

УДК 519.62; 629.7.01, 623.465.7

Задача об аэроупругих колебаниях крылатой ракеты на основе метода Ритца

Благодырёва О.В.

*Корпорация «Тактическое ракетное вооружение»,
ул. Ильича, 7, Королёв, Московская область, 141080, Россия*

e-mail: OksanaBlag@yandex.ru

Аннотация

На основе метода Ритца построена математическая модель аэроупругих колебаний крылатой ракеты. Корпус и стабилизатор ракеты рассматриваются как абсолютно жёсткие тела, а крыло представляется упругой балкой, работающей на изгиб с поперечным сдвигом и на кручение. Аэродинамические нагрузки определяются на основе квазистационарной теории плоско-параллельного обтекания поперечных сечений крыла. Расчёты произведены в программной среде «WolframMathematica 8».

Ключевые слова: аэроупругие колебания, флаттер, метод Ритца, метод конечных элементов, моделирование колебаний летательного аппарата.

Введение

Аэродинамическая устойчивость крылатой ракеты в дозвуковом потоке воздуха является одним из важнейших факторов, определяющих эффективность её

применения. Аэроупругие колебания необходимо исследовать ещё на этапе проектирования, так как возникновение незатухающих упругих колебаний частей реальной конструкции (несущих поверхностей, органов управления, фюзеляжа) или всей ракеты в целом может привести к потере управляемости и даже разрушению.

Любой летательный аппарат (ЛА) представляет собой сложную конструкцию, для которой достаточно непросто найти в явном виде точное аналитическое решение задачи об аэроупругих колебаниях. Поэтому для исследования аэроупругой устойчивости часто применяют приближённые методы решения. Одним из них является метод Ритца [1].

Ранее на основе метода конечных элементов (МКЭ) автором был проведён расчёт аэроупругих колебаний [2] крылатой ракеты в дозвуковом потоке воздуха. При написании статьи также были изучены дополнительные источники литературы. Задаче об устойчивости крыла самолёта, находящегося в набегающем установившемся потоке воздуха с помощью МКЭ посвящены работы [3,4]. В [5] рассматривается обтекание потоком газа прямоугольного крыла большого удлинения, моделируемого тонким стержнем. Дифференциальные уравнения изгиба, поперечного сдвига и кручения, а также изгиб-но-крутильных колебаний крыла большого удлинения с учетом конусности, т.е. с учетом наклона образующих оболочки по отношению к продольной оси получены в [6].

Для статической прочности получены формулы оптимальных геометрических параметров панели, при которых не происходит потери упругой устойчивости [7].

Пример расчёта флаттера отдельных частей летательного аппарата в дозвуковом потоке на основе метода Ритца можно найти в статьях [8,9].

В статье [10] представлена упрощенная методика расчета колебаний панелей фюзеляжа самолета, проведена верификация результатов расчетов на собственные формы колебаний прямоугольной пластины и отсека фюзеляжа.

Общая постановка и схема решения задачи анализа аэроупругой устойчивости складных рулей описана в [11].

Аналитические зависимости угла атаки, угла наклона вектора скорости и угла тангажа ракеты по времени на пассивном участке управляемого полета ракеты приведены в [12]. Аэродинамические характеристики профиля крыла с нелинейно деформируемой мембраной в дозвуковом потоке рассматривается в [13].

Нестационарные аэродинамические нагрузки (приращение давления и обобщенные силы), действующие на деформируемый тонкий профиль крыла при его произвольном движении в несжимаемом потоке с поперечными порывами ветра, определяются в [14].

Постановка задачи

Рассмотрим упругую ракету, совершающую продольное короткопериодическое движение в несжимаемом потоке воздуха. Для решения задачи об определении аэроупругой устойчивости построим модель ракеты на основе балочной схемы [15], включающей в себя фюзеляж, две прямые консоли крыла и отклоняемые органы управления – рули высоты. Приводы с проводкой управления будем считать отсоединёнными, и их действие на конструкцию заменим неизвестными управляющими силами.

Уравнения малых колебаний системы запишем в форме уравнений Лагранжа второго рода в обобщённых координатах. В соответствии с [16,17] в качестве

обобщённых координат будем рассматривать нормальные координаты, представляющие движение по собственным формам колебаний свободной конструкции с закреплёнными органами управления.

Для решения задачи и анализа динамического поведения и устойчивости упругой системы [18,19,20] воспользуемся методом Ритца, с изменяемым числом аппроксимирующих функций, описывающих формы колебания упругого крыла ракеты. Проведём сравнительный анализ полученных результатов расчёта на конкретном примере.

Описание модели ракеты. Уравнение колебаний

Ракета представляет собой систему, состоящую из фюзеляжа, двух прямых консолей крыла и двух консолей руля высоты, рассматриваемых здесь как недеформируемые цельноповоротные стабилизаторы (Рисунок 1).

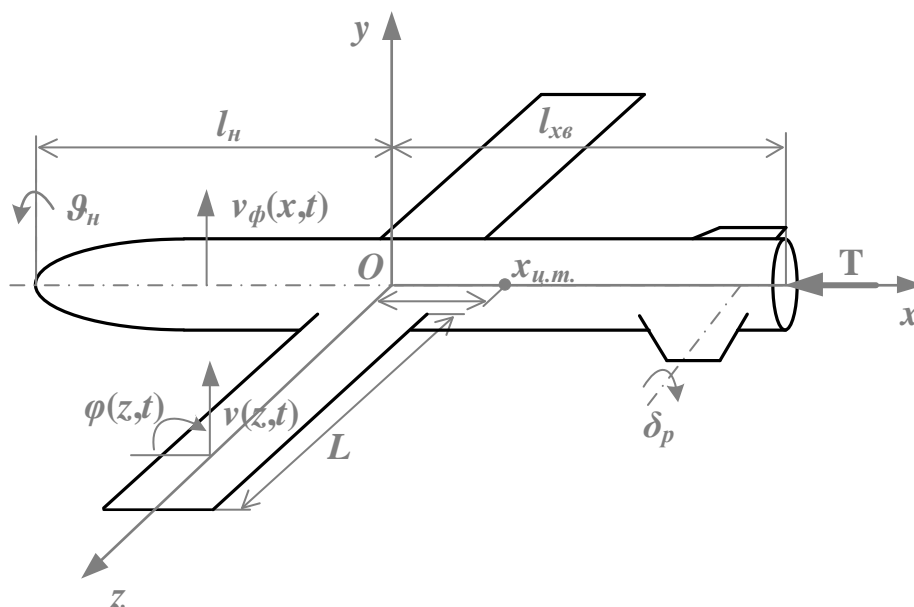


Рисунок 1. Схема крылатой ракеты

В возмущённом потоке воздуха на корпус и несущие поверхности ракеты действуют аэродинамические силы, влияющие на устойчивость движения ракеты.

