

УДК 539.3

Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории

Фирсанов В.В. *, Во А.Х.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

** e-mail: k906@mai.ru*

*** e-mail: anhhieu1512@gmail.com*

Аннотация

Рассматривается вариант уточненной теории расчета напряжённо-деформированного состояния продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной осесимметричной нагрузки. Перемещения оболочки аппроксимируются полиномами более высокой степени по отношению к классической теории типа Кирхгофа-Лява, Тимошенко-Рейсснера. Приводятся основные уравнения и краевые условия, полученные с помощью принципа минимума полной энергии деформации. Решение краевой задачи проводится операционным методом на основании преобразовании Лапласа. Исследовано влияние нагрузки, толщины оболочки и размера зоны локального нагружения на напряженное состояние оболочки.

Ключевые слова: подкрепленная оболочка, уточненная теория, напряженное состояние «погранслоя», локальная нагрузка, принцип Лагранжа, преобразование Лапласа, поперечные нормальные напряжения.

Введение

Цилиндрические конструкции находят широкое применение в ракетостроении, самолетостроении, судостроении и строительстве. Для минимизации веса при достаточной жесткости и устойчивости часто применяются тонкостенные конструкции типа пластинок и оболочек, подкрепленные ребрами жесткости. В настоящее время инженерные расчеты ребристых оболочек базируются на результатах классической теории типа Кирхгофа — Лява [1, 2], Тимошенко – Рейсснера [3 – 5]. Принятые в этой теории гипотезы не позволяют учитывать поперечные деформации оболочки, что приводит к погрешностям при определении напряженно-деформированного состояния (НДС). В последнее время все чаще применяются конструкции из композитных материалов, особенно в виде тонкостенных оболочек [6]. Разработка новых методов расчета таких конструкций [7 – 9] показала неправомерность, в том или иной степени, использования классической теории пластинок и оболочек типа Кирхгофа-Лява и Тимошенко-Рейсснера. Это заставляет разрабатывать всё более совершенные методы расчёта НДС с учётом зон его искажения, в том числе вблизи соединений и стыков элементов конструкций, а также локального нагружения.

Одно из направлений уточнения теории пластинок и оболочек основано на применении метода прямого асимптотического интегрирования уравнений трехмерной теории упругости [10]. Решение сформулированной задачи находится вариационным методом Власова-Канторовича [11 – 13].

Следует отметить также работы [14, 15], в которых рассматриваются методы уточненного расчета изотропной пластины и полосы из композиционного материала.

Другой подход к уточнению теории пластинок и оболочек, называемый «энергетически согласованным» [16], основан на разложении искомых перемещений в полиномиальные ряды по нормальной координате и формировке условий согласованности перемещений, которые связывают между собой количество слагаемых в этих рядах по тангенциальным и поперечному направлениям. На основании этого подхода в работах [17 – 19] представлена уточненная теория гладких оболочек произвольной геометрии, согласно которой поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, имеют тот же порядок с максимальными значениями основного изгибного напряжения. В данной работе в рамках указанного подхода рассматривается влияние локального нагружения на НДС цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами.

Уравнения равновесия и граничные условия

Рассматривается замкнутая ребристая оболочка, состоящая из обшивки и жестко соединенных с ней продольных ребер, которые укреплены на внешней поверхности обшивки (рис. 1).

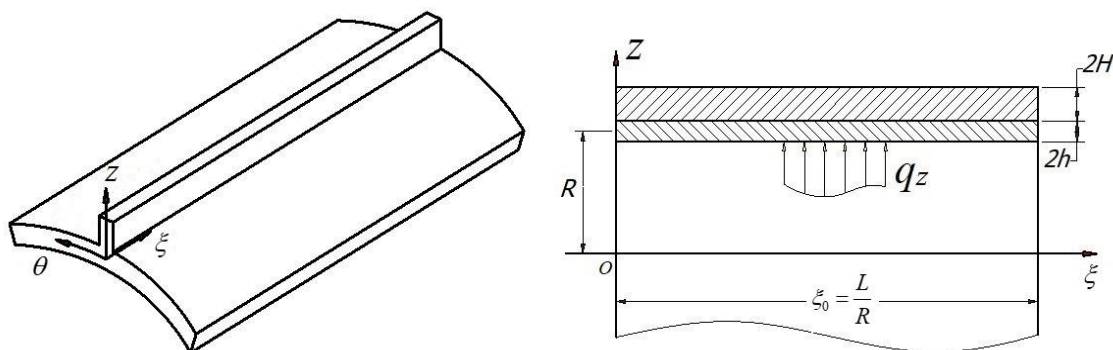


Рис.1. Оболочка, усиленная продольными ребрами

Полагаем, что оболочка находится под действием радиальной осесимметричной локальной нагрузки, распределенной на внутренней поверхности оболочки по закону

$$q_z = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_1; \\ q(\xi) & \text{при } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2; \\ 0 & \text{при } \xi_2 \leq \xi < \xi_0 = L/R, \end{cases} \quad (1)$$

где L, R - длина и радиус обшивки соответственно.

