

УДК 539.3

К расчету напряжений в цилиндрических сосудах при несимметричном гидростатическом давлении и нагреве

Нерубайло Б. В.^{1*}, Ву Ба Зуи¹, Зайцев В. М.^{2**}

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

²Прогрестех, 2-я Хуторская улица, 38а, Москва, 127287, Россия

*e-mail: borisn@km.ru

**e-mail: good-for-you@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются краевые задачи о напряженно-деформированном состоянии круговых цилиндрических оболочек с различными условиями закрепления на краях при действии гидростатического давления, соответствующего горизонтальному расположению сосуда, частично заполненного жидкостью, и температуры, постоянной вдоль оси и кусочно-постоянной по контуру.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, гидростатическое давление, сосуд, основное напряженное состояние, краевой эффект, температура

Введение

Определение напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек при действии гидростатического давления, постоянного по длине, что соответствует горизонтальному расположению сосудов, частично заполненных жидкостью, представляет интерес для многих отраслей техники [1-3]. Например, обечайка топливных баков, предназначенных для размещения компонентов жидкого топлива (окислителя, горючего), в полете нагружена в том числе внутренним избыточным давлением, складывающимся из давления наддува и гидростатического давления. Кроме того, часть обечайки сосуда, свободная от жидкости, может нагреваться иногда до значительной температуры (250...300 °С)[3]. Причем, по длине оболочки ее можно принять постоянной, а по контуру на границе сухой и смоченной частей она резко изменяется [1], что может вызвать появление значительных температурных напряжений.

В случае шарнирного закрепления оболочки некоторые результаты расчета напряжений при гидростатическом давлении представлены в монографии В.З.Власова [4], а вопрос о напряженном состоянии при появлении температурного поля не рассматривался.

Постановка задачи

Применение в работе [4] полубезмоментной теории в сочетании с методом двойных тригонометрических рядов существенно сужает возможности изучения оболочек с различными краевыми условиями, так как в случае краевых условий, отличных от шарнирного закрепления, невозможно найти изгибающие моменты и, следовательно, изгибные напряжения на краях, так как там обращается в нуль нормальное перемещение, связанное с изгибающим моментом недифференциальной зависимостью, ибо равенство нулю перемещения автоматически влечет за собой отсутствие изгибающего момента.

1. Разрешающие дифференциальные уравнения общей теории оболочек. При действии произвольно распределенных по поверхности оболочки нормальной нагрузки $p(\alpha, \beta)$ и температурного поля $T(\alpha, \beta)$, постоянного по толщине, если принять за основу гипотезы Кирхгофа-Лява, исходные уравнения общей теории круговой цилиндрической оболочки могут быть сведены к следующим дифференциальным уравнениям в частных производных восьмого порядка относительно разрешающих функций $\Phi(\alpha, \beta), \bar{\Phi}(\alpha, \beta)$ [5]:

$$L\Phi(\alpha, \beta) = R^4 D^{-1} p(\alpha, \beta),$$

$$L\bar{\Phi}(\alpha, \beta) = \frac{1+\nu}{c^2} \alpha_t RT(\alpha, \beta), \quad (1)$$

$$\text{где } L = \nabla^2 \nabla^2 (\nabla^2 + 1)^2 - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \beta^2} \right) \nabla^2 + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4};$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad c^2 = h^2 / 12R^2; \quad \alpha, \beta - \text{продольная и окружная безразмерные координаты};$$

R, h - радиус и толщина оболочки; E, ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона, α_t -

коэффициент линейного температурного расширения, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - цилиндрическая

жесткость.

Все искомые факторы - перемещения, усилия, моменты и т.д. - связаны с разрешающими функциями $\Phi(\alpha, \beta), \bar{\Phi}(\alpha, \beta)$ дифференциальными соотношениями [5,7].

Представим внешнюю поверхностную радиальную нагрузку и температур в виде следующих разложений:

$$p(\alpha, \beta) = p_0 \theta(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta; \quad (2)$$

$$T(\alpha, \beta) = T_0 \theta(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\theta}_n \cos n\beta,$$

где $p_0 = -\gamma R$, γ - плотность жидкости, p_0, T_0 - амплитудные значения давления и температуры; $\theta(\alpha)$ - функция распределения давления и температуры вдоль образующей; θ_n , $\bar{\theta}_n$ - коэффициенты Фурье разложения нагрузки и температуры в ряды Фурье.

Закон изменения давления по контуру описывается функцией $\theta(\beta)$ [4]

$$\theta(\beta) = \begin{cases} \cos \beta - \cos \beta_0, & |\beta| \leq \beta_0 \\ 0, & |\beta| > \beta_0 \end{cases}, \quad (3)$$

в которой β_0 - половина угла заполнения сосуда жидкостью (Рис.1)

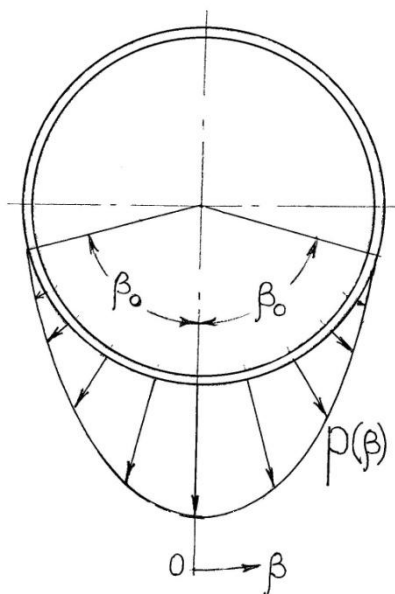


Рис. 1. Распределение кусочно-косинусоидального давления

При принятом здесь горизонтальном расположении сосуда функция распределения нагрузки по длине $\theta(\alpha) = 1$, а по контуру $\theta(\beta)$ представляется рядом Фурье

$$\theta(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta = \theta_0 + \theta_1 \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} \theta_n \cos n\beta, \quad (4)$$

