

УДК 539.3

Решение краевых осесимметричных задач смешанного типа для анизотропных тел вращения с массовыми силами

Иванычев Д.А.

Липецкий государственный технический университет,

ул. Московская, 30, Липецк, 398600, Россия

e-mail: Lsivdml@mail.ru

Статья поступила 06.03.2019

Аннотация

В работе разработана методика решения смешанных осесимметричных задач для тел поверхностями вращения из трансверсально-изотропного материала, находящихся под действием массовых сил. Особенность задачи заключается в том, что полученные характеристики упругого поля внутри области удовлетворяют не только граничным условиям, но заданным массовым силам. Методика предполагает развитие метода граничных состояний. Представлено решение частной смешанной задачи теории упругости для кругового цилиндра. Полученные поля характеристик напряженно-деформируемого состояния представлены в графическом виде.

Ключевые слова: метод граничных состояний, смешанная задача, массовые силы, трансверсально-изотропный цилиндр, осесимметричные задачи.

Современные материалы, применяемые в авиационной, ракетно-космической технике, обладают анизотропией в отношении упругих свойств, поэтому детали, изготовленные из таких материалов, требуют создание специальных или усовершенствование существующих методов расчета на прочность, жесткость, устойчивость и т.д. Усложняет задачу то, что зачастую эти детали пребывают в сложных кинематических условиях. С точки зрения теории упругости на эти тела действуют массовые силы, а на поверхность наложены условия кинематического и физического характера. Расчет напряженно-деформированного состояния от совокупности таких воздействий, а так же в силу сложной природы материала, составляет актуальную научную задачу.

Смешанные задачи в теории упругости рассматривались реже, чем задачи с односторонними граничными условиями, однако их исследование проводилось в приложении к различным направлениям механики. Например, в работе [1] рассматривался алгоритм численного решения смешанной задачи теории упругости для тела, имеющего одностороннее контактное взаимодействие с упругим полупространством. В работе [2] предложен аналитический метод решения смешанной плоской задачи теории упругости для двухслойной кольцевой области. В работе [3] проведен математический и численный анализ асимптотических решений трехмерных статических задач теории упругости со смешанными граничными условиями. В работе [4] Для решения смешанных задач использовались конечно-элементные технологии, основанные на смешанной формулировке, построенной с помощью функционала Рейсснера. В работе [5] метод граничных состояний

применен для решения смешанных задач теории изотропной упругости, а в работе [6] он получил развитие на класс смешанных задач для неограниченной упругой среды с полостями.

Массовые силы в задачах механики твердых тел просматривались в следующих работах. В работе [7] с использованием метода взвешенных невязок в форме метода граничного решения найдено распределения напряжений и смещений в упругом теле, подверженном действию заданной системы объемных сил и заданных напряжений или смещений на границах. В работе [8] рассматривались задачи теории упругости с заданными объемными и поверхностными силами в функциональных энергетических пространствах тензоров напряжений и деформаций; методом ортогональных проекций решены конкретные задачи. В работе [9] для перемещений получено условие эквивалентности поверхностных и объемных сил, используя вариационное уравнение Лагранжа. В работе [10] получены точные аналитические решения задач о равновесии толстостенных трансверсально-изотропных составных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления.

Работа [11] посвящена обратному методу определения напряженно-деформированного состояния изотропных упругих тел от действия непрерывных непотенциальных объемных сил.

Метод граничных состояний с участием объемных сил для изотропной среды применен в работе [12]. В [13] продемонстрирован прием включения в круг расчетных вопросов метода граничных состояний объемных сил упругой среды, составляющих линейную комбинацию «эталонных» воздействий на односвязное

ограниченное тело. В работах [14], [15] разработана методика получения полнопараметрических решений для изотропных и анизотропных тел, где возникновение фиктивных массовых сил являлось следствием применения метода Пуанкаре. В работе [16] метод граничных состояний применен для решения задач эластостатики с полостями и включениями.

