

Разработка и верификация численно-аналитического метода расчёта отклика пластин на широкополосное акустическое воздействие

Денисов С.Л.^{1*}, Медведский А.Л.^{2**}

¹*Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е.*

ул. Жуковского, 1, Жуковский, Московская обл., 140180, Россия

²*Национальный исследовательский центр «Институт имени Н.Е. Жуковского,*

ул. Жуковского, 1, Жуковский, Московская обл., 140180, Россия

**e-mail: stl.denisov@gmail.com*

***e-mail: mdv66@mail.ru*

Аннотация

В работе предложен гибридный численно-аналитический метод расчёта отклика и долговечности авиационных конструкций типа изотропных металлических пластин, подвергающихся широкополосному акустическому воздействию при различных видах пространственного распределения акустического поля по поверхности пластины. Рассматриваются следующие модели пространственного распределения акустического поля: полностью коррелированное поле, поле с конечными масштабами корреляции, дельта-коррелированное поле и диффузное поле. Проводится сравнение среднеквадратичных напряжений и долговечности, вычисленных с помощью гибридного метода, с точным решением, полученным для свободно-опёртой по периметру пластины. Сравнение результатов вычислений демонстрируют высокую степень согласования расчётов, однако проявляют существенную зависимость от пространственной структуры акустического поля, формы частотного акустического спектра и числа учитываемых форм колебаний.

Ключевые слова: пространственная корреляционная функция, взаимная корреляционная функция, изотропные пластины, акустическая прочность, акустическая долговечность.

Введение

Ужесточение норм ИКАО по шуму на местности приводит к тому, что всё большее внимание начинают привлекать самолёты интегральной компоновки, в которых реализован эффект экранирования шума двигателей планером самолёта [1,2]. Одной из наиболее перспективных компоновок с точки зрения экранирования шума является аэродинамическая компоновка типа летающее крыло, в которой двигатели расположены над фюзеляжем. Однако необходимо обратить внимание на то, что при расположении двигателей над фюзеляжем существенно увеличивается площадь планера, подвергающаяся акустическим нагрузкам. В свою очередь, эти нагрузки могут привести к появлению усталостных повреждений в конструкции обшивки планера самолёта. Таким образом, несмотря на достигнутые в последнее время успехи по снижению шума двигателей, вопрос акустической долговечности авиационных конструкций (пластин и панелей обшивки) снова становится актуальным.

Общая теория расчёта долговечности пластин, подверженных внешнему широкополосному воздействию, была разработана в классических работах Майлса, Пауэлла и Кларксона [3-5]. Однако поскольку подход, рассмотренный в работе [4], основанный на гармоническом анализе, требовал значительных расчётных ресурсов, а также знания собственных функций краевой задачи, что возможно только для

простейших систем, то на тот момент времени он не получил широкого распространения. Более того, в работе [5] было показано, что при некоторых упрощающих предположениях, результаты расчётов из [4] сводятся к результатам, полученным в [3]. Расчёты, выполненные на основе методов, разработанных в [3,5], показали удовлетворительное согласование с экспериментом, хотя в отдельных случаях потребовали введения эмпирических коэффициентов. Используемые ныне методики оценки долговечности элементов конструкции планера самолёта базируются именно на этих работах [6-8].

Несколько отличный подход к расчёту отклика пластин на внешнее акустическое воздействие был предложен в [9]. Расчёты, выполненные по данной методике, показали результаты, близкие с расчётами, выполненными ранее, однако для повышения точности также пришлось вводить корректировочные коэффициенты. Здесь необходимо сделать важное замечание, что при расчёте отклика элементов конструкции планера на внешнее широкополосное акустическое воздействие пространственная структура поля не учитывалась – поле предполагалось постоянным по всей поверхности исследуемой конструкции [3, 5], или же имело специальный модельный характер [9]. Справедливость подобных допущений вызывает серьёзные сомнения, поскольку пространственная структура поля явным образом входит в общее выражение для расчёта отклика конструкции, полученное в [4].

Влияние пространственной структуры акустического поля на отклик конструкции впервые было рассмотрено в [10], где изучалась модель дельта-

коррелированного акустического поля. В работе [11] рассматривалось влияние поля пульсаций пограничного слоя, диффузного акустического поля и поля плоских волн. Влияние поля пульсаций пограничного слоя также рассматривалось в [12], где было показано, что долговечность пластин существенно зависит от параметров пограничного слоя и скорости набегающего потока.

Итак, на сегодняшний день имеется несколько различных методик по расчёту отклика авиационных конструкций типа пластин и оболочек на широкополосное акустическое воздействие, однако внешнее поле в этих методиках предполагается либо полностью коррелированным по поверхности, либо имеет специальный модельный вид. Таким образом, влияние вида функции взаимной спектральной плотности внешнего акустического поля на отклик пластины вызывает непосредственный интерес, т. к. при проведении испытаний в реверберационных камерах, акустических камерах бегущей волны и натурных испытаниях пространственное распределение поля по поверхности пластины, несмотря на схожесть акустических спектров, имеет существенно различную пространственную структуру.