Перемещения рассматриваемой оболочки, соответствующие [15, 16], представляются в виде

$$\begin{aligned}
u(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{k=0}^K u_k(\alpha_1) \frac{\alpha_3^k}{k!}, \\
w(\alpha_1, \alpha_2) &= \sum_{k=0}^{K-1} w_k(\alpha_1) \frac{\alpha_3^k}{k!},
\end{aligned} \tag{2}$$

где α_1, α_2 – координаты срединной поверхности, α_3 – нормальная координата. Далее в разложении (2) ограничиваемся случаем $K=2$ для обшивки и $K=1$ для ребер, что соответствует повышению на один порядок полиномов, аппроксимирующих искомые перемещения по нормальной координате, в сравнении с классической теорией.

В качестве исходной принята система дифференциальных уравнений в перемещениях, полученная в [20], т.е.

$$\begin{aligned}
&K_{u_0}^{12} \frac{d^2}{d\xi^2} u_0 + K_{u_1}^{12} \frac{d^2}{d\xi^2} u_1 + K_{u_2}^{12} \frac{d^2}{d\xi^2} u_2 + K_{u_1^p}^{12} \frac{d^2}{d\xi^2} u_1^p + K_{w_0}^{11} \frac{d}{d\xi} w_0 + K_{w_1}^{11} \frac{d}{d\xi} w_1 = 0; \\
&K_{u_0}^{22} \frac{d^2}{d\xi^2} u_0 + K_{u_1}^{20} \cdot u_1 + K_{u_1}^{22} \frac{d^2}{d\xi^2} u_1 + K_{u_2}^{20} \cdot u_2 + K_{u_2}^{22} \frac{d^2}{d\xi^2} u_2 + K_{u_1^p}^{22} \frac{d^2}{d\xi^2} u_1^p + \\
&\quad + K_{w_0}^{21} \frac{d}{d\xi} w_0 + K_{w_1}^{21} \frac{d}{d\xi} w_1 = 0; \\
&K_{u_0}^{32} \frac{d^2}{d\xi^2} u_0 + K_{u_1}^{30} \cdot u_1 + K_{u_1}^{32} \frac{d^2}{d\xi^2} u_1 + K_{u_2}^{30} \cdot u_2 + K_{u_2}^{32} \frac{d^2}{d\xi^2} u_2 + K_{u_1^p}^{32} \frac{d^2}{d\xi^2} u_1^p + \\
&\quad + K_{w_0}^{31} \frac{d}{d\xi} w_0 + K_{w_1}^{31} \frac{d}{d\xi} w_1 = 0;
\end{aligned} \tag{3}$$

$$K_{u_0}^{42} \frac{d^2}{d\xi^2} u_0 + K_{u_1}^{42} \frac{d^2}{d\xi^2} u_1 + K_{u_2}^{42} \frac{d^2}{d\xi^2} u_2 + K_{u_1^p}^{40} \cdot u_1^p + K_{u_1^p}^{42} \frac{d^2}{d\xi^2} u_1^p + K_{w_0}^{41} \frac{d}{d\xi} w_0 +$$

$$+ K_{w_1}^{41} \frac{d}{d\xi} w_1 = 0;$$

$$K_{u_0}^{51} \frac{d}{d\xi} u_0 + K_{u_1}^{51} \frac{d}{d\xi} u_1 + K_{u_2}^{51} \frac{d}{d\xi} u_2 + K_{u_1^p}^{51} \frac{d}{d\xi} u_1^p + K_{w_0}^{50} \cdot w_0 + K_{w_0}^{52} \frac{d^2}{d\xi^2} w_0 +$$

$$+ K_{w_1}^{50} \cdot w_1 + K_{w_1}^{52} \frac{d^2}{d\xi^2} w_1 + K_{q_z}^5 \cdot q_z = 0;$$

$$K_{u_0}^{61} \frac{d}{d\xi} u_0 + K_{u_1}^{61} \frac{d}{d\xi} u_1 + K_{u_2}^{61} \frac{d}{d\xi} u_2 + K_{u_1^p}^{61} \frac{d}{d\xi} u_1^p + K_{w_0}^{60} \cdot w_0 + K_{w_0}^{62} \frac{d^2}{d\xi^2} w_0 +$$

$$+ K_{w_1}^{60} \cdot w_1 + K_{w_1}^{62} \frac{d^2}{d\xi^2} w_1 + K_{q_z}^6 \cdot q_z = 0.$$