где θ_n - коэффициенты ряда Фурье

$$\theta_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\beta_0} (\cos \beta - \cos \beta_0) d\beta = \frac{2}{\pi} (\sin \beta_0 - \beta_0 \cos \beta_0); \quad (5)$$

$$\theta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\beta_0} (\cos \beta - \cos \beta_0) \cos n\beta d\beta = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(n-1)\beta_0}{2(n-1)} + \frac{\sin(n+1)\beta_0}{2(n+1)} - \cos \beta_0 \frac{\sin n\beta_0}{n} \right].$$

Здесь первые два члена ряда ($n=0$, $n=1$) соответствуют деформированию сосуда без изменения формы поперечного кругового сечения, что считается известным из курса

сопротивления материалов. Кроме того, при $n=0$, $n \geq 1$ следует учесть возникающий при этом «классический», осесимметричный (при $n=0$) и несимметричный (при $n \geq 1$) краевые эффекты [7]. При $n \geq 2$ имеет место основное напряженное состояние [4,6].

Температурное поле в (2) описывается кусочно-постоянной функцией в окружном направлении оболочки и будет представлено в п.3.

2. Задача о действии гидростатического давления. Решение разрешающего уравнения общей теории оболочек (1) ищем в виде

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\alpha) \cos n\beta. \quad (6)$$

Делая подстановку разложений (2), (6) в уравнение (1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно амплитудного значения разрешающей функции $\Phi_n(\alpha)$

$$\tilde{L}\Phi_n(\alpha) = p_0 R^4 D^{-1} \theta_n \theta(\alpha), \quad (7)$$

где оператор \tilde{L} определяется следующим образом:

$$\tilde{L} = \left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - n^2 + 1 \right)^2 \left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - n^2 \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{d^4}{d\alpha^4} - n^4 \right) + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{d^4}{d\alpha^4}.$$

В соответствии с представлением внешней нагрузки и разрешающей функции разложим в одинарные тригонометрические ряды перемещения, усилия и моменты

$$u(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\alpha) \cos n\beta; \quad v(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\alpha) \sin n\beta; \quad w(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\alpha) \cos n\beta; \quad (8)$$

$$T_i(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{in}(\alpha) \cos n\beta; \quad S_i(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{in}(\alpha) \sin n\beta; \quad G_i(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{in}(\alpha) \cos n\beta, \quad (i=1;2)$$

Амплитудные значения $U_n(\alpha), \dots, G_{in}(\alpha)$ выражаются через $\Phi_n(\alpha)$ в результате подстановки (6), (8) в соотношения, связывающие искомые факторы с разрешающей функцией [7]. Например,

$$W_n(\alpha) = \left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - n^2 \right)^2 \Phi_n(\alpha), \quad (9)$$

$$G_{2n}(\alpha) = -\frac{D}{R^2} \left[\left(\nu \frac{d^2}{d\alpha^2} - n^2 + 1 \right) \left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - n^2 \right)^2 \right] \Phi_n(\alpha).$$

Восьмой порядок основного разрешающего дифференциального уравнения (1) и, соответственно, (7) требует постановки на торцах оболочки восьми граничных условий, записанных относительно кинематических или статических факторов. Так что процедура

отыскания постоянных из системы восьми алгебраических уравнений в общем случае громоздка и таит в себе большую вероятность ошибки. Этому в значительной мере можно избежать, если применить метод асимптотического синтеза напряжённого состояния (МАС).

Разрешающая функция $\Phi_n(\alpha)$ может быть представлена приближённо [6, 7]

$$\Phi_n(a) \approx \begin{cases} \Phi_n^o(\alpha) + \Phi^k(\alpha) & (n \leq n^*) \\ \Phi_n^u(\alpha) & (n > n^*) \end{cases} \quad (10)$$

(индексы «о», «к», «и» относятся к основному состоянию, краевому эффекту и изгибному состоянию, соответственно).

Однако при рассматриваемой здесь нагрузке, постоянной по длине и имеющей, как правило, большой угол заполнения $\beta_0 \gg \sqrt{h/R}$ функция $\Phi_n(a)$ с достаточной точностью может быть определена следующим образом:

$$\Phi_n(a) \approx \begin{cases} \Phi_n^o(\alpha) & \text{при } n \geq 2 \\ \Phi_n^k(\alpha) & \text{при } n \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

В соответствии с (11) могут быть записаны и искомых факторы

$$\begin{aligned} w(\alpha, \beta) &= w^o(\alpha, \beta) + w^k(\alpha, \beta); \\ T_1(\alpha, \beta) &= T_1^o(\alpha, \beta); \quad T_2(\alpha, \beta) = T_2^k(\alpha, \beta); \\ G_1(\alpha, \beta) &= G_1^k(\alpha, \beta) + \nu G_2^o(\alpha, \beta); \\ G_2(\alpha, \beta) &= G_2^o(\alpha, \beta) + \nu G_1^k(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (12)$$

Полное напряжённо-деформированное состояние, таким образом, складывается из основного состояния и краевого эффекта на основе (11, 12). Причём, каждое из них находится обособленно путем решения соответствующей краевой задачи.

