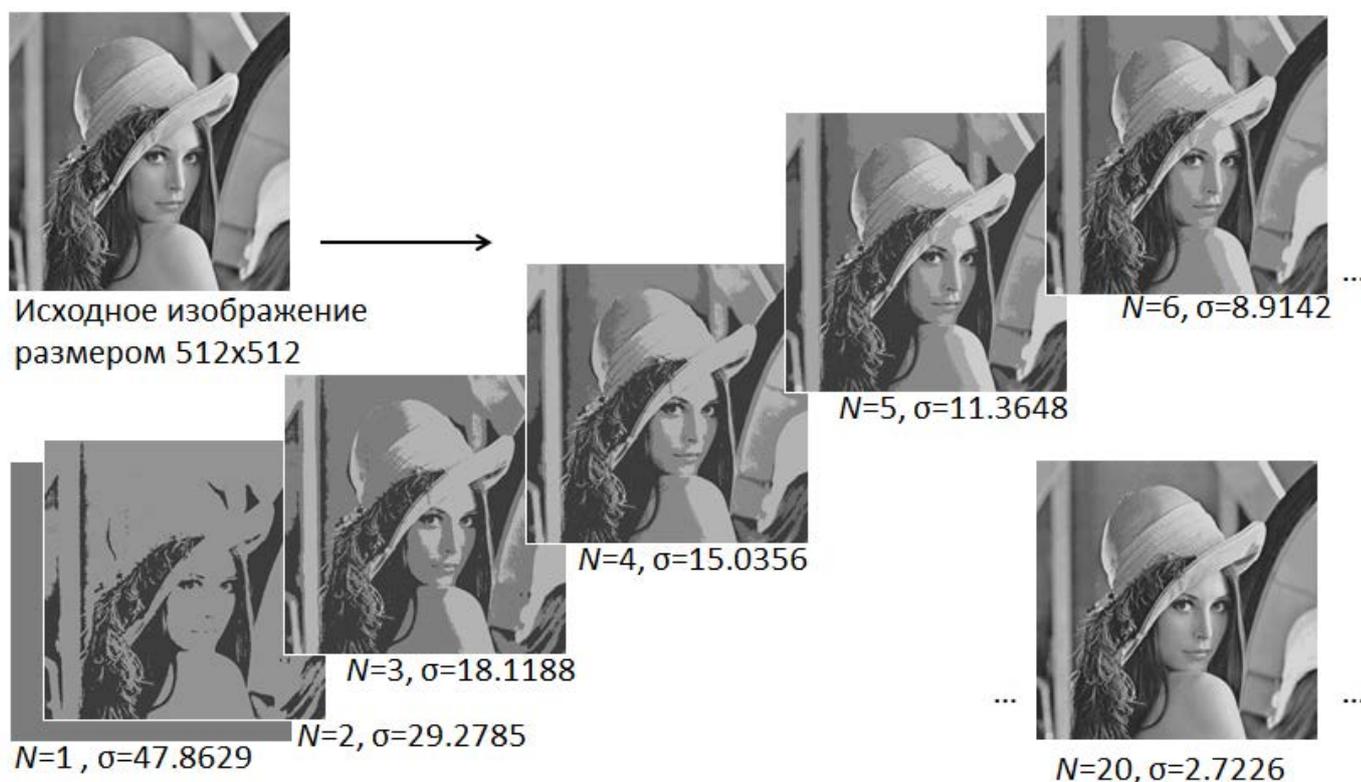


Рисунок 10 – часть серии кусочно-постоянных разбиений тестового изображения на кластеры пикселей