Здесь коэффициенты уравнений определяются следующими выражениями:

$$K_{u_0}^{12} = \frac{2(1-\mu)(Hbkr + \pi h)}{\pi h}, K_{u_1}^{12} = \frac{2r(1-\mu)(3Hbk + \pi h^2)}{3\pi},$$

$$K_{u_2}^{12} = \frac{h(1-\mu)(3Hbkr + \pi h)}{3\pi}, K_{u_1^p}^{12} = \frac{2H^2bkr(\mu-1)}{\pi h}, K_{w_0}^{11} = 2\mu,$$

$$K_{w_1}^{11} = \frac{2\mu}{r}, K_{u_0}^{22} = \frac{2(1-\mu)(3Hbk + \pi h^2)}{3\pi h^2}, K_{u_1}^{22} = \frac{2(1-\mu)(3Hbkr + \pi h)}{3\pi h},$$

$$K_{u_2}^{22} = \frac{(1-\mu)(5Hbk + \pi h^2)}{5\pi}, K_{u_1^p}^{22} = \frac{2H^2bk(1-\mu)}{\pi h^2}, K_{w_0}^{21} = \frac{2h^4\mu r^4 + 10\mu - 5}{5r^2h^2},$$

$$K_{w_1}^{21} = \frac{6h^2\mu r^2 - 30\mu + 5}{15r}, K_{u_1}^{20} = \frac{2\mu - 1}{h^2 r^3}, K_{u_2}^{20} = \frac{2\mu - 1}{3r^2}, K_{u_1^p}^{32} = \frac{H^2bkr(1-\mu)}{\pi h},$$

$$K_{u_2}^{32} = \frac{h(1-\mu)(5Hbkr + \pi h)}{10\pi}, K_{u_1}^{32} = \frac{r(1-\mu)(5Hbk + \pi h^2)}{5\pi},$$

$$K_{u_0}^{32} = \frac{(1-\mu)(3Hbkr + \pi h)}{3\pi h}, K_{w_0}^{31} = \mu - \frac{1}{3}, K_{w_1}^{31} = \frac{3\mu-1}{3r}, K_{u_1}^{30} = \frac{2\mu-1}{3r},$$

$$K_{u_2}^{30} = \frac{2\mu-1}{3r^2}, K_{u_2}^{42} = Hh^2 r(1-\mu), K_{u_1^p}^{42} = \frac{8rH^2(1-\mu)}{3}, K_{u_1}^{42} = 2Hhr(1-\mu),$$

$$K_{u_0}^{42} = 2Hr(1-\mu), K_{w_0}^{41} = 2\mu-1, K_{w_1}^{41} = (2\mu-1)h, K_{u_1^p}^{40} = \frac{2\mu-1}{r},$$

$$K_{u_2}^{51} = \frac{h^2(3\mu-1)}{3}, K_{u_1}^{51} = \frac{2\mu-1}{r}, K_{u_0}^{51} = 2\mu, K_{u_1^p}^{51} = \frac{Hbk(2\mu-1)}{\pi h},$$

$$K_{w_1}^{52} = \frac{(2\mu-1)(3Hbk + \pi h^2)r}{3\pi}, K_{w_0}^{52} = \frac{(2\mu-1)(Hbkr + \pi h)}{\pi h},$$

$$K_{w_0}^{50} = \frac{2(r^2h^2 + 3)(1-\mu)}{3}, K_{w_1}^{50} = \frac{2(r^2h^2\mu - r^2h^2 + 3\mu)}{3r},$$

$$K_{q_z}^5 = \frac{(2\mu-1)(1+\mu)(hr-1)}{Er^2h}, K_{u_2}^{61} = \frac{h^2(3\mu-1)}{3}, K_{u_1}^{61} = \frac{rh^2(6\mu-1)}{3},$$

$$K_{u_0}^{61} = 2\mu, K_{u_1^p}^{61} = \frac{Hbkr(2\mu-1)}{\pi}, K_{w_1}^{62} = \frac{(2\mu-1)(3Hbkr + \pi h)hr}{3\pi},$$

$$K_{w_0}^{62} = \frac{(2\mu-1)(3Hbk + \pi h^2)r^2}{3\pi}, K_{w_0}^{60} = \frac{2}{3}r^2h^2\mu - \frac{2}{3}r^2h^2 + 2\mu,$$

$$K_{w_1}^{60} = \frac{2(r^2h^2 + 3)(1-\mu)}{3r}, K_{q_z}^6 = \frac{(2\mu-1)(1+\mu)(hr-1)}{Er},$$

где h – полутолщина оболочки, $r = 1/R$, H – полувысота ребер, b – полутолщина ребер, k – число ребер, μ – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

