

## **Траекторная обработка радиолокационной информации на основе многомодельной фильтрации**

**Сычев М.И.**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993,*

*Россия*

*e-mail: sychev@mai.ru*

### **Аннотация**

Рассматривается задача сопровождения траекторий воздушных судов по информации от радиолокационных средств наблюдения на основе многомодельной фильтрации. Представлены модели для описания их горизонтального движения с использованием различных векторов состояния. Описан подход для построения упрощенных многомодельных алгоритмов траекторной обработки. Проведено сравнение трех многомодельных алгоритмов траекторной обработки. Представлены результаты моделирования.

**Ключевые слова:** траекторная обработка, многомодельная фильтрация, радиолокационные средства наблюдения.

### **Введение**

Оценивание координат и параметров движения воздушных судов (ВС) по информации на выходе радиолокационных и иных источников наблюдения в последнее время является основой для решения ряда важных задач. В частности, в системе организации воздушного движения гражданской авиации повышение безопасности полетов, в том числе, основано на своевременном обнаружении и предотвращении нарушений правил горизонтального и вертикального эшелонирования. Это в свою очередь, предъявляет значительно более жесткие требования к техническим характеристикам средств наблюдения ВС и качеству траекторной обработки. Эти требования сформулированы в [1]. Там же определены основные типы движения ВС и их параметры.

Обычные фильтры Калмановского типа, основанные на применении одной модели возможного движения сопровождаемого объекта, удовлетворить этим требованиям не могут. Чаще всего используется модель прямолинейного равномерного движения с возмущениями. Для большинства ВС большую часть полета эта модель адекватно описывает реальное движение. Но при маневрировании ВС, вызванным сменой эшелона, курса, при выполнении взлета и посадки, эта модель не соответствует реальному движению. Ее использование при траекторной обработке в этих условиях приводит большим динамическим ошибкам. Компенсировать их можно увеличением мощности случайного возмущения в модели движения, что в свою очередь приведет к снижению точности оценивания координат и параметров движения ВС при прямолинейном равномерном движении.

Большое внимание при решении этой задачи уделено адаптивным методам, основанным на изменении параметров фильтра траекторной обработки при обнаружении маневра ВС. При этом модель движения ВС в большинстве случаев была основана на прямолинейном равномерном движении. В результате такие алгоритмы могли обладать хорошими характеристиками по точности оценивания координат и параметров движения на участках траектории ВС близких к прямолинейному равномерному движению. Но на участках маневра оценивание координат имело точность близкую к точности первичных измерений в лучшем случае, а оценки параметров движения, например проекции вектора скорости, имели большие ошибки. Это делает нежелательным использование таких алгоритмов для решения задач, связанных с предсказанием нарушений правил эшелонирования ВС. Необходимы алгоритмы, обеспечивающие хорошие оценки координат и параметров движения ВС не только на участках прямолинейного равномерного движения, но и на участках маневрирования и при смене типа движения.

Целью данной работы является исследование характеристик многомодельных алгоритмов при использовании различных способов описания используемых моделей движения. В частности, внесение неизвестных параметров отдельных моделей движения, таких как скорость разворота и продольное ускорение ВС, в общий расширенный вектор состояния или использование отдельных фильтров для формирования их оценок. Рассматривается подход к построению упрощенных

многомодельных алгоритмов траекторной обработки. Приводятся результаты сравнительного моделирования рассматриваемых алгоритмов.

## **1. Основные типы многомодельных алгоритмов**

Для повышения точности алгоритмов траекторной обработки на участках маневрирования необходимо отказаться от его описания как прямолинейное равномерное движение с большими возмущениями. Необходимо использовать более точные модели движения ВС, что позволит существенно уменьшить мощность случайных возмущений в ней. Такие фильтры способны лучше сгладить координаты и параметры движения ВС на участках маневрирования по сравнению с первичными наблюдениями.

В результате приходим к необходимости использования многомодельных алгоритмов, основанных на описании возможного движения ВС при помощи нескольких моделей. Общий подход к синтезу таких фильтров можно найти в [2-5]. Он основан на общем алгоритме фильтрации Марковского процесса. В [3, 5] показано, что добавив в вектор состояния, описывающий текущие координаты и параметры движения ВС, дискретный параметр, интерпретируемый как индекс текущей модели движения, можно получить общий алгоритм многомодельной фильтрации. Он описывает, как меняется плотность распределения вероятностей вектора состояния, включая дискретную компоненту, с течением времени и при обновлении новыми результатами наблюдений.

Технически реализуемые алгоритмы получаются при аппроксимации плотности распределения вероятностей вектора состояния нормальным законом распределения. В этих условиях каждая из гипотез, соответствующая одному из возможных типов движения, в любой момент времени характеризуется математическим ожиданием вектора состояния, его корреляционной матрицей и вероятностью. В [4, 5] эта совокупность параметров соответствующая  $n$ -ой гипотезе в  $k$ -й момент времени обозначена как  $\lambda_n(k)$ .

$$\lambda_n(k) = \{\hat{\alpha}(k | Y(\overline{1, k}), \theta(k) = n), R(k | k, \theta(k) = n), P(\theta(k) = n | Y(\overline{1, k}))\},$$

$$n = \overline{1, N}. \quad (1)$$

$\theta(k)$  - индекс модели движения ВС в  $k$ -й момент времени,  $N$  - общее число моделей движения ВС.  $\hat{\alpha}(k | Y(\overline{1, k}), \theta(k) = n)$ ,  $R(k | k, \theta(k) = n)$  - математическое ожидание и корреляционная матрица вектора состояния координат и параметров движения ВС в  $k$ -й момент времени по информации от наблюдаемой выборки  $Y(\overline{1, k})$  с 1-го по  $k$ -й отсчет включительно при условии справедливости гипотезы с индексом  $n$  относительно модели движения ВС.  $P(\theta(k) = n | Y(\overline{1, k}))$  - оценка вероятности гипотезы с индексом  $n$  в  $k$ -й момент времени. Она может рассматриваться как априорная для следующего момента времени или как апостериорная для текущего.

Алгоритм многомодельной фильтрации можно разбить на три типа элементарных операций: объединение гипотез, экстраполяция гипотезы на следующий момент времени и обновление гипотезы при получении нового наблюдения. Графические обозначения этих операций представлены на рис.

1-3. На рис. 2, номер внутри треугольника обозначает индекс модели движения, используемой при экстраполяции вектора состояния ВС. Там же,  $\lambda_{n1}(k)$  - совокупность параметров соответствующая  $n1$ -ой гипотезе относительно модели движения ВС в  $k$ -й момент времени,  $\lambda_{n2/n1}(k+1/k)$  - совокупность параметров соответствующая  $n1$ -ой гипотезе в  $k$ -й момент времени после экстраполяции на  $(k+1)$ -й момент времени при помощи модели движения с индексом  $n2$ . На рис.3 индекс обновляемой гипотезы у совокупности параметров  $\lambda(k+1/k)$  и  $\lambda(k+1/k+1)$  опущен, т.к. алгоритм обновления определяется моделью наблюдения и не зависит от модели движения ВС.