Кроме того, следует учесть продольное сжатие корпуса ракеты под влиянием силы тяги двигателя.

В общем случае довольно сложно описать возмущённое движение упругой ракеты, имеющей бесконечное число степеней свободы, с учётом геометрических связей. Ограничимся набором s обобщённых координат $q_i(t)$, $i = \overline{1, \dots, s}$, соответствующих s степеням свободы. Уравнения колебаний ракеты в обобщённых координатах составим в форме уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, s}, \quad (1)$$

где T - кинетическая энергия системы, Π - потенциальная энергия системы, Q_i - обобщённая сила, соответствующая обобщённой координате q_i

Обобщённые координаты $q_i(t)$ являются скалярными функциями времени и могут представлять собой любые перемещения и углы поворота системы, характеризующие все s степеней свободы системы. Симметричные относительно плоскости xOy колебания фюзеляжа описываются с помощью поперечных перемещения абсолютно жёсткой ракеты $q_1(t)$ и угла поворота относительно центра тяжести $q_2(t)$. Горизонтальное оперение представляет собой недеформируемый цельноповоротный стабилизатор – руль высоты. Угол отклонения руля относительно корпуса ракеты описывается углом поворота относительно оси вращения стабилизатора $\delta_p(t)$:

$$\delta_p(t) = \delta_p^n(t) + q_3(t),$$

где $\delta_p^n(t)$ - заданное (программное) значение угла отклонения руля;

$q_3(t)$ - отклонение руля за счёт упругости проводки управления.

Консоли крыла симметричным образом изгибаются и закручиваются. Предполагается, что упругие колебания консолей крыла происходят в соответствии с гипотезой плоских сечений без сдвига.

В случае симметричных колебаний достаточно рассматривать только одну консоль крыла. Полученные для неё выражения кинетической и потенциальной энергий и вариации работы аэродинамических сил удваиваются. Интерференцией между крылом и горизонтальным оперением пренебрегаем.

Симметричные колебания ракеты описываются функциями $v_\phi(x,t)$, $v(z,t)$, $\varphi(z,t)$, представляющими собой поперечные перемещения оси фюзеляжа и оси крыла и угол закручивания крыла.

Кинематические условия абсолютно жёсткого сопряжения крыла с фюзеляжем ракеты имеют вид:

$$v(0,t) = v_\phi(0,t), \quad \varphi(0,t) = -v'_\phi(0,t). \quad (2)$$

Кинетическая энергия ракеты складывается из кинетических энергий фюзеляжа, крыла и горизонтального оперения:

$$T = T_\phi + 2T_{кр} + 2T_{зо},$$

где

$$T_\phi = \frac{1}{2} \int_{-l_u}^{l_{xg}} m_\phi \dot{v}_\phi^2 dx, \quad T_{кр} = \frac{1}{2} \int_0^L (m\dot{v}^2 - 2m\sigma\dot{v}\dot{\varphi} + J\dot{\varphi}^2) dz, \quad (3)$$

$$T_{zo} = \frac{1}{2} \left(m_c \dot{v}_\phi^2(x_c, t) - 2m_c \sigma_c \dot{v}_\phi(x_c, t) \dot{\mathcal{G}}_c + J_c \dot{\mathcal{G}}_c^2 \right),$$

$$\sigma_c = x_{ц.м.пл} - x_c, \quad \mathcal{G}_c = \delta_p^n - v'_\phi(x_c, t).$$

Здесь

m_ϕ - погонная масса фюзеляжа, $l_n, l_{xв}$ - расстояния до носового и хвостового сечений фюзеляжа, соответственно;

m - погонная масса крыла, σ - расстояние между осью жёсткости крыла и линией центров масс крыла (положительное, если линия центров масс лежит за осью жёсткости), J - погонный массовый момент инерции крыла относительно оси жёсткости крыла, L - размах крыла;

m_c - масса руля высоты (стабилизатора), $x_{ц.м.пл}$ - координата центра тяжести руля, σ_c - расстояние между осью жёсткости руля высоты и линией центров масс руля высоты (положительное, если линия центров масс лежит за осью жёсткости), x_c - координата оси вращения руля, J_c - момент инерции консоли руля высоты, \mathcal{G}_c - угол поворота руля.

Потенциальную энергию ракеты также представим в виде суммы энергий всех её компонентов

$$\Pi = \Pi_\phi + 2\Pi_{кр} + 2\Pi_{zo},$$

где

$$\Pi_\phi = \frac{1}{2} \int_{-l_n}^{l_{xв}} EI_\phi v_\phi''^2 dx, \quad \Pi_{кр} = \frac{1}{2} \int_0^L (EI v''^2 + GJ_{кр} \phi'^2) dz, \quad \Pi_{zo} = \frac{1}{2} k_c q_3^2. \quad (4)$$

Здесь EI_ϕ и EI - погонные изгибные жёсткости фюзеляжа и крыла, $GJ_{кр}$ - погонная крутильная жёсткость крыла, Π_{zo} - потенциальная энергия за счёт упругости проводки управления, k_c - коэффициент жёсткости проводки управления.