Рассмотрим в качестве примера цилиндрическую оболочку, у которой один край заземленный ($\alpha=0$), а другой шарнирно закрепленный ($\alpha=\alpha_1$), так что краевые условия при использовании общей теории оболочек формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha=0: \quad u(\alpha, \beta) &= V(\alpha, \beta) = w(\alpha, \beta) = W'_\alpha(\alpha, \beta) = 0 \\ \alpha=\alpha_1: \quad w(\alpha, \beta) &= V(\alpha, \beta) = T_1(\alpha, \beta) = G_1(\alpha, \beta) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

А в соответствии с идеей применяемого здесь МАС краевые условия (13) должны быть расчленены на следующие две группы [7]:

Тангенциальные краевые условия

$$u(\alpha, \beta) = V(\alpha, \beta) = 0, \quad (\alpha=0)$$

$$V(\alpha, \beta) = T_1(\alpha, \beta) = 0, \quad (\alpha = \alpha_1) \quad (14)$$

Нетангенциальные краевые условия

$$w(\alpha, \beta) = W'_a(\alpha, \beta) = 0, \quad (\alpha = 0)$$

$$w(\alpha, \beta) = G_1(\alpha, \beta) = 0, \quad (\alpha = \alpha_1) \quad (15)$$

Если перейти к амплитудным значениям искомых факторов, получим вместо (14), (15) следующую запись краевых условий:

$$U_n(\alpha) = V_n(\alpha) = 0, \quad (\alpha = 0)$$

$$V_n(\alpha) = T_{1n}(\alpha) = 0, \quad (\alpha = \alpha_1) \quad (14a)$$

$$W_n(\alpha) = W'_{n\alpha}(\alpha) = 0 \quad (\alpha = 0)$$

$$W_n(\alpha) = G_{1n}(\alpha) = 0, \quad (\alpha = \alpha_1) \quad (15a)$$

В качестве подтверждения возможности получения решения на основе (11), (12), приведем числовую информацию, относящуюся к случаю нагружения оболочки, имеющей относительную толщину $h/R=1/100$, двумя диаметрально противоположными нормальными нагрузками, действующими по отрезкам контура, каждый длиной $0,5R$, примерно равной принятой в [4].

Максимальные значения кольцевого изгибающего момента G_{2n}/P , имеющие место в середине нагруженных отрезков, представлены в табл.1 при различных значениях номеров гармоник n , на основе различных приближенных уравнений.

Таблица 1

Численные значения кольцевого момента на основе различных уравнений теории оболочек

Номер гармоники n	Общая теория оболочек	Основное состояние	Краевой эффект	Основное состояние плюс краевой эффект	Изгибное состояние
1	0,0170	0,0137	0,0036	0,0173	0,0986
2	0,0144	0,0108	0,0031	0,0139	0,0430
3	0,0118	0,0084	0,0025	0,0109	0,0225
4	0,0080	0,0058	0,0017	0,0075	0,0115
5	0,0040	0,0030	0,0009	0,0039	0,0048
40	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0001

Как видно из табл.1, основное состояние в сумме с краевым эффектом приводят к численным результатам, близким к полученным по общей теории. В то же время изгибное состояние при высоких номерах является ничтожным, что открывает возможность исключить его из рассмотрения в (10) и распространить в получающихся решения(11, 12) суммирование до $n \rightarrow \infty$ [7].

Запишем соответствующие разрешающие уравнения и соотношения, связывающие амплитудные значения искомых факторов и разрешающей функции для основного состояния и краевого эффекта [7].

Рассмотрим вначале основное состояние в (11),(12), которое описывается уравнениями полубезмоментной теории оболочек. Для разрешающей функции $\Phi_n(\alpha)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение путём соответствующего упрощения [7] уравнения (7)

$$\left(\frac{d^4}{d\alpha^4} + 4\mu_n^4 \right) \Phi_n(\alpha) = \frac{p_0 R^2}{Eh} \theta_n \theta(\alpha), \quad 4\mu_n^4 = \frac{c^2}{1-\nu^2} n^4 (n^2 - 1)^2; \quad n \geq 2. \quad (16)$$

Амплитудные значения перемещений, усилий и моментов связаны с разрешающей

функцией $\Phi_n(\alpha)$ посредством следующих дифференциальных зависимостей:

$$U_n(\alpha) = n^2 \Phi_n''(\alpha); \quad V_n(\alpha) = n^3 \Phi_n(\alpha); \quad W_n(\alpha) = n^4 \Phi_n(\alpha);$$

$$T_{1n}(\alpha) = \frac{Eh}{R} n^2 \Phi_n''(\alpha); \quad S_n(\alpha) = -\frac{Eh}{R} n \Phi_n'''(\alpha); \quad G_{2n}(\alpha) = \frac{D}{R^2} n^4 (n^2 - 1) \Phi_n(\alpha), \quad (17)$$

Воспользуемся решением на основе метода начальных параметров [7] для произвольно распределенной по длине нагрузки и запишем его для рассматриваемого здесь случая, положив в нем $\alpha_0 = \alpha_1 / 2$. Оно представлено в табл.2.