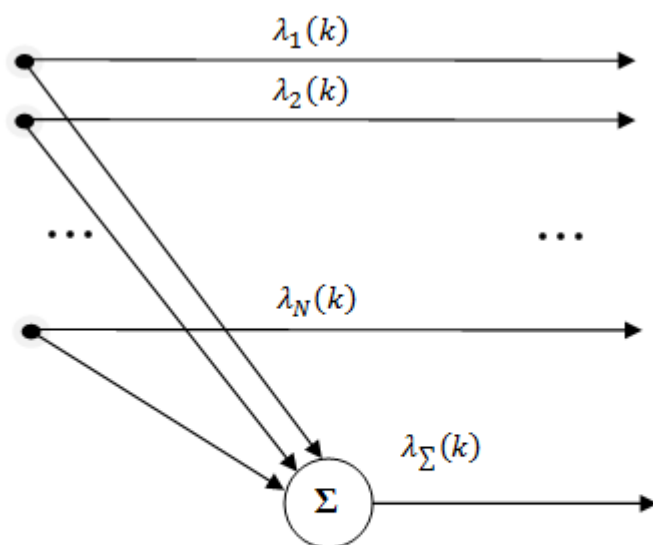


Рис. 1

Алгоритм объединения гипотез

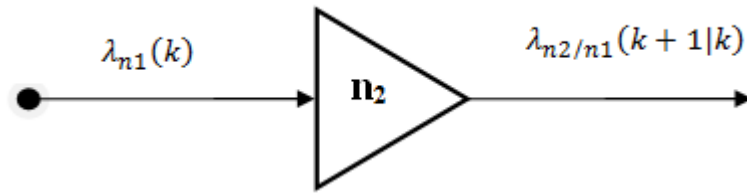


Рис. 2

Модуль экстраполяции

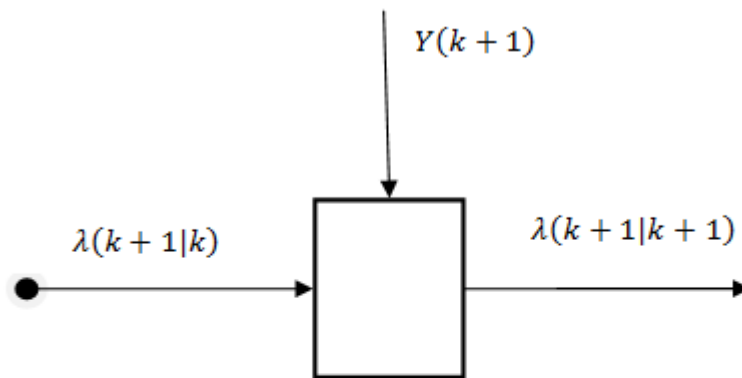


Рис. 3

Модуль обновления

В зависимости от того в какой момент производится объединение отдельных гипотез и как используется его результат возможно построение многомодельных алгоритмов 3-х типов. В [4,5] они названы ММА1, ММА2 и ММА3. Их структурные схемы приведены на рис. 4-6.