Целью данной работы является расчёт отклика и долговечности изотропной металлической пластины при акустических нагрузках с широким частотным спектром и различных видах функции взаимной спектральной плотности для шарнирно закреплённой по периметру пластины. При расчёте отклика рассматриваются следующие модели акустических полей: полностью коррелированное по поверхности пластины поле, дельта-коррелированное поле,

поле с конечными масштабами корреляции и диффузное поле. Получающиеся в результате расчёта отклика среднеквадратичные напряжения, основываясь на теории максимальных напряжений, с применением четырёх различных методик используются для проведения сравнительного расчёта долговечности пластины.

В данной работе предложен гибридный численно-аналитический метод для расчёта отклика пластин при широкополосном акустическом нагружении. Для подтверждения точности расчёта, выполненного с помощью гибридного метода, проводится сравнение полученных результатов с точным аналитическим решением.

Основные соотношения для расчёта отклика пластины

Подробно теория расчёта отклика пластины на внешнее широкополосное акустическое воздействие описана в [4, 13-18]. Здесь мы приведём только основные расчётные соотношения, которые использовались в данной работе.

Выражение для спектральной плотности напряжений (X - компонента) имеет вид:

$$S_{\sigma}^x(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \frac{36D^2}{h^4} \sum_{m,n} \frac{J^2(\omega, m, n)}{H_m(\omega) \cdot H_n^*(\omega)} \cdot \left[\frac{\partial^2 \varphi_m(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi_m(x, y)}{\partial y^2} \right] \cdot \left[\frac{\partial^2 \varphi_n(x', y')}{\partial x'^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi_n(x', y')}{\partial y'^2} \right], \quad (1)$$

где $H_m(\omega) = -\omega^2 + \Omega_m^2 + 2i\beta_m\omega$ частотная передаточная функция исследуемой пластины, Ω_m - m - я собственная частота колебаний пластины, h - толщина пластины, β - постоянная затухания, D - цилиндрическая жёсткость пластины, $\varphi_n(x, y)$ - функция, описывающая форму собственных колебаний пластины, а $J^2(\omega, m, n)$ - акцептанс, величина, которая характеризует взаимодействие внешнего акустического поля с собственными колебаниями пластины [4].

Выражение для акцептанса имеет вид:

$$J^2(\omega, m, n) = \frac{1}{\|\varphi\|^2 \cdot (\rho h)^2} \int_s \int_s G(\omega, x, y, x', y') \varphi_m(x, y) \varphi_n(x', y') dx dy dx' dy', \quad (2)$$

где $\|\varphi\|$ - норма собственных функций, а $G(\omega, x, y, x', y')$ - взаимная спектральная плотность для акустического давления на поверхности пластины. Однако на практике функцию взаимной спектральной плотности часто можно представить в виде произведения частотной спектральной плотности внешнего акустического поля $S_q(\omega)$ на её пространственную часть $G(\omega, x, y, x', y') = S_q(\omega) \cdot G(x, y, x', y')$,

Тогда, выполнив интегрирования по частоте приходим к следующему выражению для X – компоненты среднеквадратичных напряжений:

$$\langle \sigma_x^2(\vec{r}, \vec{r}') \rangle = \frac{36D^2}{h^4} \sum_{m,n} l_\sigma^x[\varphi_m(x, y)] \cdot l_\sigma^x[\varphi_n(x', y')] \cdot J^2(m, n) \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_q(\omega)}{H_m(\omega) \cdot H_n^*(\omega)} d\omega, \quad (3)$$

где $l_\sigma^x[\varphi_m(x, y)] = \left[\frac{\partial^2 \varphi_m(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi_m(x, y)}{\partial y^2} \right]$ и $l_\sigma^y[\varphi_m(x, y)] = \left[\frac{\partial^2 \varphi_m(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi_m(x, y)}{\partial x^2} \right]$ – линейные дифференциальные операторы, а для расчёта акцептанса $J^2(m, n)$ используется выражение:

$$J^2(m, n) = \frac{1}{\|\varphi\|^2 \cdot (\rho h)^2} \int_s \int_s G(x, y, x', y') \varphi_m(x, y) \varphi_n(x', y') dx dy dx' dy'. \quad (4)$$

Именно выражения (1) – (4) использовались в дальнейшем при проведении обсуждаемых ниже вычислений.

Рассматриваемые модели акустических полей

Как было сказано во введении, в данной работе рассматривается несколько различных вариантов функций взаимной спектральной плотности $G(x, y, \xi, \zeta)$ для акустических полей различной природы. Аналитические выражения для этих функций имеют следующий вид:

А. Поле, полностью коррелированное по поверхности пластины: $G(x, y, \xi, \zeta) = 1$.