Таблица 2

Решение дифференциального уравнения основного напряженного состояния при действии гидростатического давления

	$T_{1n}(0)$	$S_n(0)$	$V_n^*(0)$	$U_n^*(0)$	$-\theta_n \gamma R^2$
$T_{1n}(\alpha)$	Φ_2	$-\frac{n}{2\mu} (\Phi_1 + \Phi_3)$	$-\frac{2\mu^2}{n} \Phi$	$\mu(\Phi_3 - \Phi_1)$	$\frac{n^2}{2\mu_n^2} \Phi_4(\alpha)$
$S_n(\alpha)$	$-\frac{\mu}{n} (\Phi_3 - \Phi_1)$	Φ_2	$\frac{2\mu^3}{n^2} (\Phi_1 + \Phi_3)$	$\frac{2\mu^2}{n} \Phi_4$	$-\frac{n}{2\mu_n} [\Phi_1(\alpha) + \Phi_3(\alpha)]$

$V_n^*(\alpha)$	$\frac{n}{2\mu^2}\Phi_4$	$\frac{n^2}{4\mu^3}(\Phi_3 - \Phi_1)$	Φ_2	$\frac{n}{2\mu}(\Phi_1 + \Phi_3)$	$\frac{n^3}{4\mu^4}[1 - \Phi_2(\alpha)]$
$U_n^*(\alpha)$	$\frac{1}{2\mu}(\Phi_1 + \Phi_3)$	$-\frac{n}{2\mu^2}\Phi_4$	$\frac{\mu}{n}(\Phi_3 - \Phi_1)$	Φ_2	$-\frac{n^2}{4\mu^3}[\Phi_3(\alpha) - \Phi_1(\alpha)]$

Примечание к табл.2: $T_{1n}(0), S_n(0), V_n^*(0), U_n^*(0)$ - начальные параметры;

$$\Phi_{1n}(\alpha) = ch \mu_n \alpha \sin \mu_n \alpha; \Phi_{2n}(\alpha) = ch \mu_n \alpha \cos \mu_n \alpha;$$

$$\Phi_{3n}(\alpha) = sh \mu_n \alpha \sin \mu_n \alpha; \Phi_{4n}(\alpha) = sh \mu_n \alpha \cos \mu_n \alpha$$

(индексы "n" у функций $\Phi_{1n}(\alpha), \Phi_{2n}(\alpha), \Phi_{3n}(\alpha), \Phi_{4n}(\alpha)$ и коэффициента μ_n опущены).

Амплитудные значения перемещений $U_n(\alpha), V_n(\alpha)$ с помощью табл. 2 записываются по формулам

$$V_n(\alpha) = \frac{R}{Eh} V_n^*(\alpha); \quad U_n(\alpha) = \frac{R}{Eh} U_n^*(\alpha).$$

Искомые факторы основного состояния теперь определяются, принимая во внимание найденные из решения краевой задачи амплитудные значения $U_n(\alpha), V_n(\alpha), T_{1n}(\alpha), S_n(\alpha)$ и разложения (8).

В качестве примера приведем окончательные выражения для нормального усилия, нормального перемещения и кольцевого изгибающего момента в оболочке с жестко зашеченными краями

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_0 R} T_1(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\bar{n}} \frac{n}{\mu_n^2} \theta_n \{-2\Phi_2(\alpha) \bar{T}_{10} + [\Phi_1(\alpha) + \Phi_3(\alpha)] \bar{S}_0 + 2\Phi_4(\alpha)\} \cos n\beta, \\ \frac{E}{p_0 R} w(\alpha, \beta) &= \frac{1}{8} \frac{R}{h} \sum_{n=2}^{\bar{n}} \frac{n^4}{\mu_n^4} \theta_n \{-2\Phi_4(\alpha) \bar{T}_{10} - [\Phi_3(\alpha) - \Phi_1(\alpha)] \bar{S}_0 + 2[1 - \Phi_2(\alpha)]\} \cos n\beta, \\ \frac{1}{p_0 R^2} G_2(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\bar{n}} \frac{\theta_n}{n^2 - 1} \{-2\Phi_4(\alpha) \bar{T}_{10} - [\Phi_3(\alpha) - \Phi_1(\alpha)] \bar{S}_0 + 2[1 - \Phi_2(\alpha)]\} \cos n\beta, \\ C^{-1}(\alpha_1) \bar{T}_{10} &= \Phi_4(\alpha_1) A(\alpha_1) - [\Phi_3(\alpha_1) - \Phi_1(\alpha_1)] B(\alpha_1), \\ C^{-1}(\alpha_1) \bar{S}_0 &= 2\Phi_4(\alpha_1) B(\alpha_1) + [\Phi_3(\alpha_1) + \Phi_1(\alpha_1)] A(\alpha_1), \\ A(\alpha_1) &= 1 - \Phi_2(\alpha_1), \quad 2B(\alpha_1) = \Phi_1(\alpha_1) + \Phi_3(\alpha_1), \quad C(\alpha_1) = \Phi_4^2(\alpha_1) + \frac{1}{2} [\Phi_3^2(\alpha_1) - \Phi_1^2(\alpha_1) \end{aligned} \quad (19)$$

На основе полубезмоментной теории получены численные результаты, иллюстрирующие напряженно - деформированное состояние оболочки в зависимости от краевых условий, для угла заполнения сосуда жидкостью $2\beta_0 = 66$ град (Рис. 2-4). В качестве объекта исследования

принята оболочка с геометрическими размерами и углом заполнения, принятыми в монографии [4]: $L=4000$ см, $R=320$ см, $h=0,6$ см. Представленные на рис. 2-4 результаты расчетов позволяют судить о весьма существенном влиянии граничных условий на величину и характер напряженно-деформированного состояния оболочки. Например, величина продольного усилия, и, следовательно, напряжения при наличии жестко защемленного края в 1,5-2 раза превышает напряжения по сравнению с условиями шарнирного закрепления. Причем, это относится к сжимающим напряжениям, при которых возможна потеря устойчивости. Окружное напряжение и нормальное перемещение в средней части оболочки меньше, чем при шарнирном закреплении.