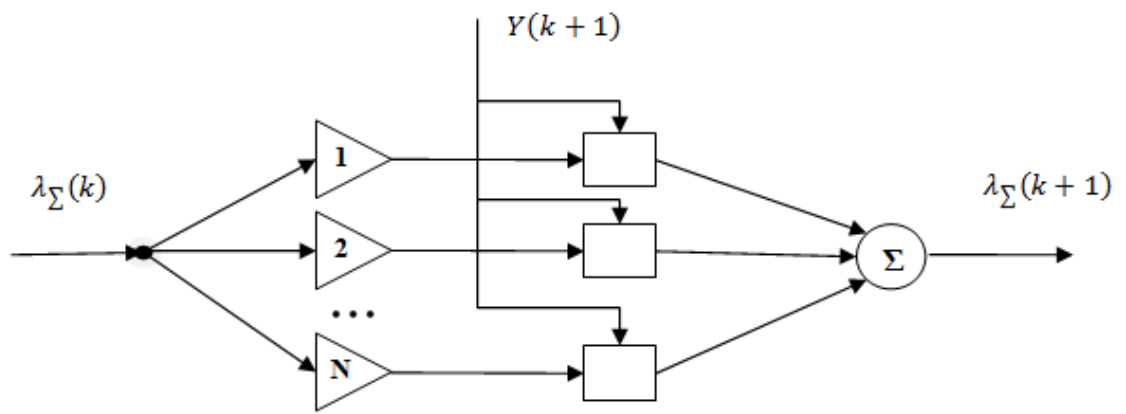


Рис. 4

Структурная схема алгоритма MMA1



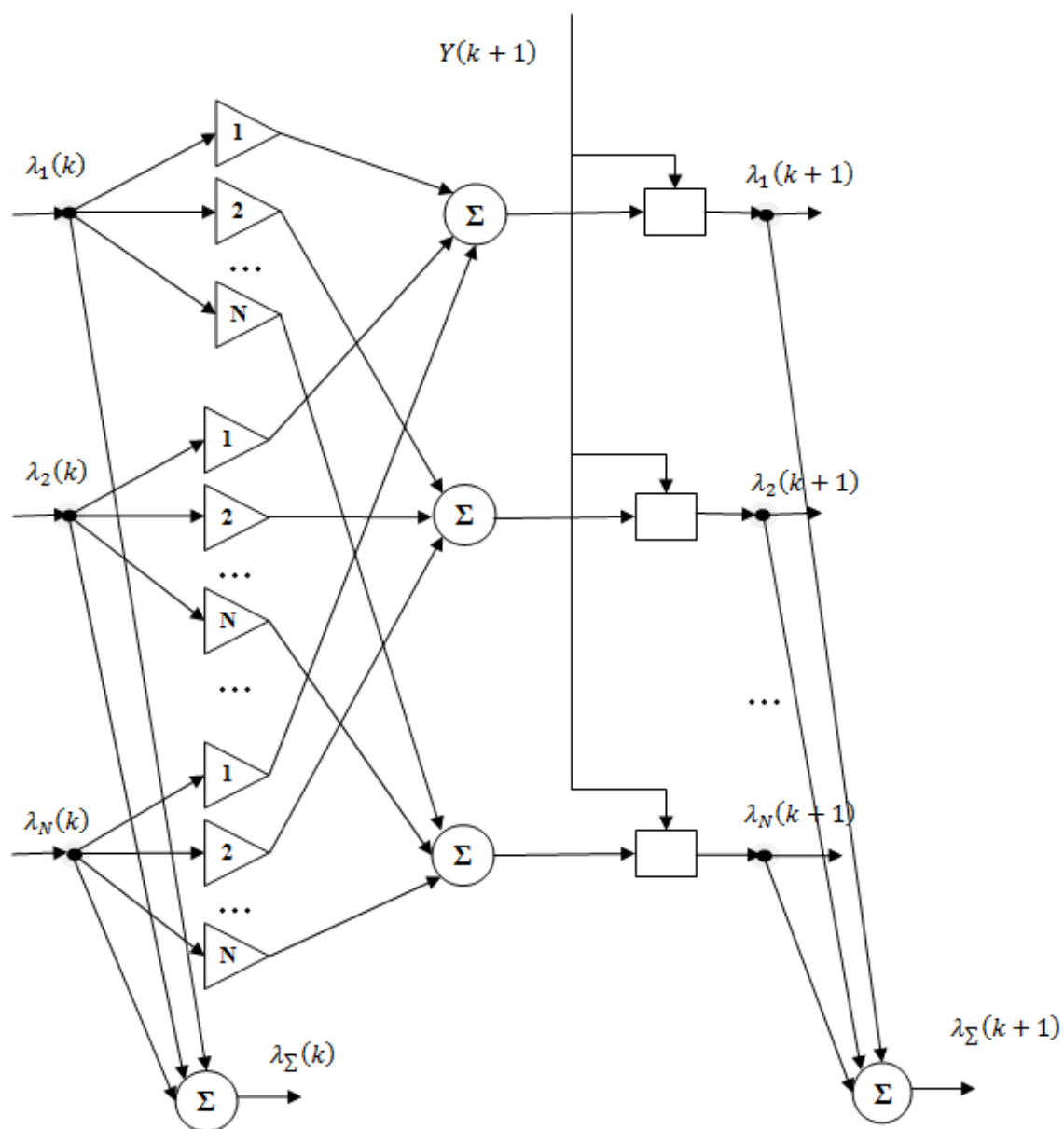


Рис. 5

Структурная схема алгоритма MMA2

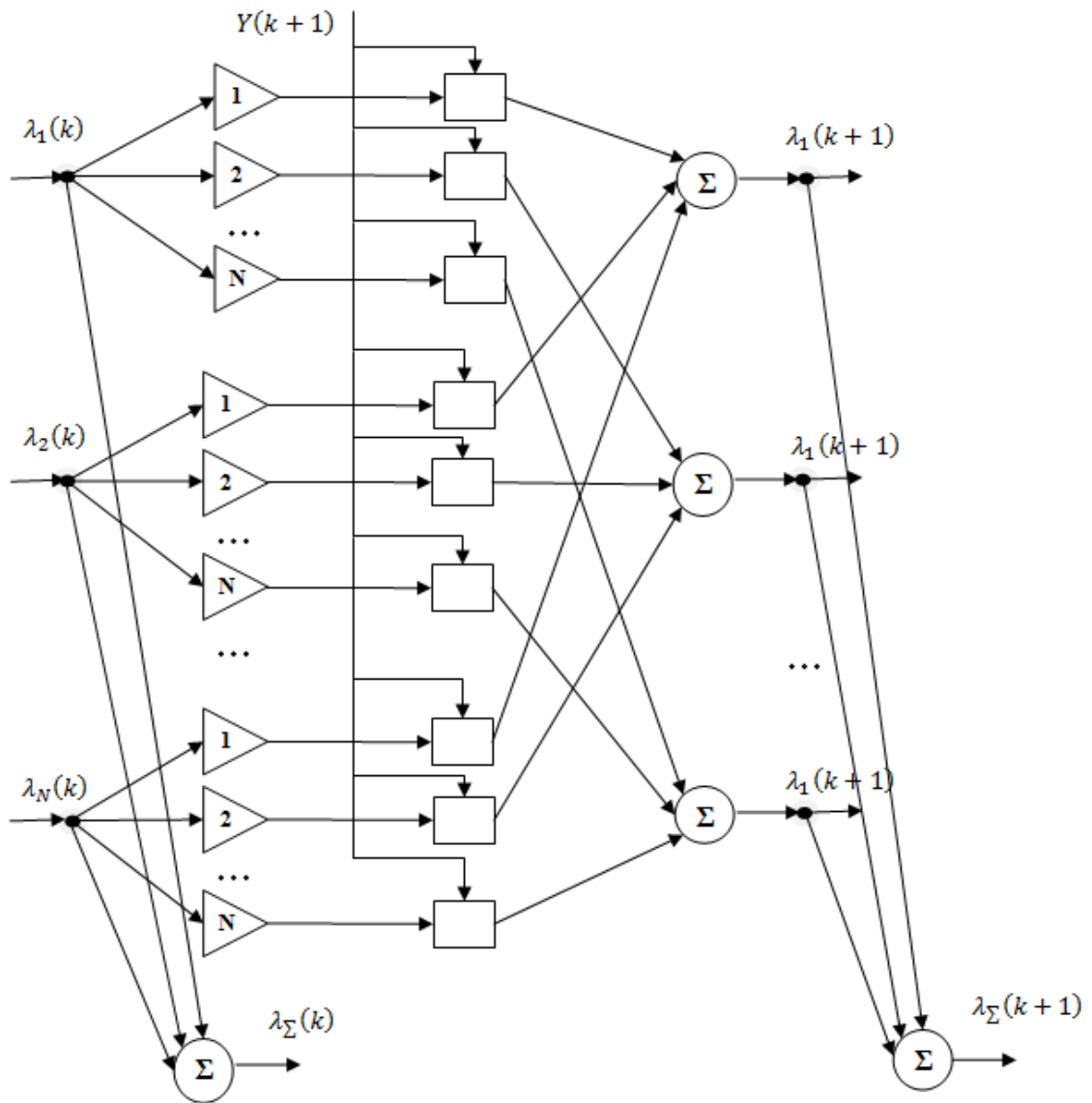


Рис. 6

Структурная схема алгоритма MMA3

В первом алгоритме (MMA1) для продолжения работы при переходе к следующему моменту времени используется объединенная информация от всех гипотез. Фактически, при переходе от  $k$ -го момента времени к  $(k+1)$ -му, фильтр можно рассматривать как  $N$  параллельно работающих фильтров Калмана с последующим объединением их информации. Во втором алгоритме (MMA2) экстраполяция вектора состояния на следующий момент

времени происходит для каждой из гипотез в отдельности, после чего происходит их объединение. В результате в ММА2 присутствует  $N^2$  блоков экстраполяции и  $N$  блоков обновления. Объединение гипотез после обновления производится исключительно для выдачи информации на выход фильтра, но на следующем шаге внутри фильтра не используется. Третий алгоритм (ММА3) представляет собой  $N^2$  параллельно работающих фильтров Калмана с объединением информации для отдельных гипотез после их обновления. Полное объединение гипотез, как и в ММА2 производится только для выдачи информации на выход фильтра. Наиболее трудоемким с точки зрения вычислительных затрат оказывается ММА3. Далее за ним следуют ММА2 и ММА1.

## **2. Многомодельные алгоритмы траекторной обработки**

Задача оценивания параметров траектории движения ВС по данным радиолокационных наблюдений в общем случае нелинейная. Учитывая высокую точность первичных радиолокационных наблюдений (с.к.о. по дальности (50-150) м, с.к.о. по азимуту (2-15) угловых минут), в подавляющем большинстве случаев оправдана гауссова аппроксимация плотностей распределения вероятностей векторов состояния и наблюдения, что фактически эквивалентно линеаризации задачи.

В этих условиях, уравнение изменения вектора состояния непрерывных параметров  $\alpha(k)$  можно представить в виде

$$\alpha(k+1) = F(\theta(k+1) = n)\alpha(k) + N_\alpha(k+1, \theta(k+1) = n) \quad (2)$$

$$n = \overline{1, N}, k = \overline{1, K}.$$

Здесь обозначено:  $k$  - дискретное время,  $K$  - число временных отсчетов с начала наблюдения,  $\theta(k)$  - индекс модели движения ВС в  $k$ -й момент времени,  $N$  - общее число моделей движения ВС. Матрица  $F(\theta(k+1) = n)$  и параметры вектора возмущающих шумов  $N_\alpha(k+1, \theta(k+1) = n)$ , зависят от индекса текущей модели движения. Отсчеты вектора возмущающих шумов имеют нормальное распределение с параметрами  $M[N_\alpha(k, \theta(k) = n)] = 0, M[N_\alpha(k_1, \theta(k) = n)N_\alpha^T(k_2, \theta(k) = n)] = R_\alpha(\theta(k) = n)\delta_{k_1, k_2}$ .  $\delta_{k_1, k_2}$  - символ Кронекера.