В соответствии с [20] краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0^\Gamma \vee 6r(1-\mu)(Hbkr + \pi h) \frac{du_0}{d\xi} + 2hr^2(1-\mu)(3Hbk + \pi h^2) \frac{du_1}{d\xi} + \\
&+ h^2r(1-\mu)(3Hbkr + \pi h) \frac{du_2}{d\xi} + 6H^2bkr^2(1-\mu) \frac{du_1^p}{d\xi} + 6\pi h\mu r w_0 + 6\pi h\mu w_1 = 0, \\
u_1 &= u_1^\Gamma \vee 10r(1-\mu)(3Hbk + \pi h^2) \frac{du_0}{d\xi} + 10h(1-\mu)(3Hbkr + \pi h) \frac{du_1}{d\xi} + \\
&+ 3h^2r(1-\mu)(5Hbk + \pi h^2) \frac{du_2}{d\xi} + 30H^2bkr(1-\mu) \frac{du_1^p}{d\xi} + 6\pi h^4\mu r^3 w_0 + \\
&+ 2\pi h^2\mu(10 - 3h^2r^2) w_1 = 0, \\
u_2 &= u_2^\Gamma \vee 10r(1-\mu)(3Hbkr + \pi h) \frac{du_0}{d\xi} + 6hr^2(1-\mu)(5Hbk + \pi h^2) \frac{du_1}{d\xi} + \\
&+ 3h^2r(1-\mu)(5Hbkr + \pi h) \frac{du_2}{d\xi} + 30H^2bkr^2(1-\mu) \frac{du_1^p}{d\xi} + \\
&+ 10\pi h\mu r w_0 + 10\pi h\mu w_1 = 0, \\
u_1^p &= u_1^{p\Gamma} \vee 3h^2 \frac{du_2}{d\xi} + 8H \frac{du_1^p}{d\xi} + 6h \frac{du_1}{d\xi} + 6 \frac{du_0}{d\xi} = 0, \\
w_0 &= w_0^\Gamma \vee 3\pi h u_1 + \pi h^3 r u_2 + 3Hbk r u_1^p + 3r(Hbkr + \pi h) \frac{dw_0}{d\xi} + \\
&+ r^2 h(3Hbk + \pi h^2) \frac{dw_1}{d\xi} = 0, \\
w_1 &= w_1^\Gamma \vee 3\pi h u_1 + \pi h^3 r u_2 + 3Hbk r u_1^p + 3r(3Hbkr + 3\pi h) \frac{dw_0}{d\xi} + \\
&+ 3r^2 h(3Hbk + \pi h^2) \frac{dw_1}{d\xi} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Решение задачи

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4) применяется операционный метод. С помощью преобразования Лапласа система (4) приводится к алгебраическим уравнениям вида

$$\begin{aligned}
& K_{u_0}^{12} p^2 U_0 + K_{u_1}^{12} p^2 U_1 + K_{u_2}^{12} p^2 U_2 + K_{u_1^p}^{12} p^2 U_1^p + K_{w_0}^{11} p W_0 + K_{w_1}^{11} p W_1 \\
& = K_{u_0}^{12} (p C_{100} + C_{101}) + K_{u_1}^{12} (p C_{110} + C_{111}) + K_{u_2}^{12} (p C_{120} + C_{121}) + \\
& \quad + K_{u_1^p}^{12} (p C_{210} + C_{211}) + K_{w_0}^{11} C_{300} + K_{w_1}^{11} C_{310}, \\
& K_{u_0}^{22} p^2 U_0 + K_{u_1}^{20} U_1 + K_{u_1}^{22} p^2 U_1 + K_{u_2}^{20} U_2 + K_{u_2}^{22} p^2 U_2 + K_{u_1^p}^{22} p^2 U_1^p + \\
& + K_{w_0}^{21} p W_0 + K_{w_1}^{21} p W_1 = K_{u_0}^{22} (p C_{100} + C_{101}) + K_{u_1}^{22} (p C_{110} + C_{111}) + \\
& \quad + K_{u_2}^{20} (p C_{120} + C_{121}) + K_{u_1^p}^{22} (p C_{210} + C_{211}) + K_{w_0}^{21} C_{300} + K_{w_1}^{21} C_{310}, \\
& K_{u_0}^{32} p^2 U_0 + K_{u_1}^{30} U_1 + K_{u_1}^{32} p^2 U_1 + K_{u_2}^{30} U_2 + K_{u_2}^{32} p^2 U_2 + K_{u_1^p}^{32} p^2 U_1^p + \\
& + K_{w_0}^{31} p W_0 + K_{w_1}^{31} p W_1 = K_{u_0}^{32} (p C_{100} + C_{101}) + K_{u_1}^{32} (p C_{110} + C_{111}) + \\
& \quad + K_{u_2}^{32} (p C_{120} + C_{121}) + K_{u_1^p}^{32} (p C_{210} + C_{211}) + K_{w_0}^{31} C_{300} + K_{w_1}^{31} C_{310}, \\
& K_{u_0}^{42} p^2 U_0 + K_{u_1}^{42} p^2 U_1 + K_{u_2}^{42} p^2 U_2 + K_{u_1^p}^{40} U_1^p + K_{u_1^p}^{42} p^2 U_1^p + K_{w_0}^{41} p W_0 + \\
& \quad + K_{w_1}^{41} p W_1 = K_{u_0}^{42} (p C_{100} + C_{101}) + K_{u_1}^{42} (p C_{110} + C_{111}) + \\
& \quad + K_{u_2}^{42} (p C_{120} + C_{121}) + K_{u_1^p}^{42} (p C_{210} + C_{211}) + K_{w_0}^{41} C_{300} + K_{w_1}^{41} C_{310}, \\
& K_{u_0}^{51} p U_0 + K_{u_1}^{51} p U_1 + K_{u_2}^{51} p U_2 + K_{u_1^p}^{51} p U_1^p + K_{w_0}^{50} W_0 + K_{w_0}^{52} p^2 W_0 + \\
& + K_{w_1}^{50} W_1 + K_{w_1}^{52} p^2 W_1 = K_{u_0}^{51} C_{100} + K_{u_1}^{51} C_{110} + K_{u_2}^{51} C_{120} + K_{u_1^p}^{51} C_{210} + \\
& \quad + K_{w_0}^{52} (p C_{300} + C_{301}) + K_{w_1}^{52} (p C_{310} + C_{311}) - K_{q_z}^5 Q_z,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
& K_{u_0}^{61} p U_0 + K_{u_1}^{61} p U_1 + K_{u_2}^{61} p U_2 + K_{u_1^p}^{61} p U_1^p + K_{w_0}^{60} W_0 + K_{w_0}^{62} p^2 W_0 + \\
& + K_{w_1}^{60} W_1 + K_{w_1}^{62} p^2 W_1 = K_{u_0}^{61} C_{100} + K_{u_1}^{61} C_{110} + K_{u_2}^{61} C_{120} + K_{u_1^p}^{61} C_{210} + \\
& + K_{w_0}^{62} (p C_{300} + C_{301}) + K_{w_1}^{62} (p C_{310} + C_{311}) - K_{q_z}^6 Q_z,
\end{aligned}$$