В работе [17] метод граничных состояний применен для решения задач кручения стержней сложной формы из анизотропных материалов. Решение строилось на основе общего представления задачи Сен-Венана для анизотропного случая.

В работе [18] предложена модель определения напряженно-деформированного состояния в слоистой криволинейной анизотропной балке при изгибе.

В рамках настоящей работы предполагается развитие энергетического метода граничных состояний на класс смешанных задач теории упругости с массовыми силами для трансверсально-изотропных тел вращения. Особенность решения состоит в том, что упругое поле в краевой задаче не просто суммируется с упругим полем от действия массовых сил, определение которого в случае непотенциальных массовых сил само по себе составляет непростую задачу, а «встроено» таким образом, что след полученного упругого поля на границе, удовлетворяет заданным условиям.

1. Постановка задачи

Рассматривается трансверсально-изотропное тело, ограниченное одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения из трансверсально-

изотропного материала (рис. 1). В основной смешанной задаче требуется восстановить механическое поле в области V по заданным массовым силам \mathbf{X} внутри области, поверхностным усилиям \mathbf{p} на части границе S_p и перемещениям \mathbf{u} на части границе S_u . Естественно что $S = S_p + S_u$.

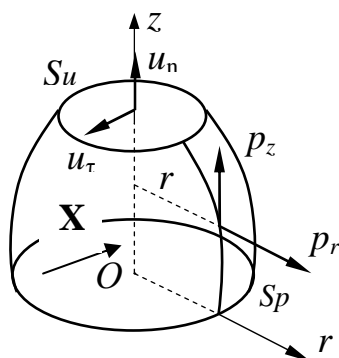


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения

Решение поставленной задачи может быть проведено следующим путем: сначала решить краевую задачу механики от внешних условий, затем отдельно решить задачу по определению упругого состояния от массовых сил, а полученные поля механических характеристик сложить. Однако в этом случае суммарное упругое поле не будет удовлетворять одновременно условиям на границе и массовым силам внутри области.

Целью работы является развитие метода граничных состояний на класс смешанных осесимметричных задач теории упругости для трансверсально-изотропных тел вращения, в которых упругое поле от массовых сил не просто суммируется с полем от граничных условий, а встроено в решение, позволяя получить упругое поле, удовлетворяющее заданным условиям, как на границе, так и внутри области. Для ее достижения необходимо выполнить: корректную постановку

задачи, обезразмеривание физических констант, выбор метода решения с построением определяющей теории, и ее реализация в решении конкретных задач.

2. Определяющие соотношения для среды

Для однородной трансверсально-изотропной среды в цилиндрических координатах имеют место следующие соотношения [19].

Дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрической системе координат z, r, θ имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} + Z &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + Q &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где R, Z, Q – массовые силы.

Соотношения Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Обобщенный закон Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)]; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E_r} (\sigma_{\theta} - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z;$$

$$\gamma_{zr} = \frac{1}{G_z} \tau_{zr}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_r)}{E_r} \tau_{r\theta},$$

где E_z и E_r – модули упругости соответственно в направлении оси z и в плоскости изотропии, ν_z – коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль r при растяжении вдоль оси z , ν_r – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскостях изотропии при растяжении в этих же плоскостях, G_r и G_z – модуль сдвига в плоскостях изотропии и перпендикулярных к ним.

3. Общее решение задачи эластостатики

В работе [19] с помощью метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженным и деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела и определенными вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат z и y (переменных).