В случае абсолютно жесткой проводки управления, отклонение руля q_3 за счёт упругости проводки управления будет отсутствовать, и поворот на программный угол будет осуществляться без изменения потенциальной энергии, поэтому в рассматриваемой задаче $\Pi_{zo} = 0$.

Вариация работы аэродинамических нагрузок, действующих на корпус (фюзеляж), крылья и рули высоты будет иметь вид:

$$\delta A_{a/\partial} = \delta A_{a/\partial}^\phi + 2\delta A_{a/\partial}^{kp} + 2\delta A_{a/\partial}^{pl}, \quad (5)$$

где

$$\delta A_{a/\partial}^\phi = \int_{-l_u}^{l_{xg}} q_y \delta v_\phi dx, \quad \delta A_{a/\partial}^{pl} = \Delta Y_c \delta v_\phi(x_c, t) + \Delta M_{z,c} \delta \vartheta_c, \quad (6)$$

$$\delta A_{a/\partial}^{kp} = \int_0^L (\Delta Y \delta v + \Delta M \delta \varphi) dz.$$

Здесь $q_y(x, t)$ - подъемная сила, действующая в текущем сечении фюзеляжа:

$$q_y(x, t) = \frac{\rho V^2}{2} S_0 \bar{c}_y^\alpha(x) \alpha(x, t),$$

где α - местный угол атаки; S_0 - площадь миделя фюзеляжа; $\bar{c}_y^\alpha(x)$ - коэффициент подъёмной силы фюзеляжа.

При обтекании воздушным потоком корпуса, установленного под малым положительным углом атаки α , возникает нормальная сила, пропорциональная углу атаки. Согласно теории тонких осесимметричных тел нормальная сила появляется только на участках корпуса с переменной площадью поперечного сечения S_x . [21] В рассматриваемой задаче поперечное сечение корпуса имеет постоянную площадь, а изменением площади поперечного сечения носовой части можно пренебречь, и, следовательно, нормальная сила равна нулю.

Аэродинамические нагрузки, действующие на крыло при использовании гипотезы плоского обтекания профиля, записываются в виде

$$\begin{cases} \Delta Y = \frac{\rho V^2}{2} \cos^2 \chi b A_0(\varphi, v) + \frac{\rho V}{2} \cos \chi b A_1(\dot{\varphi}, \dot{v}), \\ \Delta M = \frac{\rho V^2}{2} \cos^2 \chi b^2 B_0(\varphi, v) + \frac{\rho V}{2} \cos \chi b^2 B_1(\dot{\varphi}, \dot{v}), \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A_0[\varphi, v] &= c_y^\alpha \varphi + (c_y^{\bar{\omega}_z} b \varphi' - c_y^\alpha v') \operatorname{tg} \chi, \\ B_0[\varphi, v] &= m_z^\alpha \varphi + (m_z^{\bar{\omega}_z} b \varphi' - m_z^\alpha v') \operatorname{tg} \chi, \\ A_1[\dot{\varphi}, \dot{v}] &= -c_y^\alpha \dot{v} + (c_y^{\bar{\omega}_z} + c_y^{\dot{\alpha}}) b \dot{\varphi} + (c_y^{\bar{\omega}_z} b \dot{\varphi}' - c_y^{\dot{\alpha}} \dot{v}') b \operatorname{tg} \chi, \\ B_1[\dot{\varphi}, \dot{v}] &= -m_z^\alpha \dot{v} + (m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\dot{\alpha}}) b \dot{\varphi} + (m_z^{\bar{\omega}_z} b \dot{\varphi}' - m_z^{\dot{\alpha}} \dot{v}') b \operatorname{tg} \chi. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь χ - угол стреловидности крыла.

В случае применения квазистационарной теории коэффициенты будут равны

$$c_y^\alpha = 2\pi, \quad c_y^{\bar{\omega}_z} = \frac{\pi}{2}, \quad m_y^\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad m_z^{\bar{\omega}_z} = 0, \quad c_y^{\dot{\alpha}} = c_y^{\bar{\omega}_z} = m_z^{\dot{\alpha}} = m_z^{\bar{\omega}_z} = 0. \quad (9)$$

Аэродинамические нагрузки, действующие на руль высоты, записываются как

$$\begin{cases} \Delta Y_c = Y^\alpha \alpha_c + Y^{\omega_z} \omega_z, \\ \Delta M_{z,c} = M_z^\alpha \alpha_c + M_z^{\omega_z} \omega_z; \end{cases}$$

где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$Y^\alpha = \frac{\rho V^2}{2} S_c c_y^\alpha, \quad Y^{\omega_z} = \frac{\rho V}{2} S_c b_c c_y^{\bar{\omega}_z}, \quad M_z^\alpha = \frac{\rho V^2}{2} S_c b_c m_z^\alpha, \quad M_z^{\omega_z} = \frac{\rho V}{2} S_c b_c^2 m_z^{\bar{\omega}_z}.$$

Здесь S_c - площадь консоли руля, b_c - средняя аэродинамическая хорда руля, α_c - местный угол атаки руля высоты, ω_z - частота вращения руля; ϑ_c - угол тангажа, $\bar{\omega}_z$ - приведённая частота:

$$\omega_z = \dot{\vartheta}_c, \quad \vartheta_c = \delta_p - v'_\phi(x_c, t), \quad \bar{\omega}_z = \frac{\omega_z b_c}{V}, \quad \alpha_c = -\left(v'_\phi(x_c, t) + \frac{1}{V} \dot{v}_\phi(x_c, t)\right) + \delta_p.$$

Вариация работы аэродинамических нагрузок (5) в обобщённых координатах приводится к виду

$$\delta A_{a/d} = -\sum_{i=1}^s Q_{a/d,i} \delta q_i. \quad (10)$$

Сила тяги двигателя ракеты T , согласно [22], представляет собой «следящую» силу, остающуюся в процессе поворота корпуса при колебаниях перпендикулярной поперечному сечению, в котором она приложена.