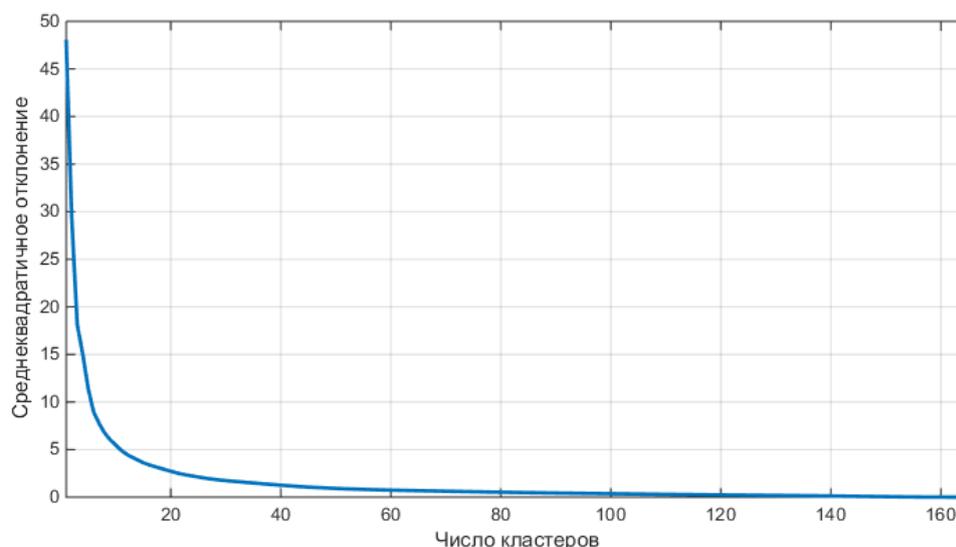


Рисунок 11 – последовательность значений среднеквадратичных отклонений, зависящих от числа кластеров в разбиениях

5. Заключение

Оригинальный метод мультипороговой обработки, применимый только для изображений из оттенков серого, использует произведение межклассовой и внутриклассовой дисперсий в качестве функции расстояния между парами смежных кластеров. В модифицированном методе сохраняется оригинальная идея и стратегия вычислений, но меняется функция вычисления расстояния между парами смежных кластеров. Вместо произведения межклассовой и внутриклассовой дисперсий используется приращение суммарной квадратичной ошибки ΔE . Эта модификация в два раза уменьшает количество сопутствующих операций по вычислению расстояния между очередной парой смежных кластеров, что значительно облегчает труд программирования.

Применение приращения суммарной квадратичной ошибки ΔE также изменило порядок последовательности объединения пар смежных кластеров, значения средних яркостей по кластерам разбиений. Установлено, что генерируемая модифицированным методом мультипороговой обработки серия кусочно-постоянных разбиений является оптимальной. Об этом свидетельствует выпуклая кривая зависимости значений суммарных квадратичных ошибок E от числа кластеров N в разбиении.

Преимущество использования суммарной квадратичной ошибки E также в том, что с каждым очередным шагом объединения пары смежных кластеров ее значение накапливается. Аккумулированное значение (9) служит индикатором качества разбиения на кластеры, что является очередным преимуществом перед оригинальным методом.

В настоящей работе рассмотрено два расчетных примера последовательного объединения кластеров пикселей в оригинальном и модифицированном варианте над одним набором данных, что позволяет программисту реализовать оба варианта метода с минимальными затратами временных ресурсов.

Исследование выполнено в рамках бюджетной темы 0060-2019-0011

(Фундаментальные основы и технологии больших данных для

социокиберфизических систем).

Библиографический список

1. Tajbakhsh N. et al. Embracing imperfect datasets: A review of deep learning solutions for medical image segmentation // Medical Image Analysis, 2020, pp. 101693. URL: <https://arxiv.org/pdf/1908.10454.pdf>
2. Stathopoulou E.K., Remondino F. Semantic photogrammetry: boosting image-based 3D reconstruction with semantic labeling // The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 2019, vol. 42, no. 2, pp. 1 - 7. DOI:[10.5194/isprs-archives-XLII-2-W9-685-2019](https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLII-2-W9-685-2019)
3. Hossain M.D., Chen D. Segmentation for Object-Based Image Analysis (OBIA): A review of algorithms and challenges from remote sensing perspective // Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 2019, no. 150, pp. 115 - 134. DOI: [10.1016/j.isprsjprs.2019.02.009](https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2019.02.009)
4. Khanykov I.G., Tolstoj I.M., Levonevskiy D.K. The classification of the image segmentation algorithms // International Journal of Intelligent Unmanned Systems, 2020, vol. 8, no. 2, pp. 115 - 127. DOI: [10.1108/IJIUS-07-2019-0031](https://doi.org/10.1108/IJIUS-07-2019-0031)
5. Agus Zaina Arifin, Akira Asosno. Image segmentation by histogram thresholding using hierarchical cluster analysis // Pattern Recognition Letters, 2006, no. 27 (13), pp. 1515 – 1521. DOI: [10.1016/j.patrec.2006.02.022](https://doi.org/10.1016/j.patrec.2006.02.022)
6. Sobel I., Feldman G. A 3x3 Isotropic Gradient Operator for Image Processing, A Talk at the Stanford Artificial Project, 1968, pp. 271 - 272.
7. Ватутин Э.И., Мирошниченко С.Ю., Титов В.С. Программная оптимизация оператора Собела с использованием SIMD-расширений процессоров семейства x86 // Телекоммуникации. 2006. № 6. С. 12 - 16.