Переход к осесимметричному пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям [20]:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_z^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{zr} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{zy}^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \\ \sigma_r - \sigma_{\theta} &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} - \sigma_{\eta}^{pl})(2y^2 - r^2)}{r^2 \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_r + \sigma_{\theta} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} + \sigma_{\eta}^{pl})}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad (4) \\ u &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad w = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_z^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad v = 0; \\ \sigma_{z\theta} &= \sigma_{r\theta} = 0. \end{aligned}$$

4. Метод решения

Для решения поставленной задачи прибегнем к понятиям метода граничных состояний (МГС) [21]. Основу метода составляют пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \quad \Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}. \quad (5)$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, теноров деформаций и напряжений:

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}.$$

Воспользуемся при построении решения основных задач механики уравнением Клапейрона при упругом равновесии тела [22]:

$$\int_V \mathbf{X} \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{P}_v \mathbf{u}_v dS - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0. \quad (6)$$

Придавая перемещениям возможные вариации $\delta \mathbf{u}$, последнее уравнение преобразуется в вариационное уравнение Лагранжа [23].

Запишем уравнение Клапейрона в следующем виде:

$$\int_V (\sigma_{ij}^i \varepsilon_{ij}^j + \sigma_{ij}^j \varepsilon_{ij}^i) dV = \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{P}_v^i \mathbf{u}_v^j dS + \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_S \mathbf{P}_v^j \mathbf{u}_v^i dS, \quad (7)$$

и будем определять скалярные произведения в базисе внутренних состояний следующим образом (например, для 1-го и 2-го внутреннего состояния):

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V (\varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1) dV, \quad (8)$$

причем в силу тождества Бетти:

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1) = \int_V (\varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1) dV = \int_V (\varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2) dV = 2 \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV.$$

Граничное состояние γ_k , в отличие от традиционного $\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k\}$, определяемого в [21], будем формировать наборами компонент вектора перемещения точек границы u_{vi} , поверхностными усилиями p_i и массовыми силами X_i (последнее условно в силу того, что массовые силы не относятся к элементу поверхности тела):

$$\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k, X_i^k\}, p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j,$$

где n_j – компонента нормали к границе.

В пространстве граничных состояний Γ согласно (7) скалярное произведение выражает двойную работу внешних сил по поверхности тела S и двойную работу массовых сил на перемещениях u_i внутренних точек тела:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV + \int_S p_i^2 u_{vi}^1 dS + \int_V X_i^2 u_i^1 dV = 2 \int_V X_i^1 u_i^2 dV + 2 \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS.$$

причем свойство коммутативности выполняется: $(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1)$.

В случае гладкой границы и в силу (6) оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. По определению, каждому элементу $\xi_k \in \Xi$ соответствует единственный элемент $\gamma_k \in \Gamma$, причем это соответствие взаимно-однозначное: $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$. Это позволяет отыскание внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от граничных условий (ГУ).

Ортонормирование базиса пространства Ξ осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [24], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимаются (8).

Проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье, разложения искомого внутреннего ξ и граничного γ состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k ; \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k$$

или в развернутом виде:

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k ; u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k ; \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k ; \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k ; X_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_i^k . \quad (9)$$

Ортонормированный базис позволяет для элементов базиса граничных состояний записать следующие выражения:

$$2 \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + 2 \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS + 2 \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS + 2 \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + 2 \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS + 2 \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS = 2 \delta_{ij} ; \quad (10)$$

$$2 \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + 2 \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS + 2 \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS = - \left[2 \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + 2 \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS + 2 \int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS \right], \quad i \neq j .$$

Представим слагаемые из (10) в следующем виде (нижний индекс v в развернутых выражениях опущен):

$$\int_S \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS = \int_{S_u} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u + \int_{S_p} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p ; \int_S \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS = \int_{S_u} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_u + \int_{S_p} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p ,$$

и подставляя их в (10), получим:

$$2 \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_{S_p} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p + \int_{S_u} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u + \int_{S_p} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p + \int_{S_u} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_u + \\ + 2 \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_{S_p} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p + \int_{S_u} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_u + \int_{S_p} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p + \int_{S_u} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u = 2 \delta_{ij} .$$

Группируя слагаемые и обозначая:

$$\beta_{ij} = 2 \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + 2 \int_{S_p} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p + 2 \int_{S_u} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_u ;$$

$$\lambda_{ij} = 2 \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + 2 \int_{S_p} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v^i dS_p + 2 \int_{S_u} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_u ;$$

легко убедиться что $\beta_{ij} + \lambda_{ij} = 2 \delta_{ij}$.