Линеаризованное уравнение наблюдения представим в виде

$$Y(k) = H\alpha(k) + N_Y(k) \quad (3)$$

$Y(k)$  - вектор наблюдаемой выборки в  $k$ -й момент времени,  $H$  - матрица наблюдения,  $N_Y(k)$  - вектор шумов наблюдения. Отсчеты вектора  $N_Y(k)$  имеют нормальное распределение с характеристиками:

$$M[N_Y(k)] = 0, M[N_Y(k_1)N_Y^T(k_2)] = R_Y\delta_{k_1, k_2}.$$

Объединение гипотез  $\lambda_n(k), n = \overline{1, N}$  основано на гауссовой аппроксимации результирующей плотности распределения вероятностей непрерывных параметров вектора состояния  $\alpha(k)$ . Результирующий вектор состояния непрерывных параметров и его корреляционная матрица могут быть получены следующим образом.

$$\hat{\alpha}_{\Sigma}(k | Y(\bar{1}, \bar{k})) = \sum_{n=1}^N P(\theta(k) = n | Y(\bar{1}, \bar{k})) \hat{\alpha}(k | Y(\bar{1}, \bar{k}), \theta(k) = n)$$

$$R(k | k) = \sum_{n=1}^N P(\theta(k) = n | Y(\bar{1}, \bar{k})) \{ R(k | k, \theta(k) = n) +$$

$$+ [\hat{\alpha}(k | Y(\bar{1}, \bar{k})) - \hat{\alpha}(k | Y(\bar{1}, \bar{k}), \theta(k) = n)] [\hat{\alpha}(k | Y(\bar{1}, \bar{k})) - \hat{\alpha}(k | Y(\bar{1}, \bar{k}), \theta(k) = n)]^T \}$$
(4)

Если объединяемые гипотезы не образуют полной группы и сумма их вероятностей не равна 1, например как в ММА2 при объединении экстраполированных гипотез, то в (4) необходимо провести их нормировку.

При этом вероятность объединенной гипотезы равна сумме объединяемых.

Экстраполяция гипотез производится следующим образом.

$$\hat{\alpha}(k+1 | Y(\bar{1}, \bar{k}), \theta(k+1) = n_2, \theta(k) = n_1) = F(\theta(k+1) = n_2) \hat{\alpha}(k | Y(\bar{1}, \bar{k}), \theta(k) = n_1)$$

$$R(k+1 | k, \theta(k+1) = n_2, \theta(k) = n_1) = F(\theta(k+1) = n_2) R(k | k, \theta(k) = n_1) F^T(\theta(k+1) = n_2) +$$

$$+ R_{\alpha}(\theta(k+1) = n_2)$$
(5)

$$P(\theta(k+1) = n_2 | Y(\bar{1}, \bar{k}), \theta(k) = n_1) = P(\theta(k+1) = n_2 | \theta(k) = n_1) P(\theta(k) = n_1 | Y(\bar{1}, \bar{k}))$$

$$n_1 = \bar{1}, N, n_2 = \bar{1}, N.$$

$P(\theta(k+1) = n_2 | \theta(k) = n_1)$  - вероятность смены типа движения в  $k$ -й момент времени. Совокупность этих вероятностей образует матрицу переходных вероятностей.

Обновление гипотезы следующим наблюдением осуществляется по формулам

$$\hat{\alpha}(k+1 | Y(\overline{1, k+1}), \theta(k+1) = n) = \hat{\alpha}(k+1 | Y(\overline{1, k}), \theta(k+1) = n) + \\ + R(k+1 | k+1, \theta(k+1) = n) H^T R_Y^{-1} \{Y(k+1) - H \hat{\alpha}(k+1 | Y(\overline{1, k}), \theta(k+1) = n)\}$$

$$R^{-1}(k+1 | k+1, \theta(k+1) = n) = R^{-1}(k+1 | k, \theta(k+1) = n) + H^T R_Y^{-1} H$$

$$P(\theta(k+1) = n | Y(\overline{1, k+1})) = \frac{1}{c} P(\theta(k+1) = n | Y(\overline{1, k})) w(Y(k+1) | \theta(k+1) = n, Y(\overline{1, k})) \quad (6)$$

$$w(Y(k+1) | \theta(k+1) = n, Y(\overline{1, k})) = ((2\pi)^M \det(R_Y + HR(k+1 | k, \theta(k+1) = n)H^T))^{-1/2} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}[Y(k+1) - H \hat{\alpha}(k+1 | Y(\overline{1, k}), \theta(k+1) = n)]^T \times \right. \\ \left. \times [R_Y + HR(k+1 | k, \theta(k+1) = n)H^T]^{-1}[Y(k+1) - H \hat{\alpha}(k+1 | Y(\overline{1, k}), \theta(k+1) = n)]\right\}$$

$M$  – размер вектора наблюдения,  $1/c$  – нормирующий множитель, обеспечивающий равенство 1 суммы вероятностей всех гипотез.

### 3. Линеаризованная модель наблюдаемой выборки

Первичные радиолокационные измерения координат ВС обычно выполняются в координатах азимут и дальность относительно точки стояния РЛС. Ошибки по координатам азимут и дальность обычно считаются статистически независимыми с нормальным законом распределения. Описание движения ВС в этих координатах, даже для прямолинейного равномерного движения, приводит к нелинейным уравнениям. В тоже время, большую часть полета движение ВС описывается именно этой моделью. Поэтому выбор системы координат для описания вектора состояния траектории ВС неочевиден. При обработке информации от нескольких РЛС при оценивании координат ВС в горизонтальной плоскости часто переходят к локальной декартовой системе координат. В общем случае это

преобразование нелинейно, что приводит изменению закона распределения ошибок наблюдения, делая его негауссовым.

Точность первичных радиолокационных измерений в РЛС системы управления воздушного движения гражданской авиации обычно достаточно высокая (с.к.о. по дальности (50-150) м, с.к.о. по азимуту (2-15) угловых минут). Это приводит к тому, что закон распределения ошибок наблюдения при переходе в декартову систему координат сохраняется нормальным, но появляется взаимная корреляция между ошибками по разным координатам. Учесть его несложно. Если вектор наблюдения представить в виде

$$Y(k) = [x(k) \quad y(k)]^T, \quad (7)$$

где  $x(k) = r(k)\sin(Az(k))$ , а  $y(k) = r(k)\cos(Az(k))$ , то уравнение наблюдения можно записать в виде (3) с ковариационной матрицей шумов наблюдения  $R_y$  следующего вида

$$R_y(r, Az) = \begin{bmatrix} \sin(Az) & \cos(Az) \\ \cos(Az) & -\sin(Az) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sigma_{Az}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(Az) & \cos(Az) \\ \cos(Az) & -\sin(Az) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$\sigma_r$ ,  $\sigma_{Az}$  - с.к.о. ошибки по дальности и азимуту соответственно;  $r$ ,  $Az$  - дальность и азимут ВС относительно РЛС. Обратная матрица  $R_y^{-1}$  может быть легко вычислена

$$R_y^{-1}(r, Az) = \begin{bmatrix} \sin(Az) & \cos(Az) \\ \cos(Az) & -\sin(Az) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 1/r^2\sigma_{Az}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(Az) & \cos(Az) \\ \cos(Az) & -\sin(Az) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Вместо  $r$ ,  $Az$  можно использовать их оценки, полученные в результате экстраполяции на текущий момент времени или разбив зону действия РЛС на

области по дальности и азимуту и зафиксировать их внутри этих областей, рассчитав заранее  $R_y$  и  $R_y^{-1}$ .