8. Scharr H. Optimale Operatoren in der Digitalen Bildverarbeitung: Dissertation. 2000, URL: <https://doi.org/10.11588/heidok.00000962>
9. Jähne B., Scharr H., Körkel S. Principles of filter design. In Handbook of Computer Vision and Applications, Academic Press, 1999.
10. Roberts L. Machine Perception of 3-D Solids, Optical and Electro-optical Information Processing, MIT Press, New York, 1965.
11. Samuel J. Dwyer III. A personalized view of the history of PACS in the USA // In: Proceedings of the SPIE, Medical Imaging 2000: PACS Design and Evaluation: Engineering and Clinical Issues, 2000. URL: <https://doi.org/10.1117/12.386388>
12. Canny J. A computational approach to edge detection // IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, 1986, no. 6, pp. 679 - 698. DOI: [10.1109/TPAMI.1986.4767851](https://doi.org/10.1109/TPAMI.1986.4767851)
13. Nixon M.S., Aguado A.S. Feature Extraction and Image Processing, Academic Press, 2008, 424 p.
14. Маслов А.М., Сергеев В.В. Идентификация линейной искажающей системы с использованием ранговой обработки сигналов // Компьютерная оптика. 1990. № 6. С. 97 - 102.
15. Otsu N. A threshold selection method from gray-level histograms // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1979, vol. 9, no. 1, pp. 62 - 66.
16. Ping-Sung Liao, Tse-Sheng Chen, Pau-Choo Chung. A Fast Algorithm for Multilevel Thresholding // [Journal of Information Science and Engineering](#), 2001, vol. 17 (5), pp. 713 - 727.

17. Трусфус М.В., Абдуллин И.Н. Алгоритм обнаружения маркерных изображений для вертикальной посадки беспилотного летательного аппарата //

Труды МАИ. 2021. № 116. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=121099>.

DOI:[10.34759/TRD-2021-116-13](https://doi.org/10.34759/TRD-2021-116-13).

18. Корнеев М.А., Максимов А.Н., Максимов Н.А. Методы выделения точек привязки для визуальной навигации беспилотных летательных аппаратов // Труды

МАИ. 2012. № 58. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=33061>

19. Лунев Е.М., Павлова Н.В. Программно-алгоритмическое обеспечение для определения навигационных параметров беспилотного летательного аппарата на базе фотоизображения // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т. 16.

№ 6. С. 111 – 119.

20. Бурага А.В., Костюков В.М. Сравнительный анализ пассивных методов измерения дальности для малого беспилотного летательного аппарата // Труды

МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29624>

21. Khanykov I.G., Kharinov M.V., Patel C. Image Segmentation Improvement by Reversible Segment Merging // International Conference on Soft Computing and its Engineering Applications (icSoftComp), 2017, Changa, Anand, India.

DOI:[10.1109/ICSOFTCOMP.2017.8280096](https://doi.org/10.1109/ICSOFTCOMP.2017.8280096)

22. Харинов М.В., Ханьков И.Г. Оптимизация кусочно-постоянного приближения сегментированного изображения // Труды СПИИРАН. 2015. Т. 3. № 40. С. 183 - 202.

Technology modification for distance calculation between pairs of adjacent clusters in multilevel thresholding

Khanykov I.G.

Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences,

14th Line, 39, Saint-Petersburg, 199178, Russia

e-mail: igk@ias.spb.su

Abstract

The article considers the multi-threshold images processing technology, which consists in generating a series of partitions into clusters for the original grayscale image. Each image is being assigned to its own brightness histogram, which every column is a separate cluster of pixels. A cluster is being characterized by the number of pixels it contains and the average brightness value. All pairs of adjacent clusters are being browsed while traversing over the brightness histogram. The pair of clusters with the minimum distance between them is being selected for merging at the end of the histogram traversing. In general case, 256 partitions are available by the number of the gray levels. In a special case, when the image consists of K grey levels ($K < 256$), and there is a need to find a partition from t levels of grey, the necessity to generate $K - t$ partition into clusters will arise. With the original version of the multi-threshold processing method, the distance between the pairs of adjacent clusters was computed through the product of the intra-class and interclass dispersions, which requires considering the brightness histogram as a function of the probability density. The original technique is full of complex design equations. The modification proposed in the presented work allows computing the distance between the pairs of adjacent clusters by the increment of the total quadratic error. This

modification is justified by a number of reasons. Firstly, the number of computational operations reduces twofold. Secondly, the accumulated value of the total quadratic error, expressed through the mean-square deviation, serves as the quality indicator of the image partitioning to clusters. Thirdly, the set of the total quadratic errors, characterizing the series of partitions into clusters, forms optimal sequence of partitions as evidenced by the convex curve.

Keywords: multilevel thresholding, standard deviation, piecewise-constant partition, grayscale image, pixel clusters.