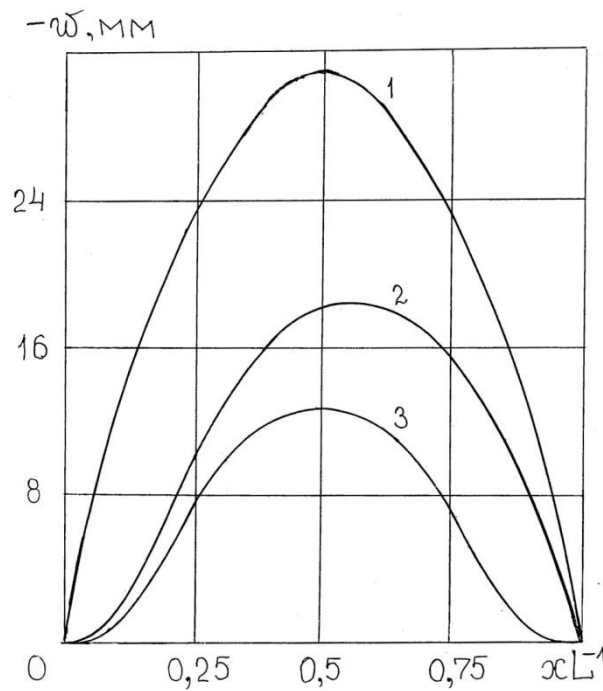


Рис 2. Изменение радиального перемещения вдоль нулевой образующей оболочки с различными граничными условиям

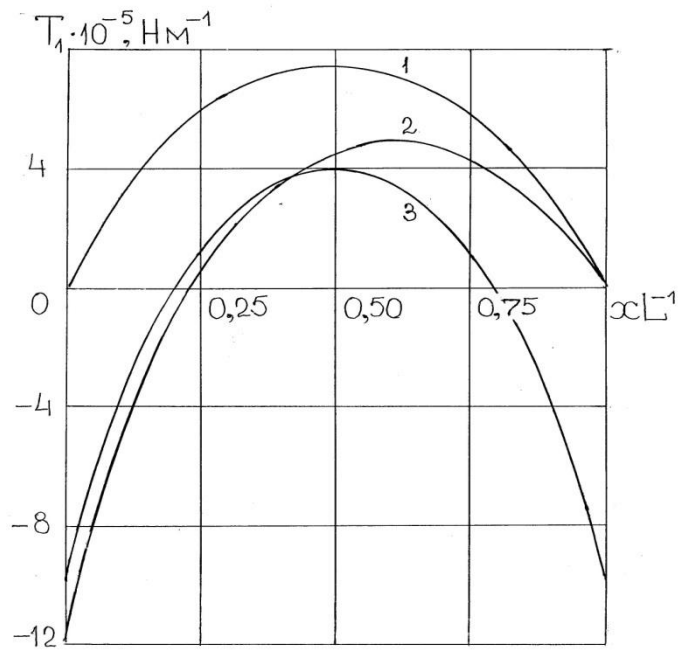


Рис 3. Изменение нормального продольного усилия вдоль нулевой образующей оболочки с различными граничными условиям

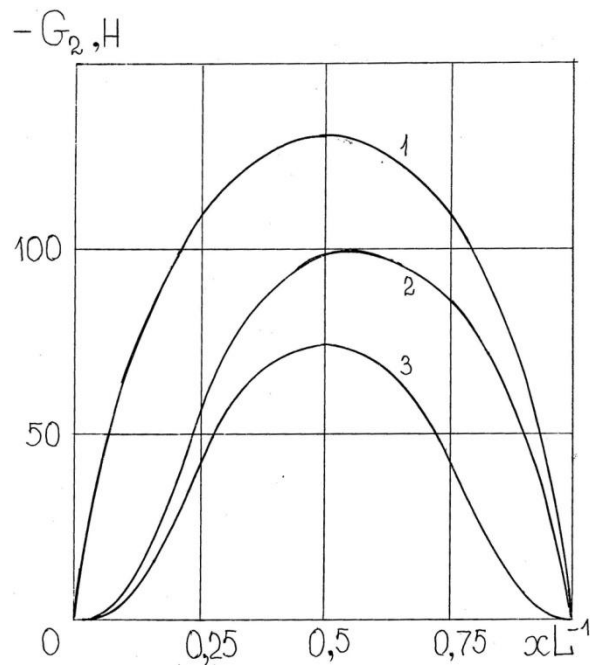


Рис 4. Изменение радиального перемещения, нормального продольного усилия, концевого изгибающего момента вдоль нулевой образующей оболочки с различными граничными условиям

1. Шарнирные закрепления краев
2. Шарнирный и жестко защемленный края
3. Жестко защемленные краев.

Перейдем к рассмотрению напряженного состояния типа краевого эффекта, включающего не только осесимметричную составляющую ($n=0$), как это обычно принято при расчете сосудов давления, но и несимметричные ($n \geq 1$) формы [7, 8].

Разрешающее дифференциальное уравнение при этом записывается в виде [7]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 4\eta^4 w = \frac{R^4}{D} p(\alpha, \beta); \quad 4\eta^4 = 12(1-\nu^2)(R/h)^2; \quad w = w(\alpha, \beta) \quad (15)$$

Здесь нормальное перемещение $w = w(\alpha, \beta)$, являющееся функцией двух координат, идентифицируется с осесимметричным краевым эффектом [7], то есть может быть представлено в виде

$$w(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\bar{n}} w_n(\alpha) \cos n\beta = w(\alpha) \sum_{n=0}^{\bar{n}} \cos n\beta \quad (18)$$

Для нагрузки $p(\alpha, \beta)$ имеют место приведенные ранее разложения (2),(10).