#### 4. Модели движения воздушных судов

В [1] определены три основных типа горизонтального движения ВС гражданской авиации и их параметры. Первый основной тип – прямолинейное равномерное движение. Вторым – поворот (движение по окружности). Третий – прямолинейное движение с изменением скорости.

В качестве системы координат выберем прямоугольную локальную систему координат относительно РЛС. Начало координат находится в фазовом центре антенны РЛС, ось  $Y$  направлена на север, ось  $X$  – на восток, ось  $Z$  – вертикально вверх.

Для прямолинейного равномерного движения в горизонтальной плоскости в локальной декартовой системе координат РЛС вектор состояния траектории ВС можно представить в виде

$$\alpha(k) = [x(k) \quad \dot{x}(k) \quad y(k) \quad \dot{y}(k)]^T. \quad (10)$$

Здесь обозначено:  $x(k)$ ,  $y(k)$  – координаты ВС;  $\dot{x}(k)$ ,  $\dot{y}(k)$  – проекции вектора скорости. Матрицы, входящие в уравнение (2) можно представить в виде

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$



$T$  – интервал времени между рассматриваемыми отсчетами времени, в нашем случае это период кругового обзора РЛС. Вектор шумов возмущения представим в виде

$$N_{\alpha}(k) = GA_{XY}(k), \quad A_{XY}(k) = \begin{bmatrix} a_X(k) \\ a_Y(k) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ 0 & T \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Вектор  $A_{XY}(k)$  интерпретируется как проекции случайного вектора ускорения ВС. Динамические характеристики ВС вдоль и поперек движения существенно отличаются. Поэтому

$$A_{XY}(k) = R(k)A_{LT}(k),$$

$$A_{LT}(k) = \begin{bmatrix} a_L(k) \\ a_T(k) \end{bmatrix}, \quad M[A_{LT}(k)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_{LT} = M[A_{LT}(k)A_{LT}^T(k)] = \begin{bmatrix} \sigma_L^2 & 0 \\ 0 & \sigma_T^2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

$a_L(k)$ ,  $a_T(k)$  - случайные ускорения ВС вдоль и поперек движения соответственно.  $\sigma_L$ ,  $\sigma_T$  - с.к.о. ускорения ВС вдоль и поперек движения.  $R(k)$  - матрица поворота на угол  $\beta(k)$ ,  $\beta(k)$  - курс ВС в  $k$ -й момент времени.

$$R(k) = \begin{bmatrix} \sin(\beta(k)) & \cos(\beta(k)) \\ \cos(\beta(k)) & -\sin(\beta(k)) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Курс ВС можно определить как  $\beta(k) = \arctg\left(\frac{\dot{x}(k)}{\dot{y}(k)}\right)$ . После чего, можно

получить элементы матрицы поворота  $R(k)$ .

$$\sin(\beta(k)) = \frac{\dot{x}(k)}{\sqrt{\dot{x}^2(k) + \dot{y}^2(k)}}, \quad \cos(\beta(k)) = \frac{\dot{y}(k)}{\sqrt{\dot{x}^2(k) + \dot{y}^2(k)}}$$

В результате получим

$$N_{\alpha}(k) = GR(k)A_{LT}(k) \quad R_{\alpha} = GR(k)R_{LT}R^T(k)G^T \quad (15)$$

При описании вектора состояния в виде (10), для стандартного поворота переходную матрицу можно представить в виде

$$F(\omega(k)) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\omega(k)T)}{\omega(k)} & 0 & \frac{1 - \cos(\omega(k)T)}{\omega(k)} \\ 0 & \cos(\omega(k)T) & 0 & \sin(\omega(k)T) \\ 0 & \frac{\cos(\omega(k)T) - 1}{\omega(k)} & 1 & \frac{\sin(\omega(k)T)}{\omega(k)} \\ 0 & -\sin(\omega(k)T) & 0 & \cos(\omega(k)T) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

$\omega(k)$  - скорость поворота в  $k$ -й момент времени. Вектор шумов возмущения представим как в (12)-(13), со своими значениями с.к.о. случайных возмущений вдоль и поперек движения ВС. В матрице (16) вместо  $\omega(k)$  можно использовать ее текущую оценку дополнительно сглаженную при помощи  $\alpha$ -фильтра

$$\omega(k+1) = \omega(k) + \alpha_{\omega}[\hat{\omega}(k+1) - \omega(k)] \quad , \quad (17)$$

$$\hat{\omega}(k+1) = \frac{\beta(k+1) - \beta(k)}{T} \quad . \quad (18)$$

Для прямолинейного движения с изменением скорости модель движения для вектора состояния (10) будет аналогична модели прямолинейного равномерного движения (11)-(15), за исключением

$$M[A_{LT}(k)] = \begin{bmatrix} m_L(k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$m_L(k)$  - среднее значение ускорения вдоль движения ВС. В качестве  $m_L(k)$  можно использовать текущую оценку сглаженную при помощи  $\alpha$ -фильтра

$$m_L(k+1) = m_L(k) + \alpha_{m_L}[\hat{m}_L(k+1) - m_L(k)] \quad (20)$$

$$\hat{m}_L(k+1) = \frac{v(k+1) - v(k)}{T}$$

$$v(k) = \sqrt{\dot{x}^2(k) + \dot{y}^2(k)}$$

Вид матрицы наблюдения в уравнении (3) определяется структурой вектора состояния. Для вектора состояния (10) она имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

В представленном 3-х модельном алгоритме помимо вектора состояния (10) оцениваются скорость поворота ВС для второй модели движения и продольное ускорение ВС для третьей. Их оценки формируются с использованием алгоритмов (17) и (20) соответственно. Классический подход предполагает включение этих величин в вектор состояния. В этом случае, вектор состояния будет иметь вид

$$\alpha(k) = [x(k) \quad \dot{x}(k) \quad y(k) \quad \dot{y}(k) \quad \omega(k) \quad a_L(k)]^T. \quad (22)$$

Использование расширенного вектора состояния (22) вместо (10) повлияет на структуру всех матриц, которые используются в рассматриваемых 3-х модельных алгоритмах.