Эту силу можно разложить на две составляющие (рисунок 2): продольную T_x и поперечную T_y .

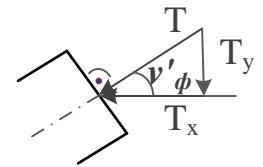


Рисунок 2

$$\begin{aligned} T_x &\approx T, \\ T_y &= -T v'_\phi(l_{xs}). \end{aligned}$$

Продольная составляющая силы T_x в процессе деформации не меняет величину и направление и обладает потенциалом U_{N^0} , равным по модулю работе A_{N^0} по продольному сжатию корпуса и противоположным ей по знаку:

$$U_{N^0} = -A_{N^0} = -\frac{1}{2} \int_{-l_n}^{l_{xg}} N^0(x) v_\phi'^2 dx,$$

где $N^0(x)$ - усилие, с которым корпус ракеты подвергается продольному сжатию.

Вариация работы продольного сжатия имеет вид:

$$\delta A_{N^0} = \int_{-l_n}^{l_{xg}} N^0(x) v_\phi' \delta v_\phi dx, \quad (11)$$

или в обобщённых координатах: $\delta A_{N^0} = \sum_{i=1}^s Q_{N^0,i} \delta q_i$.

Эти усилия $N^0(x)$ в каждом сечении находятся из уравнения равновесия сил, действующих на отсечённую часть (рисунок 3) при $v = 0$ в направлении оси x :

$$N^0(x) + \int_x^{l_{xg}} m_\phi(x) a dx = T,$$

где a - ускорение движения ракеты.

В статье рассматривается случай, когда погонная масса фюзеляжа $m_\phi(x)$ постоянна по длине, и, следовательно,

$$N^0(x) = \frac{T}{l_{xg} + l_n} (l_n + x).$$

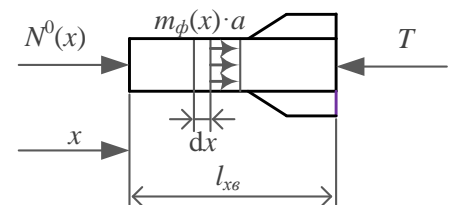


Рисунок 3

Вариация работы поперечной составляющей следящей силы имеет вид:

$$\delta A_{T_y} = -T v'_\phi(l_{x\phi}) \delta v_\phi(l_{x\phi}). \quad (12)$$

Или, если привести к обобщённым координатам: $\delta A_{T_y} = \sum_{i=1}^s Q_{T_y,i} \delta q_i$.

Уравнения колебаний ракеты составляются как уравнения Лагранжа (1), где

$$Q_i = Q_{a/d,i} + Q_{N^0,i} + Q_{T_y,i}.$$

Определение критической скорости флаттера

ракеты с закреплёнными рулями высоты.

Метод Ритца

На основании метода Ритца неизвестные функции представим в виде разложений по обобщённым координатам:

$$\begin{cases} v_\phi(x, t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) \eta_i(x), \\ v(z, t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) f_i(z), \\ \varphi(z, t) = \sum_{i=1}^s q_i(t) \phi_i(z), \end{cases} \quad (13)$$

где q_j - обобщённые координаты; η_j , f_j , ϕ_j - заданные функции, удовлетворяющие условиям сопряжения, $j = 1, \dots, s$; s - размерность задачи.

В силу условий сопряжения крыла с фюзеляжем функции по двум первым координатам будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 1, & f_1 &= 1, & \phi_1 &= 0, \\ \eta_2 &= x_{y.m.} - x, & f_2 &= x_{y.m.}, & \phi_2 &= 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (13) в (3), (4), запишем кинетическую и потенциальную энергию следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q},$$

где

$$k_{ij} = \int_{-l_n}^{l_{xg}} EI_{\phi} \eta''_i \eta''_j dx + 2 \cdot \int_0^L \left(EI f''_i f''_j + \frac{GJ_{kp}}{L^2} \phi_i \phi_j \right) dz,$$

$$m_{ij} = \int_{-l_n}^{l_{xg}} m_{\phi} \eta_i \eta_j dx + 2 \cdot \int_0^L \left(m f_i f_j - m \sigma (f_i \phi_j + f_j \phi_i) + J \phi_i \phi_j \right) dz +$$

$$+ 2 \cdot \frac{1}{2} \left(m_c \eta_i(x_c) \eta_j(x_c) - 2 m_c \sigma_c \eta_i(x_c) (\dot{\delta}_p^n - \eta'_j(x_c)) + \right.$$

$$\left. + J_c \left((\dot{\delta}_p^n)^2 - 2 \dot{\delta}_p^n \eta'_i(x_c) + \eta'_i(x_c) \eta'_j(x_c) \right) \right).$$

Здесь m_{ij} - обобщённая масса, k_{ij} - обобщённая жёсткость, \mathbf{M} - матрица инерции \mathbf{K} - матрица жёсткости, $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_5]^T$ - вектор обобщённых координат, $\dot{\delta}_p^n = const$.

Вариация работы аэродинамических нагрузок (10) в матричной форме имеет вид:

$$\delta A_{a/\partial} = -\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{B} \mathbf{q} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}),$$

где \mathbf{B} - матрица аэродинамической жёсткости, \mathbf{D} - матрица аэродинамического демпфирования.

Отклонение рулей высоты учитывается при записи вариации работы соответствующих аэродинамических сил:

$$\delta A_{a/\partial, pl} = -\delta \delta_p \left(\mathbf{b}_p \delta_p + \mathbf{d}_p \dot{\delta}_p \right),$$

где \mathbf{b}_p - вектор-столбец аэродинамической жёсткости руля высоты, возникающей из-за заданного (программного) угла отклонения руля; \mathbf{d}_p - вектор-столбец аэродинамического демпфирования руля высоты, возникающего из-за заданного (программного) угла отклонения руля.