Принимая их во внимание, в случае действия гидростатического давления получим обыкновенное дифференциальное уравнение и силовые факторы

$$\left(\frac{d^4}{d\alpha^4} + 4\eta^4 \right) w_n(\alpha) = p_0 \frac{R^4}{D} \theta_n \theta(\alpha)$$

$$T_{2n}(\alpha) = \frac{Eh}{R} w_n(\alpha); \quad G_{1n}(\alpha) = -\frac{D}{R^2} w_n''(\alpha); \quad G_2 = \nu G_1; \quad Q_{1n}(\alpha) = -\frac{D}{R^2} w_n'''(\alpha). \quad (19)$$

Решение по методу начальных параметров получается путем адаптации записанного в [7] решения для случая действующего гидростатического давления.

Далее, если длина оболочки

$$L \gg 2 L_0 = 5\sqrt{Rh}, \quad (20)$$

где L_0 – зона затухания краевого эффекта, целесообразно строить приближенное решение у интересующего нас края оболочки, рассматривая ее как полубесконечную.

Пусть справедливо сильное неравенство (20), и нас интересует жестко заделанный край, тогда реальная оболочка моделируется полубесконечной с краевыми условиями из (15а)

$$\alpha=0: \quad W_n(\alpha) = W_{n\alpha}'(\alpha) = 0, \quad (21)$$

которые позволяют найти две произвольные постоянные интегрирования уравнения (19), принимая во внимание, и получить все искомые факторы краевого эффекта по известной процедуре.

$$w(\alpha, \beta) = \frac{\gamma R^3}{Eh} [1 - \varphi(\alpha) - \chi(\alpha)] \theta(\beta); \quad T_2(\alpha, \beta) = \gamma R^2 [1 - \varphi(\alpha) - \chi(\alpha)] \theta(\beta); \quad (22)$$

$$G_1(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{6(1-\nu^2)} \gamma R^2 h [\varphi(\alpha) - \chi(\alpha)] \theta(\beta); \quad G_2(\alpha, \beta) = \nu G_1(\alpha, \beta); \quad \theta(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos n\beta.$$

По расчетам и в соответствии с физическим смыслом задачи в нижней точке сосуда нормальное перемещение, направлено в сторону увеличения радиуса, кольцевое усилие растягивающее, а изгибающие моменты в заделке создают сжимающие напряжения на внешней поверхности оболочки. Кольцевое усилие на краю равно нулю, а вдали от края принимает максимальное значение, равное найденному по безмоментной теории.

Нормальные напряжения на внутренней и наружной поверхностях оболочки находятся по известным формулам [9].

Найденное здесь напряженно-деформированное состояние следует дополнять балочным напряжением $\sigma_1(\alpha, \beta) = \sigma_1(\alpha) \cos \beta$, $\sigma_1(\alpha) = M(\alpha) / W$ от возникающего в оболочке, как в балке, изгибающего момента от гидростатической нагрузки (M – изгибающий момент, W – момент сопротивления сечения оболочки), и прогибом.

3. Термоупругая задача при кусочно-постоянной вдоль контура температуре. При появлении температурного поля в оболочке (Рис.5) напряженное состояние строится аналогично изложенному выше случаю гидростатического давления.

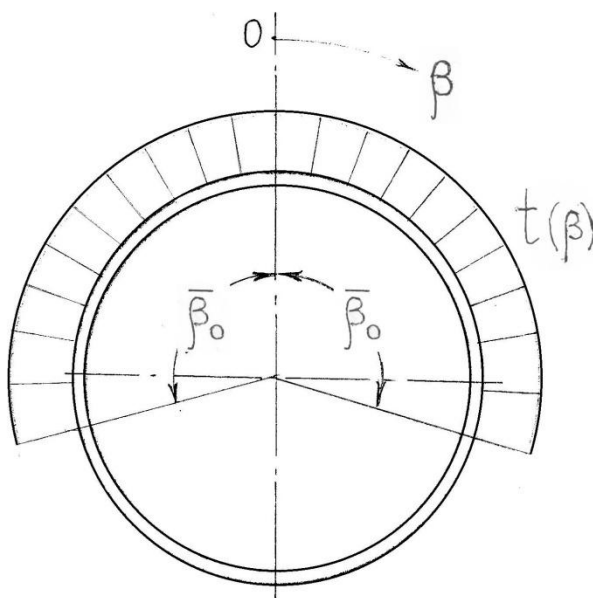


Рис 5

Для безразмерной функции $\bar{\theta}(\beta)$ изменения температуры $T(\alpha, \beta) = T_0 \theta(\alpha) \bar{\theta}(\beta)$ по оболочке

$$\bar{\theta}(\beta) = 1, \quad |\beta| \leq \bar{\beta}_0; \quad \bar{\theta}(\beta) = 0, \quad |\beta| > \bar{\beta}_0$$

при начале координат, помещенном в

диаметральной плоскости, проходящей через середину нагретой области, получаем следующее разложение [7] в ряд Фурье:

$$\bar{\theta}(\beta) = \frac{\bar{\beta}_0}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \bar{\beta}_0}{n} \cos n \beta. \quad (23)$$

Для разрешающей функции основного напряженного состояния $\bar{\Phi}_n(\alpha)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение [7]

$$\left(\frac{d^4}{d\alpha^4} + 4\mu_n^4 \right) \bar{\Phi}_n(\alpha) = \frac{1}{1-\nu} \alpha_t R T_0 \theta(\alpha) \bar{\theta}_n \quad 4\mu_n^4 = \frac{c^2}{1-\nu^2} n^4 (n^2 - 1)^2; \quad n \geq 2. \quad (24)$$