Переходная матрица для модели прямолинейного равномерного движения будет иметь вид

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Для модели стандартного поворота:

$$F(\omega(k)) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\omega(k)T)}{\omega(k)} & 0 & \frac{1 - \cos(\omega(k)T)}{\omega(k)} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega(k)T) & 0 & \sin(\omega(k)T) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos(\omega(k)T) - 1}{\omega(k)} & 1 & \frac{\sin(\omega(k)T)}{\omega(k)} & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\omega(k)T) & 0 & \cos(\omega(k)T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (24)$$

Нелинейный характер зависимости переходной матрицы от скорости поворота ВС  $\omega(k)$  приводит к тому, что в уравнениях (5), описывающих экстраполяцию параметров гипотезы на следующий момент времени, в уравнении описывающем изменение корреляционной матрицы вектора состояния необходимо использовать модифицированную переходную матрицу

$$F'(\omega(k)) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\omega(k)T)}{\omega(k)} & 0 & \frac{1 - \cos(\omega(k)T)}{\omega(k)} & f_1 & 0 \\ 0 & \cos(\omega(k)T) & 0 & \sin(\omega(k)T) & f_2 & 0 \\ 0 & \frac{\cos(\omega(k)T) - 1}{\omega(k)} & 1 & \frac{\sin(\omega(k)T)}{\omega(k)} & f_3 & 0 \\ 0 & -\sin(\omega(k)T) & 0 & \cos(\omega(k)T) & f_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad (25)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= x \left[ \frac{T}{\omega} \cos(\omega T) - \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega T) \right] + y \left[ \frac{T}{\omega} \sin(\omega T) + \frac{\cos(\omega T) - 1}{\omega^2} \right] \approx y \frac{T^2}{2} \\ f_2 &= x [-T \sin(\omega T)] + y [T \cos(\omega T)] \approx y T \\ f_3 &= x \left[ -\frac{T}{\omega} \sin(\omega T) + \frac{1 - \cos(\omega T)}{\omega^2} \right] + y \left[ \frac{T}{\omega} \cos(\omega T) - \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega T) \right] \approx -x \frac{T^2}{2} \\ f_4 &= x [-T \cos(\omega T)] - y [T \sin(\omega T)] \approx -x T \end{aligned} . \quad (26)$$

В (26) кроме точных значений функций приведены приближенные значения учитывающие, что скорость поворота реальных ВС гражданской авиации невелика ( $\omega T \ll 1$ ).

Переходная матрица для модели прямолинейного движения с изменением скорости имеет вид

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} T \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (27)$$

Корреляционная матрица возмущений вектора состояния (22), с учетом изменения его структуры, кроме возмущений вдоль и поперек движения ВС содержит возмущения по скорости поворота. В результате

$$R_\alpha = GR(k)R_{LT}R^T(k)G^T = G \begin{bmatrix} R(k)R_{LT}R^T(k) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & (d\omega)^2 \end{bmatrix} G^T ,$$

$$G = \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T^2/2 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (28)$$

$d\omega$  - с.к.о. возмущения по скорости поворота.

Матрицы наблюдения в уравнении (3) для вектора состояния (22) имеет вид

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (29)$$

## 5. Упрощенные многомодельные алгоритмы траекторной обработки

Существенного сокращения вычислительных затрат при реализации многомодельных алгоритмов можно достичь если отказаться от перерасчета корреляционной матрицы вектора состояния с учетом текущих наблюдений, и зафиксировать ее в соответствии с типом движения ВС. Каждая из гипотез, соответствующая одному из возможных типов движения, в любой момент времени будет характеризоваться математическим ожиданием вектора состояния и ее вероятностью. Эту совокупность параметров соответствующую  $n$ -ой гипотезе в  $k$ -й момент времени, в отличие от (1), обозначим как  $\lambda'_n(k)$ .

$$\lambda'_n(k) = \{\hat{\alpha}(k | Y(\overline{1,k}), \theta(k) = n), P(\theta(k) = n | Y(\overline{1,k}))\}, \\ n = \overline{1, N}. \quad (30)$$

Формулы для выполнения элементарных операций (объединение гипотез, экстраполяция гипотезы и обновление гипотезы) упростятся. Так объединение гипотез можно выполнить следующим образом.

$$\hat{\alpha}_\Sigma(k | Y(\overline{1,k})) = \sum_{n=1}^N P(\theta(k) = n | Y(\overline{1,k})) \hat{\alpha}(k | Y(\overline{1,k}), \theta(k) = n) \quad (31)$$

Не стоит забывать, что если объединяемые гипотезы не образуют полной группы и сумма их вероятностей не равна 1, то в (31) необходимо провести их нормировку. При этом вероятность объединенной гипотезы равна сумме объединяемых.

Экстраполяция гипотез производится следующим образом.

$$\hat{\alpha}(k+1 | Y(\bar{1}, \bar{k}), \theta(k+1) = n_2, \theta(k) = n_1) = F(\theta(k+1) = n_2) \hat{\alpha}(k | Y(\bar{1}, \bar{k}), \theta(k) = n_1)$$

$$P(\theta(k+1) = n_2 | Y(\bar{1}, \bar{k}), \theta(k) = n_1) = P(\theta(k+1) = n_2 | \theta(k) = n_1) P(\theta(k) = n_1 | Y(\bar{1}, \bar{k}))$$

$$n_1 = \bar{1}, \bar{N}, n_2 = \bar{1}, \bar{N}. \quad (32)$$

Обновление гипотезы следующим наблюдением осуществляется по формулам

$$\hat{\alpha}(k+1 | Y(\bar{1}, \bar{k}+1), \theta(k+1) = n) = \hat{\alpha}(k+1 | Y(\bar{1}, \bar{k}), \theta(k+1) = n) +$$

$$+ K(\theta(k+1) = n) \{Y(k+1) - H \hat{\alpha}(k+1 | Y(\bar{1}, \bar{k}), \theta(k+1) = n)\}$$

$$P(\theta(k+1) = n | Y(\bar{1}, \bar{k}+1)) = \frac{1}{c} P(\theta(k+1) = n | Y(\bar{1}, \bar{k})) w(Y(k+1) | \theta(k+1) = n, Y(\bar{1}, \bar{k}))$$

$$\quad (33)$$

$$w(Y(k+1) | \theta(k+1) = n, Y(\bar{1}, \bar{k})) = ((2\pi)^M \det(R_Y + HR(k+1 | k, \theta(k+1) = n)H^T))^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}[Y(k+1) - H \hat{\alpha}(k+1 | Y(\bar{1}, \bar{k}), \theta(k+1) = n)]^T \times\right.$$

$$\left. \times [R_Y + HR(k+1 | k, \theta(k+1) = n)H^T]^{-1}[Y(k+1) - H \hat{\alpha}(k+1 | Y(\bar{1}, \bar{k}), \theta(k+1) = n)]\right\}$$

$K(\theta(k+1) = n)$  - матрица усиления фильтра, соответствующего  $n$ -ой модели движения ВС. Корреляционная матрица экстраполированного вектора состояния, соответствующая  $n$ -ой модели движения ВС,  $R(k+1 | k, \theta(k+1) = n)$  фиксирована. Ее элементы задаются как параметры алгоритма. В (33) она входит в функцию правдоподобия  $w(Y(k+1) | \theta(k+1) = n, Y(\bar{1}, \bar{k}))$ . С учетом структуры матрицы наблюдения  $H$  не все ее элементы используются в алгоритме. Так при радиолокационных наблюдениях при рассмотрении задачи на плоскости необходимо задавать только параметры ошибок по пространственным координатам. Если задать ошибки вдоль и поперек

движения ВС как независимые с равными с.к.о., то их легко будет учесть в (8) и (9).

$$R_y + HR(k+1 | k, \theta(k+1) = n)H^T = \begin{bmatrix} \sin(Az) & \cos(Az) \\ \cos(Az) & -\sin(Az) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r^2 + \sigma_{LT}^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sigma_{Az}^2 + \sigma_{LT}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(Az) & \cos(Az) \\ \cos(Az) & -\sin(Az) \end{bmatrix} \quad (34)$$