Преобразуем λ_{ij} следующим образом: базисные механические характеристики \mathbf{X}^j , p_τ^j , u_n^j заменяем заданными, и перебор будем осуществлять по индексу j , образуя тем самым матрицы коэффициентов:

$$\alpha_j = 2 \int_V \mathbf{X} \mathbf{u}^j dV + 2 \int_{S_p} \mathbf{p}_v \mathbf{u}_v^j dS_p + 2 \int_{S_u} \mathbf{p}_v^j \mathbf{u}_v dS_u; \mathbf{A} = [\alpha_j]_N. \mathbf{B} = [\beta_{ij}]_{N \times N}. \quad (11)$$

Следует отметить, что матрица \mathbf{B} является кососимметричной, ($\beta_{ij} = -\beta_{ji}$, $i \neq j$). Коэффициенты Фурье $c = \{c_k\}_N$ рассчитываются так:

$$c = \{c_k\}_N = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}, \quad (12)$$

где N – число используемых элементов базиса.

Окончательно решение имеет вид (9). Тестирование коэффициентов Фурье осуществляется подстановкой одного из базисных элементов с соответствующими ГУ в качестве заданного, при этом должны выполняться условия $c_n = 1$, n – номер тестируемого элемента, остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

5. Формирование базиса

Основную сложность формирования решения в МГС является конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды; также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

В работе [11] изложена методика определения напряженно-деформированного состояния изотропных тел от объемных сил.

Для построения поля перемещений от массовых сил для плоских вспомогательных состояний применяется фундаментальная ортонормированная

система многочленов $y^\alpha z^\beta$, которую можно поместить в любую позицию вектора перемещения $\mathbf{u}^{pl}(y, z)$, образуя некоторое допустимое упругое плоское вспомогательное состояние:

$$\mathbf{u}^{pl} = \left\{ \left\{ y^\alpha z^\beta, 0 \right\}, \left\{ 0, y^\alpha z^\beta \right\} \right\}.$$

Перебор всевозможных вариантов в пределах $\alpha + \beta \leq n$, ($n = 1, 2, 3 \dots$) позволяет получить множество состояний. Далее согласно (4) определяются компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}(r, z)$ пространственного осесимметричного состояния и затем определяются соответствующие тензоры деформаций, напряжений и массовые силы по цепочке (3), (2), (1) образуя конечномерный базис в задаче от массовых сил:

$$\Xi^X = \left\{ \xi_1^X, \xi_2^X, \xi_3^X, \dots, \xi_k^X, \dots \right\}.$$

В работе [20] приведен прием конструирования базисных наборов плоских вспомогательных состояний в задаче эластостатики при отсутствии массовых сил. Аналогично, как и здесь, переход к трехмерному состоянию осуществляется по зависимостям (4), образуя базис:

$$\Xi^S = \left\{ \xi_1^S, \xi_2^S, \xi_3^S, \dots, \xi_k^S, \dots \right\}.$$

Окончательно базис (5) представляет собой объединение:

$$\Xi = \left\{ \xi_1^S, \xi_2^X, \xi_3^S, \xi_4^X, \dots, \xi_{k-1}^S, \xi_k^X, \dots \right\};$$

в силу того что ГУ совместно с массовыми силами образуют сложное напряженно-деформированное состояние тела, которое одними «уравновешенными» или

«неуравновешенными» (напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия с массовыми силами) базисными состояниями приблизить нельзя.

6. Решение задачи для цилиндра

Исследуем упругое состояние трансверсально-изотропного кругового в плане цилиндра занимающего область $V = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 4\}$ из горной породы алевролита крупного темно-серого [22]. После процедуры обезразмеривания, упругие характеристики материала: $E_z = 6.21$; $E_r = 5.68$; $G_z = 2.55$; $\nu_z = 0.22$; $\nu_r = 0.24$.