Вариация работы продольного сжатия δA_{N^0} (11) и вариация работы поперечной составляющей следящей силы δA_{T_y} (12) в обобщённых координатах в матричном виде выглядят следующим образом:

$$\delta A_{N^0} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}, \quad \delta A_{T_y} = -\delta \mathbf{q}^T \mathbf{S} \mathbf{q}.$$

Таким образом, вариацию работы силы тяги двигателя можно записать в виде:

$$\delta A_T = \delta A_{N^0} + \delta A_{T_y} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{G} \mathbf{q},$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{C} - \mathbf{S}$.

Аппроксимирующие функции

Функции η_j , f_j , ϕ_j в разложении (13) являются аппроксимирующими функциями форм колебаний частей ракеты. Фюзеляж и стабилизаторы ракеты рассматриваются как абсолютно жесткие тела, совершающие вертикальное смещение и поворот относительно центра тяжести ракеты, поэтому для описания их поведения достаточно двух аппроксимирующих функций η_1 и η_2 (14). Изгибно-крутильные колебания крыла представляют собой более сложную форму упругих колебаний, для описания которых необходимо использовать большее число аппроксимирующих функций. Можно доказать, что при неограниченном увеличении числа аппроксимирующих функций, форма колебаний, описываемая

этимися функциями будет стремиться к точному решению задачи. [1] Однако для корректного решения задачи обычно достаточно всего лишь двух-трёх приближений. Увеличение числа аппроксимирующих функций необходимо производить до тех пор, пока решения, полученные в двух последовательных приближениях, не совпадут с заданной точностью.

В качестве аппроксимирующих функций можно принять любые функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи. [1]

Граничные условия для изгибных колебаний. В корне крыла в любой момент времени прогиб должен равняться нулю, так как крыло предполагается жёстко закреплённым в фюзеляже. Кроме того, касательная к упругой линии крыла в корне должна всё время совпадать с осью z , поскольку упругая линия крыла не может иметь излома. На конце крыла изгибающий момент и перерезывающая сила должны быть равны нулю.

$$\begin{cases} v = 0, & \frac{\partial v}{\partial z} = 0 & \text{при } z = 0; \\ EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, & \frac{\partial}{\partial z} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0 & \text{при } z = L. \end{cases} \quad (15)$$

Граничные условия для крутильных колебаний. Так как крыло рассматривается как консольная балка, жёстко заделанная в корне, то в корневом сечении крыла ($z = 0$) угол закручивания равен нулю. На свободном конце ($z = L$) должен быть равен нулю крутящий момент.

$$\begin{cases} \varphi = 0 & \text{при } z = 0; \\ GJ_{кр} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 & \text{при } z = L. \end{cases} \quad (16)$$

Аппроксимирующие функции изгибно-крутильных колебаний в разложении (13) можно представить в виде полиномов

$$f_{2k+4} = \sum_{i=0}^{k+4} a_i z^i, \quad \phi_{2k+5} = \sum_{j=0}^{k+2} b_j z^j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ - номер приближения, а $\phi_{2k+4}(z) \equiv 0$, $f_{2k+5}(z) \equiv 0$.

Размерность задачи s в разложении (13) в этом случае будет равна $s = 5 + 2k$. Здесь координаты q_{2k+4} соответствуют изгибным формам колебания крыла, а координаты q_{2k+5} - крутильным формам. Неизвестные коэффициенты a_i и b_j аппроксимирующих функций (17) определяются из граничных условий задачи (15), (16) и условий ортогональности:

$$\int_0^L f_i(z) f_j(z) dz = 0, \quad \int_0^L \phi_i(z) \phi_j(z) dz = 0 \quad \text{при } i \neq j \quad (18)$$

с точностью до некоторого множителя. Для его определения дополнительно вводится условие нормировки:

$$f(z) = 1, \quad \phi(z) = 1 \quad \text{при } z = L. \quad (18)$$

В явном виде аппроксимирующие функции более высокого порядка будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
f_4(z) &= \frac{1}{3} \left(6 \frac{z^2}{L^2} - 4 \frac{z^3}{L^3} + \frac{z^4}{L^4} \right); \\
\phi_5(z) &= \left(2 \frac{z}{L} - \frac{z^2}{L^2} \right); \\
f_6(z) &= \frac{1}{19} \left(-326 \frac{z^2}{L^2} + 824 \frac{z^3}{L^3} - 661 \frac{z^4}{L^4} + 182 \frac{z^5}{L^5} \right); \\
\phi_7(z) &= -\frac{1}{3} \left(26 \frac{z}{L} - 61 \frac{z^2}{L^2} + 32 \frac{z^3}{L^3} \right); \\
f_8(z) &= \frac{1}{595} \left(37490 \frac{z^2}{L^2} - 181120 \frac{z^3}{L^3} + 305815 \frac{z^4}{L^4} - 218966 \frac{z^5}{L^5} + 57376 \frac{z^6}{L^6} \right); \\
\phi_9(z) &= \frac{1}{17} \left(286 \frac{z}{L} - 1431 \frac{z^2}{L^2} + 2072 \frac{z^3}{L^3} - 910 \frac{z^4}{L^4} \right); \\
f_{10}(z) &= \frac{1}{17335} \left(-2548170 \frac{z^2}{L^2} + 19398020 \frac{z^3}{L^3} - 54146415 \frac{z^4}{L^4} + 70839756 \frac{z^5}{L^5} - 44146336 \frac{z^6}{L^6} + 10620480 \frac{z^7}{L^7} \right); \\
\phi_{11}(z) &= -\frac{1}{9} \left(242 \frac{z}{L} - 2017 \frac{z^2}{L^2} + 5384 \frac{z^3}{L^3} - 5730 \frac{z^4}{L^4} + 2112 \frac{z^5}{L^5} \right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Уравнение колебаний

Подставляя в (1) кинетическую энергию, потенциальную энергию и вариацию аэродинамических сил, полученные на основе метода Ритца, уравнение колебаний запишется в матричном виде следующим образом:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - \mathbf{G} + \mathbf{B})\mathbf{q} = \mathbf{d}_p \dot{\delta}_p + \mathbf{b}_p \delta_p, \tag{20}$$