$\sigma_{LT}$  - с.к.о. ошибки экстраполяции координат ВС вдоль и поперек движения ВС.

$$[R_y + HR(k+1 | k, \theta(k+1) = n)H^T]^{-1} = \begin{bmatrix} \sin(Az) & \cos(Az) \\ \cos(Az) & -\sin(Az) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sigma_r^2 + \sigma_{LT}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \sigma_{Az}^2 + \sigma_{LT}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(Az) & \cos(Az) \\ \cos(Az) & -\sin(Az) \end{bmatrix} \quad (35)$$

Для вектора состояния (10) матрица  $K(\theta(k+1) = n)$  задается в виде

$$K(\theta(k+1) = n) = \begin{bmatrix} \alpha(\theta(k+1) = n) & 0 \\ \beta(\theta(k+1) = n)/T & 0 \\ 0 & \alpha(\theta(k+1) = n) \\ 0 & \beta(\theta(k+1) = n)/T \end{bmatrix} \quad (36)$$

В результате получаем многомодельный вариант двумерного  $\alpha$ - $\beta$  фильтра.

Для выбора коэффициентов  $\beta$  можно воспользоваться соотношением

$$\beta = \frac{\alpha^2}{2 - \alpha} \quad (37)$$

## 6. Результаты моделирования

При моделировании исследовались трехмодельные алгоритмы построенные по схеме ММА2. В [4,5] показано, что характеристики таких алгоритмов по точности близки к ММА3, но с точки зрения вычислительных затрат, они более экономные. Алгоритм 1 построен на основе вектора



состояния (10), модели движения и наблюдения описываются матрицами (11)-(21). Алгоритм 2 основан на векторе состояния (22). Матрицы, описывающие модели движения и наблюдения, определены в (23)-(29). Алгоритм 3 построен с использованием упрощенного подхода с использованием вектора состояния (10).

Моделирование проводилось для одного из тестов, взятого из [1]. ВС наблюдается при помощи одной аэродромной вторичной РЛС кругового обзора. Период обзора – 4 сек, с.к.о. по дальности – 70 м, по азимуту – 0.08 град. ВС движется со скоростью 155 м/с, первые 400 сек движение происходит прямолинейно и равномерно, вторые 400 сек движение происходит по окружности с тангенциальным ускорением – 4 м/с<sup>2</sup>. Центр окружности находится на расстоянии 150 км относительно РЛС. Таким образом, можно проверить характеристики исследуемых алгоритмов для двух типов движения и при переходе между ними.

Матрица вероятностей перехода  $P(\theta(k+1)|\theta(k))$  для всех исследуемых алгоритмов была выбрана следующей

$$P(\theta(k+1)|\theta(k)) = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.05 & 0.2 \\ 0.1 & 0.95 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Начальная вероятность первой гипотезы была задана 1, а второй и третьей 0. Общие параметры для алгоритмов 1 и 2 были выбраны одинаковыми. Так для модели прямолинейного равномерного движения:  $\sigma_L=0.05$  м/с<sup>2</sup>,  $\sigma_T=0.05$  м/с<sup>2</sup>. Для модели стандартного поворота:  $\sigma_L=0.5$  м/с<sup>2</sup>,  $\sigma_T=0.25$  м/с<sup>2</sup>. Для модели

прямолинейного движения с изменением скорости:  $\sigma_L=1 \text{ м/с}^2$ ,  $\sigma_T=0.5 \text{ м/с}^2$ . В 1-м алгоритме:  $\alpha_\omega=0.3$ ,  $\alpha_{mL}=0.3$ , во 2-м:  $d\omega=0.125 \text{ град/сек}$ . В 3-м алгоритме:  $\sigma_{LT}=200 \text{ м}$ , для 1-й модели  $\alpha=0.2$ , для 2-й и 3-й  $\alpha=0.4$ .

Результаты моделирования представлены на рис. 7-10. На рис. 7 представлены зависимости полной с.к.о. по координате вдоль движения ВС от времени (в периодах обзора). На рис. 8 аналогичные зависимости поперек движения ВС. На рис. 9 представлены зависимости с.к.о. по скорости, а на рис. 10 – по курсу ВС.

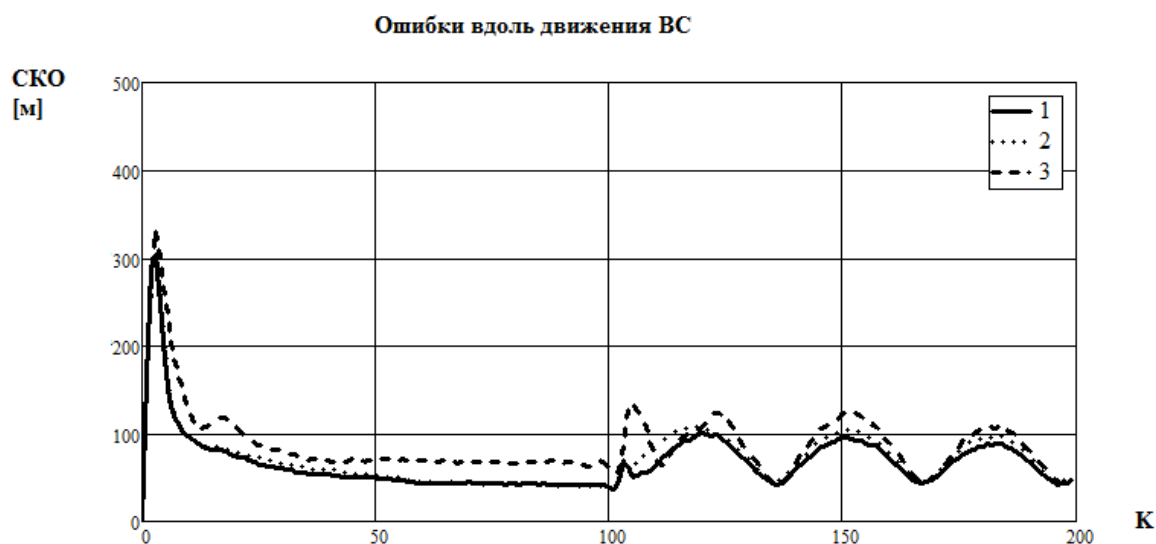
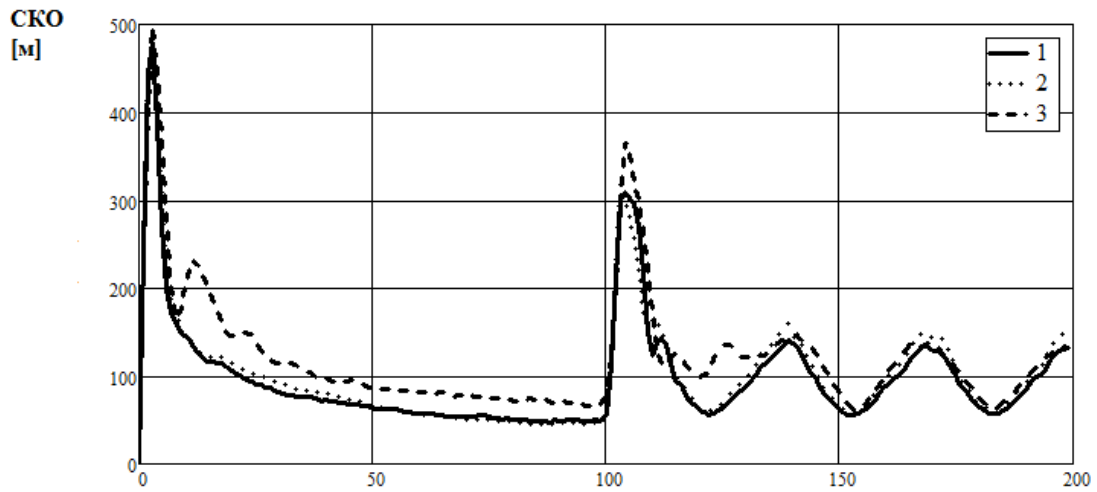