Граничные условия представляют собой жесткую сцепку одного из торцов цилиндра и неоднородные внешние силы на другом (рис. 2). На тело действуют массовые силы \mathbf{X} .

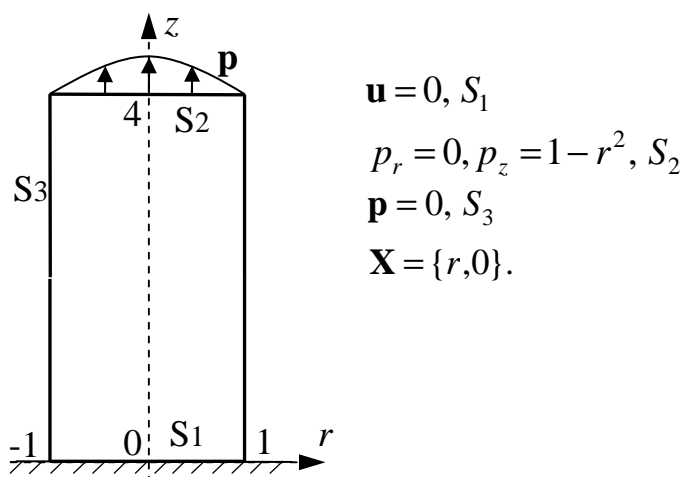


Рис. 2. Граничные условия к задаче для цилиндра

После ортонормирования и исключения линейно-зависимых элементов, базисный набор для компонент вектора перемещения представлен в таблице 1 (показано 5 элементов). Здесь и далее истинное значение величины равно произведению показанной величины на масштабный множитель k .

Перемещения ортонормированного базиса ($k = 10^{-2}$)

	u	w
ξ_1	0	18.66z
ξ_2	13.1017r	-7.37448z
ξ_3	0	-32.32z + 8.08z ²
ξ_4	-20.4149r + 10.2074rz	4.5644r ² + 11.4809z - 2.8727z ²
ξ_5	-9.90943r + 4.95471rz	-22.3952r ² + 5.5776z - 1.3944z ²

При решении использовался базис в 30 элементов. Приведем значения для пяти коэффициентов Фурье (12): $c_1 = 0.37313$, $c_2 = 0.10614$, $c_3 = 0.00011$, $c_4 = 0.01059$, $c_5 = 0.018402$.

Рис. 3 представляет собой график, иллюстрирующий «насыщение» суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя). Это является косвенным признаком сходимости решения.

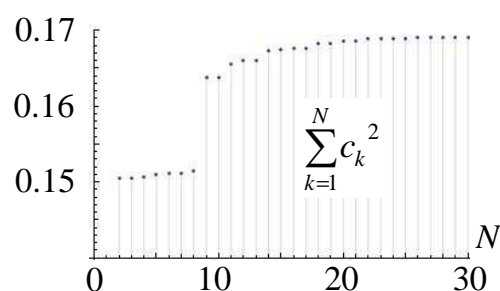


Рис. 3. Сумма Бесселя в задаче для цилиндра

Искомые характеристики определяются по зависимостям (9). Приведем выражения для восстановленных массовых сил ($k = 10^{-5}$):

$$R = 101699r + 775.779r^3 - 2357.95rz + 541.502rz^2;$$

$$Z = 2653.82 - 3592.66r^2 - 2281.18z + 1497.94r^2z + 636.675z^2 - 68.606z^3.$$

Проверка результата и оценка точности осуществляется сопоставлением заданных ГУ с восстановленными в результате решения (рис. 4). Здесь и далее, на графиках: $\cdot \cdot \cdot \cdot$ – заданные ГУ; — – восстановленные ГУ.