где $U_0, U_1, U_2, W_0, W_1, U_1^p, Q_z$ – изображения $u_0, u_1, u_2, w_0, w_1, u_1^p, q_z$ соответственно.

Произвольные постоянные C_{ijk} определяются формулами

$$\begin{aligned}
C_{1i0} &= u_i(0), C_{1i1} = \frac{d}{d\xi} u_i(0), i = 0, 1, 2, C_{210} = u_1^p(0), \\
C_{211} &= \frac{d}{d\xi} u_1^p(0), C_{3j0} = w_j(0), C_{3j1} = \frac{d}{d\xi} w_j(0), j = 0, 1.
\end{aligned} \tag{6}$$

На основании соотношений (4) и (6) сформулируем следующие граничные условия при $\xi = 0$:

- для жестко защемленного края

$$C_{1i0} = 0; C_{210} = 0; C_{3j0} = 0; i = 0, 1, 2; j = 0, 1;$$

- для шарнирно опертого края

$$C_{1i0} = 0; C_{210} = 0; C_{3j0} = 0; i = 0, 1, 2; j = 0, 1;$$

- для свободного края

$$\begin{aligned}
C_{101} &= -\mu \left\{ \left[3Hbkr^2 (3h^4 r^4 - 3h^3 r^3 + 25hr - 35) + 8\pi hr (3h^2 r^2 - 5) \right] C_{300} + \right. \\
& + \left. \left[3Hbkr (-3h^4 r^4 + 3h^3 r^3 + 10h^2 r^2 + 15hr - 35) + 8\pi h (3h^2 r^2 - 5) \right] C_{310} \right\} / \\
& \left\{ 2r(1 - \mu) \left[3Hbkr (h^2 r^2 + 10hkr - 9) + 4\pi h (3h^2 r^2 - 5) \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{111} &= \mu \left\{ \left[3Hbkr(6h^3r^3 - 5hr - 5) + 4\pi h^2r(3h^2r^2 - 5) \right] C_{300} - \right. \\
&\quad \left. - \left[3Hbk(6h^3r^3 - 15hr + 5) + 4\pi h^2(3h^2r^2 - 5) \right] C_{310} \right\} / \\
&\quad \left\{ h(1 - \mu) \left[3Hbk(h^2r^3 + 10hr^2 - 15r) + 4\pi h(3h^2r^2 - 5) \right] \right\}; \\
C_{121} &= \mu \left\{ \left[3Hbkr(3h^4r^4 - 15h^3r^3 + 35hr - 25) - 8\pi h^3r^2(3h^2r^2 - 5) \right] C_{300} - \right. \\
&\quad \left. - \left[3Hbk(3h^4r^4 - 15h^3r^3 - 10h^2r^2 + 15hr + 25) - 8\pi h^3r(3h^2r^2 - 5) \right] C_{310} \right\} / \\
&\quad \left\{ h^2(1 - \mu) \left[3Hbkr(h^2r^2 + 10hr - 15) + 4\pi h(3h^2r^2 - 5) \right] \right\}; \\
C_{211} &= 3\pi\mu h(3h^2r^2 - 5) \left[(h^2r^3 - hr^2 + r)C_{300} - (h^2r^2 - hr - 1)C_{310} \right] / \\
&\quad \left\{ Hr(1 - \mu) \left[3Hbkr(h^2r^2 + 10hr - 15) + 4\pi h(3h^2r^2 - 5) \right] \right\}; \\
C_{301} &= - \left\{ \left[3Hbkr(hr - 3) + \pi h(h^2r^2 - 3) \right] C_{110} - 3Hbhkr(hr - 1)C_{120} + \right. \\
&\quad \left. + 3Hbkr(hr - 1)C_{210} \right\} / \left\{ r \left[6Hbkr(hr - 2) + \pi h(h^2r^2 - 3) \right] \right\}; \\
C_{311} &= \left\{ 3Hbkr(hr - 3)C_{110} - \left[3Hbhkr(hr - 1) + \pi h^2(h^2r^2 - 3) \right] C_{120} - \right. \\
&\quad \left. - 3Hbkr(hr - 3)C_{210} \right\} / \left\{ rh \left[6Hbkr(hr - 2) + \pi h(h^2r^2 - 3) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Отметим, что с помощью преобразования Лапласа граничные условия на краю $\xi = 0$ выполняются автоматически, следовательно, вдвое сокращается число произвольных постоянных при решении задачи.