где матрицы инерции, жесткости, аэродинамического демпфирования и аэродинамической жёсткости включают в себя компоненты для каждой из составляющих частей ракеты:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^\phi + 2\mathbf{M}^{kp} + 2\mathbf{M}^{pl}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^\phi + 2\mathbf{K}^{kp} + 2\mathbf{K}^{pl},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^\phi + 2\mathbf{B}^{kp} + 2\mathbf{B}^{pl}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}^\phi + 2\mathbf{D}^{kp} + 2\mathbf{D}^{pl}.$$

При закреплении недеформируемого руля с абсолютно жесткой проводкой управления $\delta_p(t) = 0$ уравнение (20) принимает вид:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} - \mathbf{G} + \mathbf{B})\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (21)$$

Для решения уравнения (21), его удобно преобразовать к уравнению первого порядка в фазовом пространстве координат:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (22)$$

где $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{K} - \mathbf{G} + \mathbf{B} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}$, $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$.

Для отыскания корней уравнения (22) решается задача о собственных значениях системы:

$$[\lambda\mathbf{A} + \mathbf{C}]\mathbf{V} = \mathbf{0} \rightarrow \lambda_j, \mathbf{V}_j, j = 1, \dots, 2s.$$

Нахождение корней λ_j характеристического уравнения однородной системы (22) позволяет судить об устойчивости движения ракеты на заданной высоте и при заданной скорости полёта. Решение характеристического уравнения представляет собой пары комплексно-сопряжённых $\lambda_j = \alpha_j + i\omega_j$, $\bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\omega_j$ и действительных $\lambda_k = \alpha_k$ собственных чисел, которые можно представить как частный случай комплексных.

При достаточно малых скоростях движение ракеты будет устойчивым, и действительные части всех корней будут отрицательными. При увеличении скорости полёта V может оказаться, что при некоторой критической скорости $V = V_{кр}$ действительная часть одного из корней обратится в нуль и при дальнейшем увеличении V станет положительной. В этом случае система станет неустойчивой.

В зависимости от изменения корней при дальнейшем увеличении скорости может возникнуть динамическая неустойчивость (флаттер) или статическая

неустойчивость (дивергенция). При $\alpha_j > 0$ и $\omega_j \neq 0$ система будет динамически неустойчива, при $\alpha_j > 0$ и $\omega_j = 0$ - статически неустойчива. Граница устойчивости определяется из условия $\alpha_j = 0$: на границе динамической устойчивости $\lambda_j = \pm \omega_j$; на границе статической устойчивости $\lambda_j = 0$. Величина $\alpha_j < 0$ характеризует запас устойчивости по j -й форме.

Пример расчёта

В качестве примера рассмотрим ракету, ранее исследованную автором в статье [2]. Геометрические, инерционно-массовые и жесткостные характеристики ракеты представлены в таблицах 1, 2, 3.

Фюзеляж

Таблица 1.

l_n [м]	$l_{x\phi}$ [м]	m_ϕ [кг/м]	EI_ϕ [Н·м]
2,54	3	178,68	$2,95485 \times 10^7$

Крыло

Таблица 2.

L [м]	m [кг/м]	σ [м]	J [кг·м]	EI [Н·м]	GJ [Н·м]
1	26,3543	-0,0103846	0,205251	84840	99586,5

Руль

Таблица 3.

m_c [кг]	σ_c [м]	J_c [кг·м ²]
10,0844	0,00784153	0,0668728

Для ракеты в условиях свободного полёта первые две обобщённые координаты представляют собой поперечное перемещение абсолютно жёсткой ракеты и угол

поворота ракеты относительно центра тяжести (приращение угла тангажа). Эти формы колебаний ортогональны как между собой, так и с формами упругих колебаний крыла. Формы перемещений твёрдого тела имеют нулевые собственные частоты ($\omega_1 = \omega_2 = 0$). Две низшие собственные частоты упругих колебаний ракеты, вычисленные по методу Ритца при различном числе аппроксимирующих функций, приведены в таблице 4.

Собственные частоты упругих колебаний крыла

Таблица 4.

	Метод Ритца				МКЭ
	$s = 5$	$s = 7$	$s = 9$	$s = 11$	$n = 10$
Изгиб крыла [Гц]	32.3905	32.2527	32.2525	32.2525	32.2377
Кручение крыла [Гц]	176.449	175.097	175.013	175.013	175.186

В последнем столбце таблицы 4 приведён результат расчёта собственных частот рассматриваемой модели ракеты, выполненный на основе МКЭ, описанный в статье [2]. Здесь $n = 10$ - количество конечных элементов, которыми моделируется крыло.

Для ракеты с неподвижными, закреплёнными рулями построены графики изменения действительной и мнимой частей собственных частот:

- в зависимости от изменения скорости полёта V при нулевой силе тяги $T = 0$ (рисунок 4);
- в зависимости от изменения силы тяги T при нулевой скорости полёта $V = 0$ (рисунок 5).

Графики построены для расчётов, выполненных с помощью метода Ритца (размерность задачи $s = 5, 7, 9, 11$) и МКЭ (количество элементов $n = 10$). Метод Ритца при увеличении количества аппроксимирующих функций даёт достаточно точный результат, сравнимый с результатом, полученным с помощью МКЭ в статье [2]. С увеличением числа аппроксимирующих функций значения собственных частот приближаются к точным значениям сверху.