References

1. Tajbakhsh N. et al. Embracing imperfect datasets: A review of deep learning solutions for medical image segmentation, *Medical Image Analysis*, 2020, pp. 101693. URL: <https://arxiv.org/pdf/1908.10454.pdf>
2. Stathopoulou E.K., Remondino F. Semantic photogrammetry: boosting image-based 3D reconstruction with semantic labeling, *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 2019, vol. 42, no. 2, pp. 1 - 7. DOI: [10.5194/isprs-archives-XLII-2-W9-685-2019](https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLII-2-W9-685-2019)
3. Hossain M.D., Chen D. Segmentation for Object-Based Image Analysis (OBIA): A review of algorithms and challenges from remote sensing perspective, *Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2019, no. 150, pp. 115 - 134. DOI: [10.1016/j.isprsjprs.2019.02.009](https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2019.02.009)

4. Khanykov I.G., Tolstoj I.M., Levonevskiy D.K. The classification of the image segmentation algorithms, *International Journal of Intelligent Unmanned Systems*, 2020, vol. 8, no. 2, pp. 115 - 127. DOI: [10.1108/IJIUS-07-2019-0031](https://doi.org/10.1108/IJIUS-07-2019-0031)
5. Agus Zaina Arifin, Akira Asosno. Image segmentation by histogram thresholding using hierarchical cluster analysis, *Pattern Recognition Letters*, 2006, no. 27 (13), pp. 1515 – 1521. DOI: [10.1016/j.patrec.2006.02.022](https://doi.org/10.1016/j.patrec.2006.02.022)
6. Sobel I., Feldman G. *A 3x3 Isotropic Gradient Operator for Image Processing*, A Talk at the Stanford Artificial Project, 1968, pp. 271 - 272.
7. Vatutin E.I., Miroshnichenko S.Yu., Titov V.S. *Telekommunikatsii*, 2006, no. 6, pp. 12 - 16.
8. Scharr H. *Optimale Operatoren in der Digitalen Bildverarbeitung: Dissertation*. 2000, URL: <https://doi.org/10.11588/heidok.00000962>
9. Jähne B., Scharr H., Körkel S. *Principles of filter design*. In Handbook of Computer Vision and Applications, Academic Press, 1999.
10. Roberts L. *Machine Perception of 3-D Solids*, Optical and Electro-optical Information Processing, MIT Press, New York, 1965.
11. Samuel J. Dwyer III. *A personalized view of the history of PACS in the USA*. In: Proceedings of the SPIE, Medical Imaging 2000: PACS Design and Evaluation: Engineering and Clinical Issues, 2000. URL: <https://doi.org/10.1117/12.386388>
12. Canny J. A computational approach to edge detection, *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 1986, no. 6, pp. 679 - 698. DOI: [10.1109/TPAMI.1986.4767851](https://doi.org/10.1109/TPAMI.1986.4767851)

13. Nixon M.S., Aguado A.S. *Feature Extraction and Image Processing*, Academic Press, 2008, 424 p.
14. Maslov A.M., Sergeev V.V. *Komp'yuternaya optika*, 1990, no. 6, pp. 97 - 102.
15. Otsu N. A threshold selection method from gray-level histograms, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1979, vol. 9, no. 1, pp. 62 - 66.
16. Ping-Sung Liao, Tse-Sheng Chen, Pau-Choo Chung. A Fast Algorithm for Multilevel Thresholding, *Journal of Information Science and Engineering*, 2001, vol. 17 (5), pp. 713 - 727.
17. Trusfus M.V., Abdullin I.N. *Trudy MAI*, 2021, no. 116. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=121099>. DOI: [10.34759/TRD-2021-116-13](https://doi.org/10.34759/TRD-2021-116-13)
18. Korneev M.A., Maksimov A.N., Maksimov N.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 58. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=33061>
19. Lunev E.M., Pavlova N.V. *Aerospace MAI Journal*, 2009, vol. 16, no. 6, pp. 111 – 119.
20. Buraga A.V., Kostyukov V.M. *Trudy MAI*, 2012, no. 53. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29624>
21. Khanykov I.G., Kharinov M.V., Patel C. Image Segmentation Improvement by Reversible Segment Merging, *International Conference on Soft Computing and its Engineering Applications (icSoftComp)*, 2017, Changa, Anand, India. DOI: [10.1109/ICSOFTCOMP.2017.8280096](https://doi.org/10.1109/ICSOFTCOMP.2017.8280096)
22. Kharinov M.V., Khanykov I.G. *Trudy SPIIRAN*, 2015, vol. 3, no. 40, pp. 183 - 202.