Переходя от полученных изображений к оригиналам, находим выражения перемещений, которые содержат остальные произвольные постоянные, соответствующие граничным условиям при $\xi = \xi_0$.

Остальные компоненты НДС оболочки определяются геометрическими и физическими уравнениями трехмерной теории упругости.

Пример расчета

В качестве примера расчета рассматривается замкнутая ребристая цилиндрическая оболочка, жестко защемленная на двух краях, со следующими параметрами: радиус обшивки $R = 0,5 \text{ м}$; длина оболочки $L = 10R = 5 \text{ м}$; относительная толщина обшивки $h/R = 0,01$; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; число ребер $k = 20$.

Рассматриваются следующие виды нагрузок:

- Локальная нагрузка, равномернораспределенная на части внутренней поверхности оболочки по закону

$$q_z = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_1; \\ Q_0 & \text{при } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2; \\ 0 & \text{при } \xi_2 \leq \xi < \xi_0 = L/R, \end{cases} \quad (7)$$

- Локальная нагрузка, распределенная на части внутренней поверхности оболочки по линейному закону

$$q_z = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_1; \\ Q_0 \xi & \text{при } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2; \\ 0 & \text{при } \xi_2 \leq \xi < \xi_0 = L/R, \end{cases} \quad (8)$$

где $\xi_1 = \frac{\xi_0}{2} - \frac{\tau}{2}$, $\xi_2 = \frac{\xi_0}{2} + \frac{\tau}{2}$, τ – безразмерная ширина зоны нагружения.

На рис. 2 показаны результаты расчета при значении $\tau = 4$ для нагрузок (7) (рис. 2а) и (8) (рис. 2б).

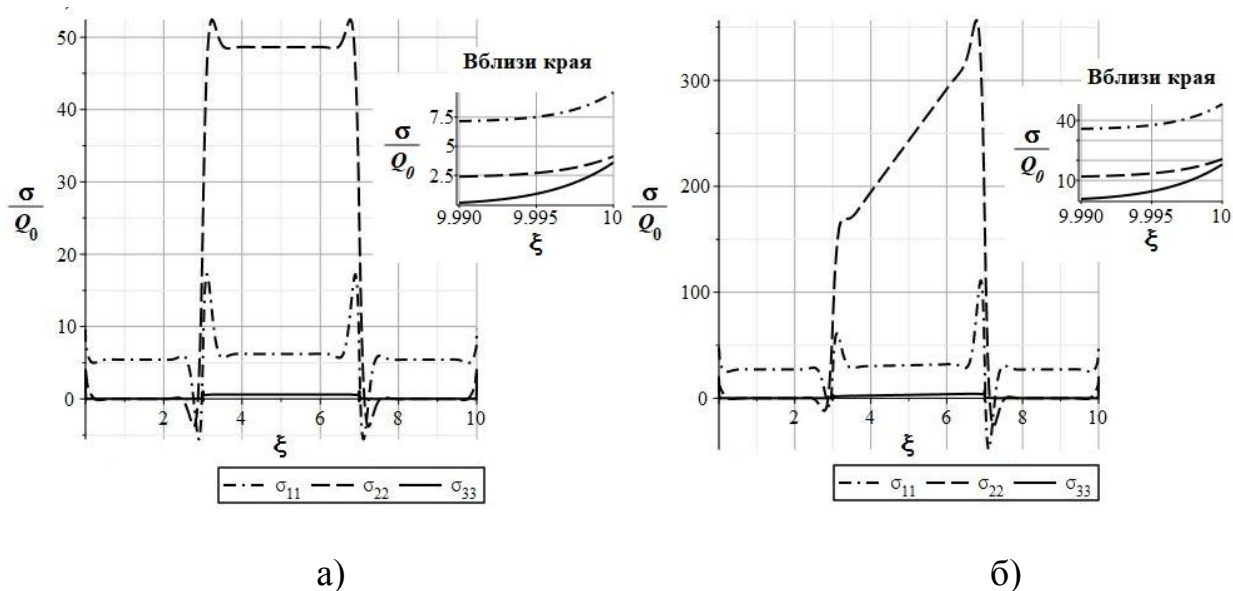


Рис. 2. Графики нормальных напряжений по длине оболочки

Графики изменения этих же напряжений по толщине на краю оболочки при действии равномерно распределенной нагрузки представлены на рис. 3.