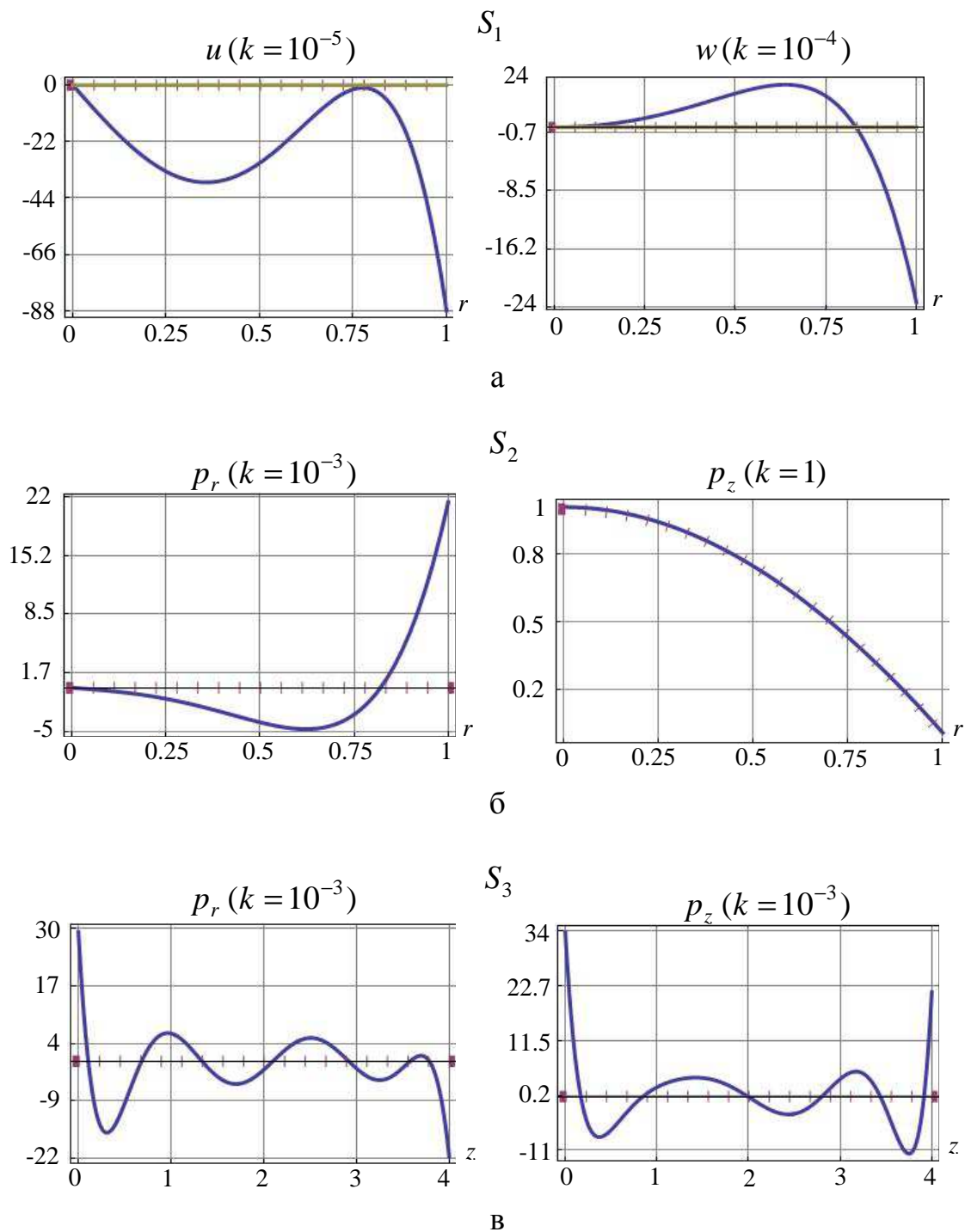


Рис. 4. Верификация граничных условий, а – на участке поверхности S_1 , б – на участке поверхности S_2 , в – на участке поверхности S_3

Остальные механические характеристики, имеющие полиномиальный вид, представим в виде изолиний (в явном виде необозримы) (рис. 5). В силу осевой симметрии показана область $0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 4$.