Амплитудные значения перемещений, усилий и моментов связаны с разрешающей функцией $\bar{\Phi}_n(\alpha)$ посредством следующих дифференциальных зависимостей:

$$U_n(\alpha) = n^2 \bar{\Phi}_n''(\alpha); \quad V_n(\alpha) = n^3 \bar{\Phi}_n'(\alpha); \quad W_n(\alpha) = n^4 \bar{\Phi}_n(\alpha);$$

$$T_{1n}(\alpha) = \frac{Eh}{R} n^2 \bar{\Phi}_n''(\alpha) - \frac{Eh}{1-\nu} \alpha_t T_0 \bar{\theta}_n \theta(\alpha);$$

$$S_n(\alpha) = -\frac{Eh}{R} n \bar{\Phi}_n'''(\alpha); \quad G_{2n}(\alpha) = \frac{D}{R^2} n^4 (n^2 - 1) \bar{\Phi}_n(\alpha), \quad (25)$$

При использовании метода начальных параметров решение (24), с учетом (25) представлено в табл.3.

Таблица 3

Решение дифференциального уравнения основного напряженного состояния при действии температурного поля

	$T_{1n}(0)$	$S_n(0)$	$V_n^*(\alpha)$	$U_n^*(\alpha)$	$\frac{\alpha_t E h T_0}{1-\nu} \bar{\theta}_n$
$T_{1n}(\alpha)$	$K_{TT}(\alpha)$	$K_{TS}(\alpha)$	$K_{TV}(\alpha)$	$K_{TU}(\alpha)$	$\Phi_2(\alpha - \xi_1) - 1$
$S_n(\alpha)$	$K_{ST}(\alpha)$	$K_{SS}(\alpha)$	$K_{SV}(\alpha)$	$K_{SU}(\alpha)$	$-\frac{\mu_n}{n} [\Phi_3(\alpha - \xi_1) - \Phi_1(\alpha - \xi_1)]$
$V_n^*(\alpha)$	$K_{VT}(\alpha)$	$K_{VS}(\alpha)$	$K_{VV}(\alpha)$	$K_{VU}(\alpha)$	$\frac{n}{2\mu_n^2} \Phi_4(\alpha - \xi_1)$
$U_n^*(\alpha)$	$K_{UT}(\alpha)$	$K_{US}(\alpha)$	$K_{UV}(\alpha)$	$K_{UU}(\alpha)$	$\frac{1}{2\mu_n} [\Phi_1(\alpha - \xi_1) + \Phi_3(\alpha - \xi_1)]$

Построенное в форме табл.3 решение легко реализуется для конкретного случая температурного поля и краевых условий.

Пусть оболочка на обоих концах имеет следующие условия жесткого защемления:

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta) = V(\alpha, \beta) = 0, \quad \alpha = 0, \alpha = \alpha_1, \\ U_n(\alpha) = V_n(\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, \alpha = \alpha_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда на основании табл.3 и краевых условий (26) получаем продольное усилие, нормальное перемещение и кольцевой изгибающий момент в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{\alpha_i E h T_0} T_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\bar{n}} \frac{1}{n} \{ 2\Phi_2(\alpha) \tilde{T}_{10} + [\Phi_1(\alpha) + \Phi_3(\alpha)] \tilde{S}_0 + \\ + 2[\Phi_2(\alpha) - 1] \} \sin n\bar{\beta}_0 \cos n\beta; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{\alpha_i R T_0} w(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\bar{n}} \frac{n}{\mu_n^2} \{ -2\Phi_4(\alpha) \tilde{T}_{10} + [\Phi_3(\alpha) - \Phi_1(\alpha)] \tilde{S}_0 - \\ - 2\Phi_4(\alpha) \} \sin n\bar{\beta}_0 \cos n\beta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(\alpha, \beta) = -\frac{3}{\pi \sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{\alpha_i E T_0}{1-\nu} \frac{h^2}{6} \sum_{n=2}^{\bar{n}} \frac{1}{n} \{ -2\Phi_4(\alpha) \tilde{T}_{10} + [\Phi_3(\alpha) - \Phi_1(\alpha)] \tilde{S}_0 - \\ - 2\Phi_4(\alpha) \} \sin n\bar{\beta}_0 \cos n\beta, \end{aligned}$$

где обозначено:

$$\tilde{T}_{10} = \frac{N_V(\alpha_1) \Phi_4(\alpha_1) + \frac{1}{2} N_U(\alpha_1) [\Phi_3(\alpha_1) - \Phi_1(\alpha_1)]}{\Phi_4^2(\alpha_1) + \frac{1}{2} [\Phi_3^2(\alpha_1) - \Phi_1^2(\alpha_1)]}, \quad \tilde{S}_0 = \frac{\Phi_4(\alpha_1) N_U(\alpha_1) - [\Phi_3(\alpha_1) + \Phi_1(\alpha_1)] N_V(\alpha_1)}{\Phi_4^2(\alpha_1) + \frac{1}{2} [\Phi_3^2(\alpha_1) - \Phi_1^2(\alpha_1)]}.$$

Обратимся к построению напряженно-деформированного состояния краевого эффекта при неосесимметричном температурном поле $T(\alpha, \beta)$.