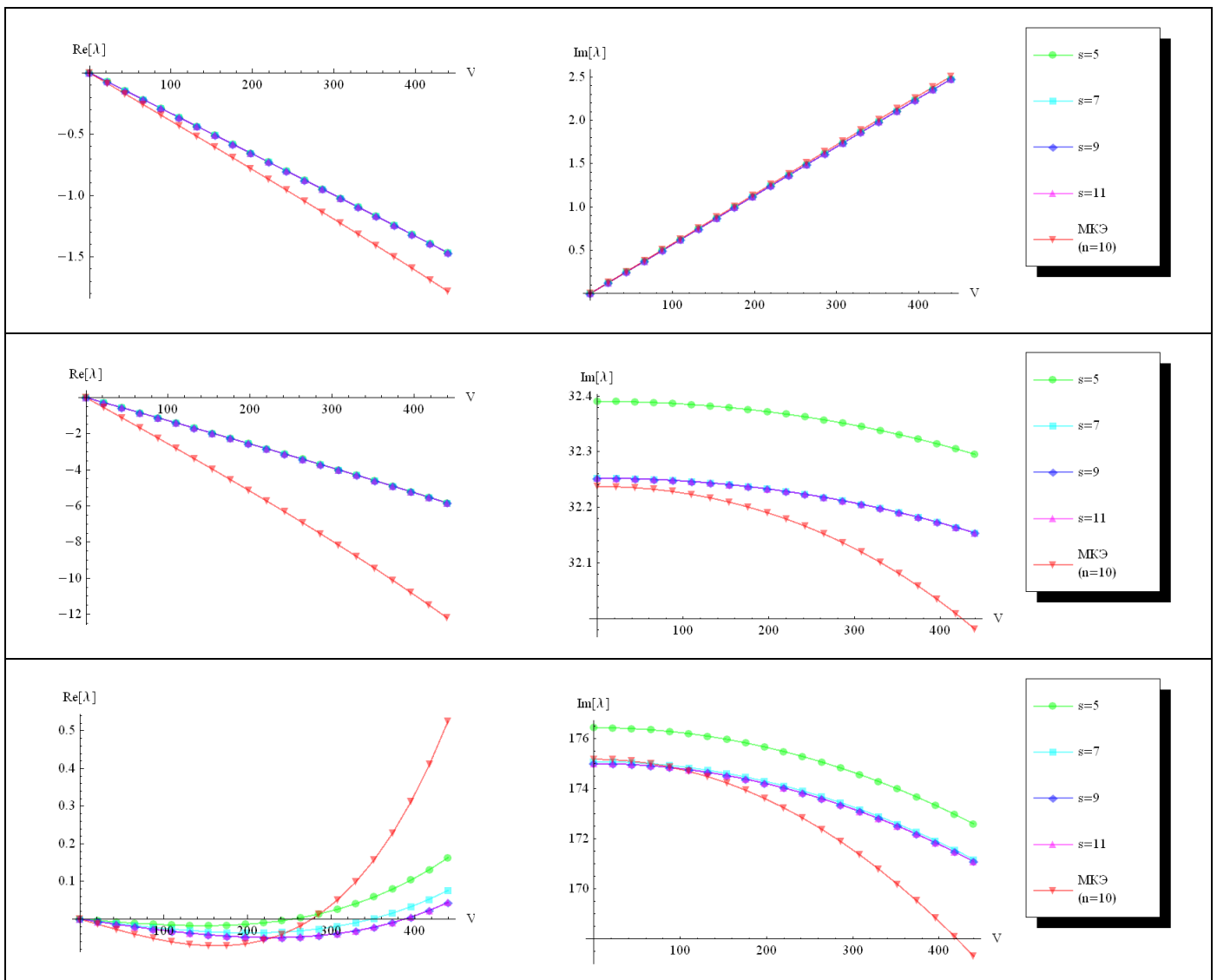


Рисунок 4. Графики изменения собственных частот в зависимости от изменения скорости полёта $V = 0 \div 440 [м/с]$ при нулевой силе тяги $T = 0 [Н]$.