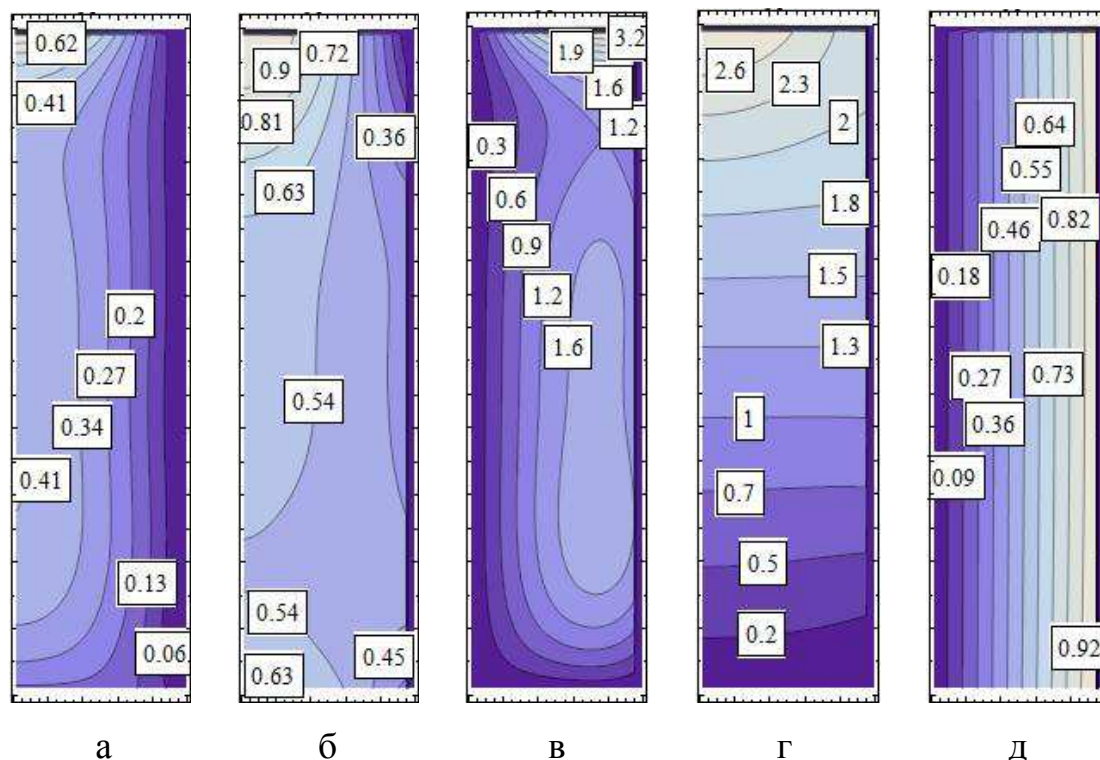


Рис. 5. Механические характеристики, а – напряжение σ_{rr} ($k = 1$),

б – напряжение σ_{zz} ($k = 1$), в – перемещение u ($k = 10^{-2}$), г – перемещение w

($k = 10^{-1}$), д – массовая сила R ($k = 1$)

Таким образом, метод граничных состояний показал свою эффективность в плане решения осесимметричных смешанных задач для ограниченных трансверсально-изотропных тел вращения с учетом массовых сил. Сложность задачи заключается в том, что восстановление искомого упругого поля осуществляется одновременно по трем направлениям (три интеграла в выражении для α_i (11)): массовые силы \mathbf{X} , поверхностные усилия на участке S_p , перемещения

точек границы на участке S_u . Преимущество метода граничных состояний заключается в том, что ортонормированный базис для тела строится ровно один раз и может использоваться для решения различных краевых задач смешанного типа. Базисные элементы заранее удовлетворяют всем уравнениям теории упругости, а, следовательно, и окончательное решение, т.е. их линейная комбинация, тоже будет удовлетворять этим уравнениям.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №19-41-480003 "p_a".