Рис. 7

График зависимости с.к.о. по координате вдоль движения ВС от времени

Ошибки поперек движения ВС

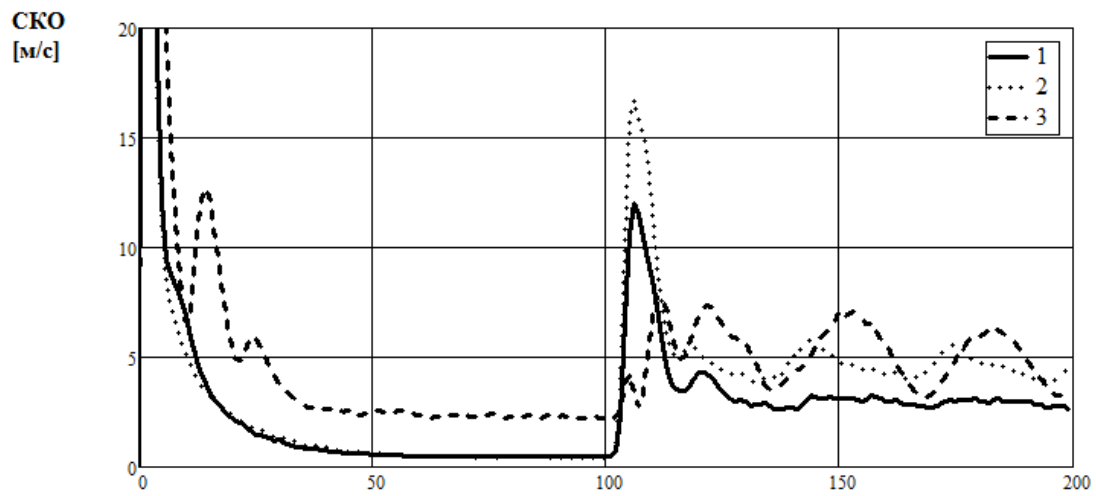


К

Рис. 8

График зависимости с.к.о. поперек движения ВС от времени

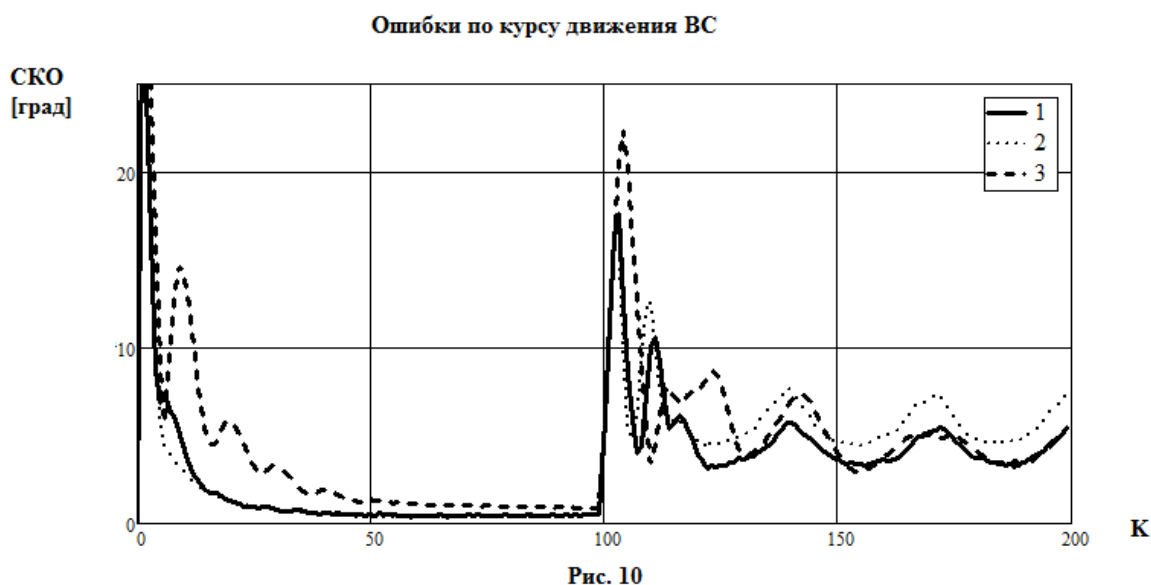
Ошибки по скорости движения ВС



К

Рис. 9

График зависимости с.к.о. по скорости движения ВС от времени



**График зависимости с.к.о. по курсу движения ВС от времени**

Алгоритмы 1 и 2 показали близкие характеристики. Но при этом алгоритм 1 менее трудоемкий с точки зрения вычислительных затрат. Упрощенный алгоритм 3 немного проигрывает 1-му и 2-му, но требует существенно меньше вычислений.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Проведено исследование путей построения трехмодельных алгоритмов траекторной обработки радиолокационной информации для сопровождения ВС гражданской авиации. Рассмотрены варианты построения алгоритмов с включением в расширенный вектор состояния скорости поворота и продольного ускорения ВС, и формированием их оценок в отдельных фильтрах. На основе общего подхода к построению многомодельных алгоритмов траекторной обработки радиолокационной информации, основанного на аппроксимации плотности распределения вероятностей

вектора состояния нормальным законом распределения, представлен подход к построению упрощенных многомодельных алгоритмов. Он основан на аппроксимации корреляционной матрицы вектора состояния фиксированной матрицей, задаваемой как параметр. Представлены результаты сравнительного моделирования рассматриваемых алгоритмов.

### **Библиографический список**

1. Eurocontrol Standard Document for Radar Surveillance in En-Route Airspace and Major Terminal Areas. SUR.ET1.ST01.1000-STD-01-01, Edition 1.0, March 1997.
2. Yaakov Bar-Shalom, X.-Rong Li, Thiagalingam Kirubarajan. Estimation with Applications To Tracking and Navigation. John Wiley&Sons, Inc., New York, 2001.
3. Бакулев П.А., Сычев М.И., Нгуен Чонг Лыу. Многомодельный алгоритм сопровождения траектории маневрирующей цели по данным обзорной РЛС // Радиотехника. 2004. №1. С.26-32.
4. Сычев М.И., Фесенко С.В. Исследование многомодельных алгоритмов сопровождения воздушных судов по информации от радиолокационных средств наблюдения // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2016. №2. С.10-18.
5. Сычев М.И., Фесенко С.В. Оценивание координат и параметров движения воздушных судов по информации от радиолокационных средств

наблюдения // Труды МАИ, 2015, №83:

<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=62280>