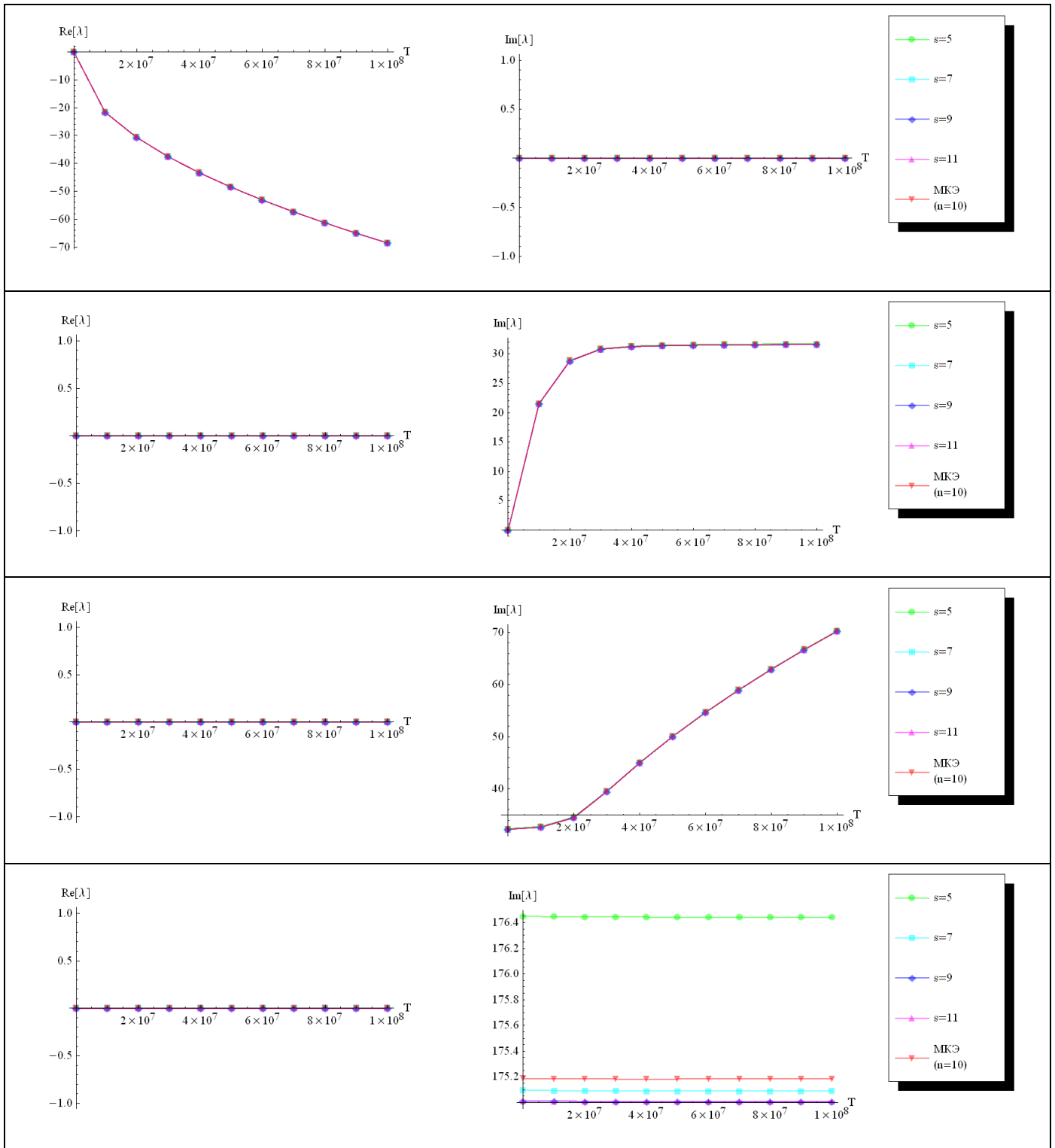


Рисунок 5. Графики изменения собственных частот
в зависимости от изменения силы тяги $T = 0 \div 10^8$ [Н]
при нулевой скорости полёта $V = 0$ [м/с].

На рисунке 4 можно определить скорость полёта, при которой возникает динамическая неустойчивость (флаттер) – это область изменения знака

действительной части собственного значения, соответствующего крутильному тону колебаний крыла, с отрицательного значения на положительное. Соответствующее критическое значение скорости полёта по методу Ритца (при $s=11$) составляет 388.65 [м/с] при частоте 171.966 [Гц], а по МКЭ (при $n=10$) 277.93 [м/с] при частоте 172.078 [Гц]. Аналогичным образом на рисунке 5 можно определить критическое значение силы тяги.

Выводы

В статье проведён анализ аэроупругих колебаний крылатой ракеты на основе метода Ритца при использовании различного числа аппроксимирующих функций: построены графики изменения собственных частот ракеты в зависимости от изменения скорости полёта и силы тяги двигателя; определены критические скорости и области аэроупругой устойчивости. Результаты расчёта, полученные на основе метода Ритца с увеличенным числом аппроксимирующих функций, показали хорошую сходимость с ранее полученными результатами исследования аэроупругих колебаний ракеты на основе МКЭ [2]. Таким образом, оба метода расчёта можно использовать для отыскания приближённого решения задачи аэроупругой устойчивости с достаточно высокой точностью.

Библиографический список

1. Гроссман Е.П. Курс вибраций частей самолёта. - М.: Государственное издательство оборонной промышленности, 1940. – 312 с.

2. Благодарёва О.В. Применение метода Ритца и метода конечных элементов к расчёту аэроупругих колебаний крылатой ракеты // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84426>
3. Мартынова А.Д. Определение критической скорости флаттера и дивергенции крыла самолёта с использованием метода конечных элементов // Молодёжный научно-технический вестник. 2014. № 10. URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/735483.html>
4. Войтышен В.С., Семенов В.Н. Решение задачи аэроупругости в переменных метода конечных элементов // Известия Коми научного центра УрО РАН. 2013. № 4(16). С. 68 - 72.
5. Желтков В.И., Чыонг Ван Хуан Определение критических скоростей прямого крыла большого удлинения // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 71 - 80.
6. Гришанина Т.В. Расчет деформаций и колебаний крыльев большого удлинения с учетом конусности // Известия вузов. Авиационная техника. 2004. № 2. С. 10 - 13.
7. Кичеев В.Е. Проектирование сжатых панелей легких самолетов с использованием критерия подобия // Труды МАИ. 2007. № 27. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34006>
8. Благодарёва О.В. Расчёт на безопасность от флаттера крыла малого удлинения методом полиномов // Труды МАИ. 2013. № 68. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=41717>
9. Благодарёва О.В. Исследование флаттера композитного крыла // Труды МАИ. 2014. № 74. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49345>

10. Разбегаева И.А. Расчет и оценка частотных характеристик обшивки фюзеляжа. Защита от шума // Труды МАИ. 2011. № 45. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=25552>
11. Неделин В.Г. Анализ конструктивно-технологических решений складных рулей с учетом требований аэроупругой устойчивости // Труды МАИ. 2012. № 52. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29424>
12. Пархаев Е.С., Семенчиков Н.В. Некоторые вопросы оптимизации профиля крыла малоразмерного беспилотного летательного аппарата // Труды МАИ. 2015. № 80. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=56884>
13. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Аэродинамические характеристики профиля крыла с нелинейно деформируемой мембраной в дозвуковом потоке // Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 22. № 4. С. 491 - 501.
14. Grishanina T.V. and Shklyarchuk F.N. Unsteady Oscillation of a Deformable Airfoil Section in Incompressible Flow // Russian Aeronautics, 2009, vol. 52, no.2, pp. 129 – 137.
15. Шклярчук Ф.Н. Аэроупругость самолёта: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1985. – 77 с.
16. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика упругих управляемых конструкций. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328 с.
17. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Избранные задачи аэроупругости. - М.: Изд-во МАИ, 2007. – 48 с.
18. Рабинович Б.И. Прикладные задачи устойчивости стабилизированных объектов. – М.: Машиностроение, 1978. – 232 с.
19. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. – М.: "НАУКА" Фармалит, 1990. – 176 с.

20. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. – М.: Машиностроение, 1971. – 564 с.
21. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полёта беспилотных летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1973. – 616 с.
22. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Колебания упругих систем: Учебное пособие. - М.: Издательство МАИ, 2013. – 100 с.