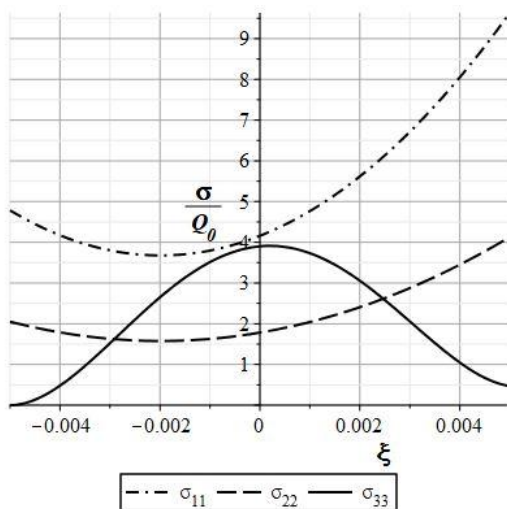


Рис. 3. Графики нормальных напряжений на краю $\xi = 0$

Из рис. 3 следует, что поперечные напряжения «пограничного слоя» составляют около 40% от максимальных изгибных напряжений.

Далее рассматривается влияние толщины на НДС оболочки. Предполагается, что оболочка находится под действием нагрузки (8) при $\tau = 5$. На рис. 4 представлены результаты для двух вариантов относительной толщины $h/R = 0,005$ (рис. 4а) и $h/R = 0,02$ (рис. 4б).

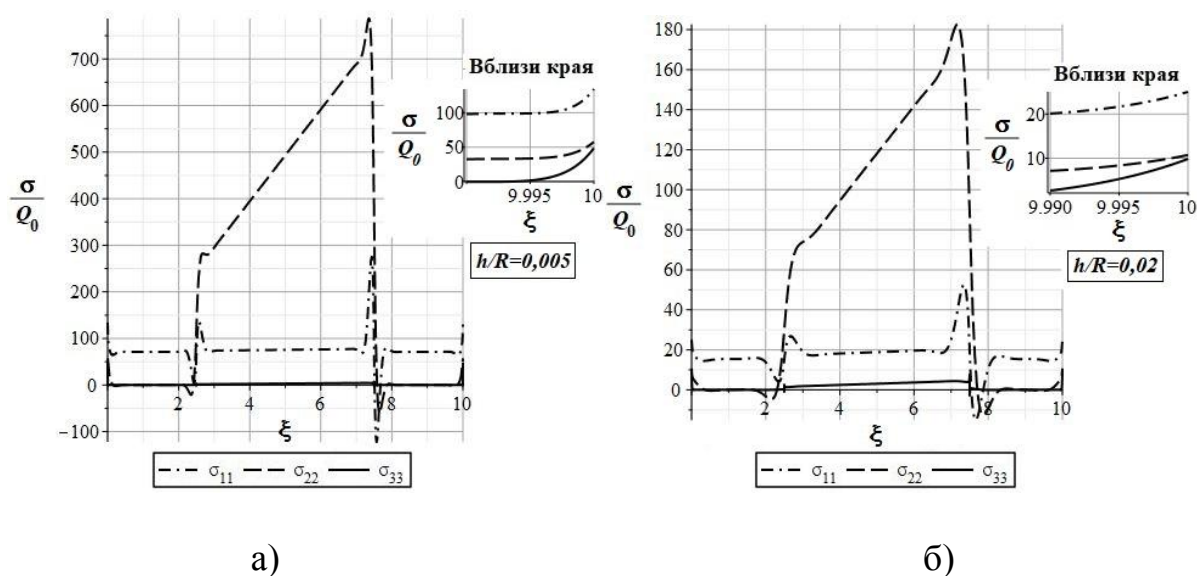
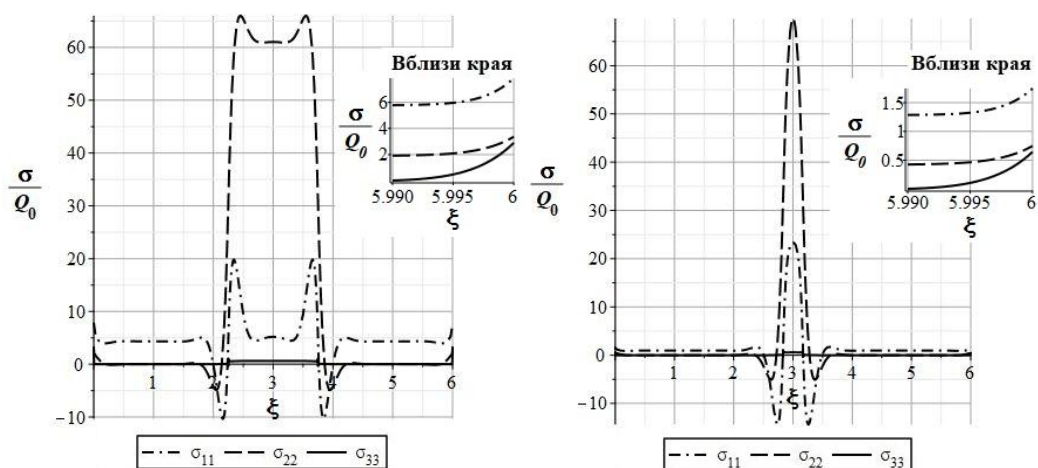