Библиографический список

1. Станкевич И.В. Численное решение смешанных задач теории упругости с односторонними связями // Математика и математическое моделирование. 2017. № 5. С. 40 - 53. doi: 10.24108/mathm.
2. Божкова Л.В., Рябов В.Г., Норицина Г.И. Смешанная плоская задача теории упругости для двухслойной кольцевой области // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2011. № 1 (11). С. 217 - 221.
3. Соболев Б.В. Об асимптотических решениях трехмерных статических задач теории упругости со смешанными граничными условиями // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С. 1778 - 1780.
4. Станкевич И.В. Математическое моделирование задач теории упругости с использованием МКЭ на основе функционала Рейсснера // Символ науки. 2017. № 4 (2). С. 21 - 25.

5. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Применение метода граничных состояний для решения основной смешанной задачи линейного континуума // Известия Тульского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2000. Т. 6. № 2. С. 124 - 127.
6. Пеньков В.Б., Саталкина Л.В., Шульмин А.С. Основная смешанная задача для сферической полости в упругом пространстве // Известия Тульского государственного университета. Серия: Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 207 - 215.
7. Голоскоков Д.П., Данилюк В.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел с помощью полиномов // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2013. № 1. С. 8 - 14.
8. Стружанов В.В. О решении краевых задач теории упругости методом ортогональных проекций // Математическое моделирование систем и процессов. 2004. № 12. С. 89 - 100.
9. Агаханов Э.К., Магомедэминов Н.С. Условия эквивалентности воздействий для перемещений // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2007. № 12. С. 27 - 28.
10. Фукалов А.А. Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник

докладов. (Казань, 20-24 августа 2015). – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. С. 3951 - 3953.

11. Левина Л.В. Кузьменко Н.В. Обратный метод эффективного анализа состояния упругого тела от массовых сил из класса непрерывных // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник докладов. (Казань, 20-24 августа 2015). – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. С. 2276 - 2278.

12. Пеньков В.Б., Пеньков В.В., Викторов Д.В. Учет массовых сил в методе граничных состояний // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т.11. № 2. С. 94 - 100.

13. Пеньков В.Б., Новикова О.С., Левина Л.В. Состояние упругого тела при нагружении комбинацией объемных сил // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2017. № 4. С. 25 - 56.

14. Penkov V.B., Ivanychev D.A., Novikova O.S., Levina L.V. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations // Journal of Physics: Conf. Series 973 (2018) 012015, doi :10.1088/1742-6596/973/1/012015.

15. Penkov V.B., Levina L.V., Novikova O.S., Shulmin A.S. An algorithm for analytical solution of basic problems featuring elastostatic bodies with cavities and surface flaws // Journal of Physics: Conf. Series 973 (2018) 012016, doi :10.1088/1742-6596/973/1/012016.

16. Penkov V.B., Satalkina L.V., Shulmin A.S. The use of the method of boundary states to analyse an elastic medium with cavities and inclusions // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2014, vol. 78, no. 4, pp. 384 - 394.
17. Ivanychev D.A, Levina E.Yu., Abdullakh L.S., Glazkova Yu.A. The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length // International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies, 2019, vol. 10, no. 2, pp. 183 - 191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18, <http://TUENGR.COM/V10/183.pdf>
18. Русланцев А.Н., Думанский А.М., Алимов М.А. Модель напряженно-деформированного состояния криволинейной слоистой композитной балки // Труды МАИ. 2017. № 96. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=85659>
19. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. Применение методов теории функций комплексного переменного. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 464 с.
20. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в приложении к осесимметричным задачам для анизотропных тел // Вести высших учебных заведений Черноземья. 2014. № 1. С. 19 - 26.
21. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 115 - 137.
22. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977. - 416 с.
23. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. – 872 с.

24. Саталкина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Научная конференция студентов и аспирантов, посвященная 60-летию Липецкого государственного технического университета. Сборник тезисов докладов (Липецк, 24-25 мая). - Липецк: ЛГТУ, 2007. С. 130 - 131.