Дифференциальное уравнение относительно разрешающей функции $w(\alpha, \beta)$, описывающее такое состояние, и искомые факторы имеют вид:

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{1-\nu^2}{c^2} \right) w(\alpha, \beta) = -\frac{1-\nu^2}{c^2} \alpha_i R T(\alpha, \beta). \quad (28)$$

$$T_2(\alpha, \beta) = -\frac{Eh}{(1-\nu^2)R} w(\alpha, \beta) - \frac{Eh}{1-\nu^2} \alpha_i R T(\alpha, \beta); \quad (29)$$

$$G_1(\alpha, \beta) = -\frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 w(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2}; \quad G_2(\alpha, \beta) = \nu G_1(\alpha, \beta).$$

Здесь $w = w(\alpha, \beta)$, т.е. является функцией двух координат:

$$w(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\bar{n}} w_n(\alpha) \cos n\beta = w(\alpha) \sum_{n=0}^{\bar{n}} \cos n\beta$$

Для $w(\alpha)$ и силовых факторов получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^4}{d\alpha^4} + 4\eta^4 \right) w(\alpha) = -\frac{1-\nu^2}{c^2} \alpha_t R T_0 \theta_n \theta(\alpha) \quad (30)$$

$$T_2(\alpha) = -\frac{Eh}{(1-\nu)R} w^k(\alpha) - \frac{Eh}{1-\nu} \alpha_t t_0^* \theta_n^* \theta(\alpha); \quad G_1(\alpha) = -\frac{D}{R^2} \frac{d^2 w^k(\alpha)}{d\alpha^2}; \quad G_2(\alpha) = \nu G_1(\alpha). \quad (31)$$

Полагаем, что рассматриваемые оболочки имеют длину, удовлетворяющую условию (20), то есть их края не влияют друг на друга, тогда оболочка может быть рассчитана как полубесконечная, для которой

$$\begin{aligned} w(\alpha) &= c_1 \varphi(\alpha) + c_2 \chi(\alpha) - \alpha_t R T_0; \\ w'(\alpha) &= \eta \left\{ -[\varphi(\alpha) + \chi(\alpha)] c_1 + [\varphi(\alpha) - \chi(\alpha)] c_2 \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

При краевых условиях $w = 0, w' = 0, (\alpha = 0)$ на основе (31) получаем систему двух алгебраических уравнений

$$c_1 - \alpha_t R T_0 = 0; \quad -\alpha_t R T_0 + c_2 = 0, \quad ,$$

из которой находим произвольные постоянные интегрирования:

$$c_1 = c_2 = \alpha_t R T_0. \quad (33)$$

На основании (30), с учетом (3),(33) получаем следующие выражения для искомым факторов термоупругой задачи:

$$\begin{aligned} w(\alpha) &= [\varphi(\alpha) + \chi(\alpha) - 1] \alpha_t R T_0; \\ T_2(\alpha) &= \frac{Eh}{R} w(\alpha) = -[1 - \varphi(\alpha) - \chi(\alpha)] \alpha_t E h T_0; \end{aligned} \quad (34)$$

$$G_1(\alpha) = 2\eta^2 \frac{D}{R^2} w''(\alpha) = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{1-\nu^2} \frac{h^2}{6} \alpha_t E T_0;$$

$$G_2(\alpha) = \nu G_1(\alpha).$$

С помощью (34) находим максимальное продольное и кольцевое изгибные напряжения.

$$\sigma_1(\alpha) = \frac{6G_1(\alpha)}{h^2} = \pm \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{1-\nu^2} \alpha_t E T_0; \quad \sigma_2(\alpha) = \nu \sigma_1(\alpha).$$

4. Численный пример. Вычислим термоупругие напряжения для конкретного материала цилиндрической оболочки при гипотетическом уровне кусочно-постоянного по контуру и постоянного по длине оболочки температурного поля [3].

Пусть $t_0 = 100 \text{ град}$, тогда при $\nu = 0,3$, $\alpha_t \approx 16 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$; $E \approx 2 \cdot 10^4 \text{ даН} / \text{мм}^2$, что соответствует стали марки 1Х18Н10Т [10], получаем изгибное продольное напряжение $\sigma_1(\alpha) \approx 1,815 \alpha_t E T_0 \approx 58 \text{ даН} / \text{мм}^2$,

которое почти в два раза превышает предел текучести материала $\sigma_{0,2} \approx 24,8 \text{ даН} / \text{мм}^2$ [10].

Кольцевое изгибное напряжение: $\sigma_2(\alpha) = \nu \sigma_1(\alpha) \approx 17,4 \text{ даН} / \text{мм}^2$.

Кольцевое усилие, и, следовательно, напряжение, постоянное по толщине, является сжимающим: $\sigma_2(\alpha) = T_2(\alpha) / h = -[1 - \varphi(\alpha) - \chi(\alpha)] \alpha_t E T_0$. В заделке оно равно нулю.

Из сравнения видно, что изгибное напряжение больше кольцевого, постоянного по толщине оболочки и может достигать в реальных случаях [3] значительной величины.

Библиографический список

1. Кан С.Н., Свердлов И.В. Расчет на прочность самолета. - М.: Машиностроение, 1966. 519 с.
2. Новиков В.Н., Авхимович Б.М., Вейтин В.Е. Основы устройства и конструирования летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1991. 368 с.
3. Моссаковский В.И., Макаренко А.Г., Никитин П.И., Саввин Ю.И., Спиридонов И.Н. Прочность ракетных конструкций. - М.: Высшая школа, 1990. 359 с.
4. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. - М.: Госстройиздат, 1958. 502 с.
5. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В. О методах синтеза напряженного состояния в теории оболочек // ДАН СССР, 1983, № 3, с. 54-56.
6. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. - М.: Машиностроение, 1991. -416 с.
7. Нерубайло Б.В. Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. - М.: Машиностроение, 1983. 248 с.
8. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. - М. Наука, 1966. 455 с.
9. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М., Физматгиз, 1963. 635 с.
10. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур (Под редакцией И.И. Гольденבלата). - М., Машиностроение, 1965. 567с.