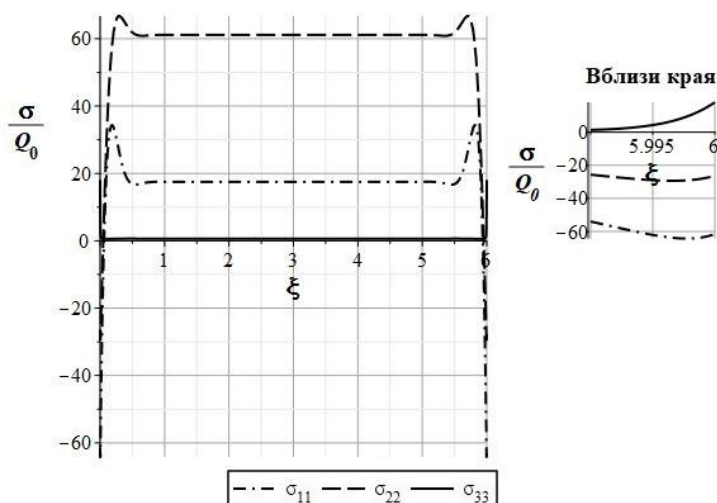
Рис. 4. Графики нормальных напряжений при различных толщинах

Влияние размера полосы нагрузки на НДС оболочки, находящейся под действием нагрузки (7), при значении $\tau = 3/2$ (рис. 5а) и $\tau = 1/3$ (рис. 5б) показано на рис. 5. Результаты расчета приводятся для оболочки, имеющей относительную толщину $h/R = 0,008$ и длину оболочки $L = 6R = 3$ м. На рис. 5в для сравнения представлены эти же графики для случая нагружения по всей поверхности оболочки.



а)

б)



в)

Рис. 5. Графики нормальных напряжений при различных размерах полосы нагружения

Из рис. 5 следует, что при увеличении ширины полосы нагружения поперечные нормальные напряжения «погранслоя» возрастают.

Выводы

Установлено, что при расчете ребристой оболочки по уточненной теории имеют место быстро затухающие дополнительные краевые напряженные состояния

типа «погранслоя» вне зависимости от видов нагрузки, размера полосы нагружения, толщины оболочки. Вблизи зон искажения напряженного состояния поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, получаются одного порядка (до 40%) с максимальными значениями основного изгибного напряжения. Увеличение размера полосы нагружения существенно влияет на НДС оболочки в зоне «погранслоя», где поперечные нормальные напряжения возрастают в несколько раз.

Библиографический список

1. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Методы расчета оболочек. Теория ребристых оболочек. - Киев: Наукова Думка, 1980. Т. 2. - 368 с.
2. Иванов В.Н., Кушнарченко И.В. Учёт подкреплений при расчёте оболочек вариационно-разностным методом // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 2. С. 57 - 62.
3. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкреплённых оболочек вращения. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкреплённых оболочек вращения. – М.: Физматлит, 2011. Ч. 1. – 276 с.
4. Карпов В.В., Семенов А.А. Математическая модель деформирования подкреплённых ортотропных оболочек вращения // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 100 - 106.

5. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях // Инженерно-строительный журнал. 2009. № 6 (8). С. 16 - 24.
6. Пикуль В.В. К расчету устойчивости анизотропной цилиндрической оболочки прочного корпуса подводного аппарата // Вестник Дальневосточного государственного технического университета. 2009. № 2 (2). С. 98 - 105.
7. Пикуль В.В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития // Механика твердого тела. 2000. № 2. С. 153 - 168.
8. Фирсанов В.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2002. Т. 8. № 1. С. 28 - 64.
9. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis, CRCPress, 2004, 831 p.
10. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1976. - 512 с.
11. Фирсанов В.В. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластинок на основе неклассической теории // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 35 - 43. (Study of Stress-Deformed State of Rectangular plates Based on Nonclassical Theory // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2016, vol. 45, no. 6, pp. 515 - 522).
12. Фирсанов В.В. Математическая модель напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластинок переменной толщины с учетом «пограничного

слоя» // Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 12. № 1. С. 3 - 18.

13. Фирсанов В.В. Напряженное состояние «пограничный слой» - краевое кручение цилиндрической оболочки // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 6. С. 144 – 153.

14. Зверьяев Е.М. Выделение уравнений типа Тимошенко из пространственных уравнений теории упругости для пластины на основе принципа сжатых отображений // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53459>

15. Зверьяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=55762>

16. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Механика твердого тела. 1990. № 6. С. 139 - 146.

17. Фирсанов В.В., Доан Ч.Н. Энергетически согласованная теория цилиндрических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 6. С. 49 - 54. (Firsanov V.V., Ch. N. Doan. Energy-consistent theory of cylindrical shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2011, vol. 40, no. 6, pp. 543 - 548).

18. Фирсанов В.В. Локальное напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки на основе трехмерных уравнений теории упругости //

Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 2. С. 10 - 19.

19. Фирсанов В.В., Чан Н.Д. Исследование статики и свободных колебаний цилиндрических оболочек на основе неклассической теории // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20. № 1. С. 104 - 123. (Firsanov V.V., Doan T.N. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal, 2015, vol. 6, Issue 2, pp. 135 - 166).

20. Фирсанов В.В., Хиеу В.А., Доан Ч.Н. Напряженно-деформированное состояние продольно подкрепленных цилиндрических оболочек на основе неклассической теории // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 12 (2). С. 42 - 52.