Б. Поле с конечными масштабами корреляции: $G(x, y, \xi, \zeta) = \exp(-\alpha|x-\xi|) \cdot \exp(-\beta|y-\zeta|)$, где α и β - постоянные величины, обратные масштабам корреляции в отдельно взятом направлении.

В. Дельта-коррелированное поле: $G(x, y, \xi, \zeta) = A \cdot \delta(x-\xi) \cdot \delta(y-\zeta)$, где A - постоянная, имеющая размерность площади и характеризующая энергию поля.

Г. Диффузное поле: $G(x, y, \xi, \zeta) = \frac{\sin(k(x-\xi))}{k(x-\xi)} \cdot \frac{\sin(k(y-\zeta))}{k(y-\zeta)}$, где k - волновое число.

Выражения (А) – (В) подробно обсуждались в [14,15], так что здесь мы сделаем несколько замечаний относительно выражения (Г). Изучение диффузного поля представляет интерес постольку, поскольку при проведении акустических испытаний в реверберационных камерах пространственное распределение поля в рабочей зоне камеры носит именно диффузный характер. В связи с этим, представляется интересным сравнение расчётов напряжений, выполненных для часто рассматриваемого случая полностью коррелированного и диффузного полей.

Расчёт акцептанса при различных видах функции взаимной спектральной плотности для шарнирно-закреплённой по периметру пластины

В качестве расчётной модели рассматривается шарнирно-закреплённая по периметру изотропная пластина. Хорошо известно, что данная задача имеет точное решение и собственные функции имеют вид: $\varphi_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)$. Анализ вышеописанных выражений для функций взаимной спектральной плотности показывает, что они имеют мультипликативную форму $G(x, y, \xi, \zeta) = G(x, \xi) \cdot G(y, \zeta)$, что, с учётом мультипликативной структуры выражения для собственных функций, позволяет существенно упростить вычисления для акцептанса (4). Действительно, после простых преобразований получаем следующее выражение для акцептанса:

$$J^2(m, n) = \frac{1}{\|\varphi\|^2 \cdot (\rho h)^2} \left[\int_s G(x, x') \varphi_m(x) \varphi_n(x') dx dx' \right] \cdot \left[\int_s G(y, y') \varphi_m(y) \varphi_n(y') dy dy' \right] = \frac{1}{\|\varphi\| \cdot \rho h} J(m, n) \cdot \frac{1}{\|\varphi\| \cdot \rho h} J(m, n). \quad (5)$$

Здесь необходимо учесть тот факт, что акцептанс при $m = n$ существенно больше, чем при $m \neq n$ [9], так что в данной работе будет рассмотрен только этот случай.

Используя выражения для собственных функций, для случая полностью коррелированного поля по поверхности пластины (**А**), поля с конечными масштабами корреляции (**Б**), дельта-коррелированного поля (**В**) и диффузного полей (**Г**) были получены следующие расчётные соотношения:

$$\text{А.} \quad J(m, m) = \frac{4 \cdot [1 - (-1)^m]^2}{\pi^2 (\rho h) m^2}, \quad \text{при } m = r.$$

$$\text{Б.} \quad J(m, m) = \frac{4}{\pi^2 m^2 (\rho h)} \left[\frac{\alpha \cdot a}{1 + \left(\frac{\alpha \cdot a}{\pi \cdot m}\right)^2} + \frac{2[1 - (-1)^m e^{-\alpha a}]}{\left(1 + \left(\frac{\alpha \cdot a}{\pi \cdot m}\right)^2\right)^2} \right], \quad \text{при } m = r.$$

В. $J^2(m, n, r, s) = \frac{4A \cdot \delta_{mr} \cdot \delta_{ns}}{a \cdot b \cdot (\rho h)^2}$, где δ_{mr} и δ_{ns} - дельта-символы Кронекера.

Г. $J(m, m) = \frac{4}{\rho h} \left[\frac{[Cin(ka + \pi m) - Cin(ka - \pi m)]}{2m\pi ka} + \frac{[Si(ka + \pi m) + Si(ka - \pi m)]}{2ka} + \frac{1 - (-1)^m \cos(ka)}{\pi^2 m^2 - k^2 a^2} \right]$,

где $Cin(z)$ и $Si(z)$ – интегральный косинус и синус соответственно.

Подробное обсуждение и анализ выражений (**А-В**) проведен в [15], а для диффузного поля (**Г**) – в [11].

Описание гибридного численно-аналитического метода расчёта

В данной работе предлагается гибридный численно-аналитический метод расчёта отклика пластин на широкополосное акустическое воздействие. Суть метода заключается в том, что собственные функции задачи вычисляются численно с помощью МКЭ, а затем, с помощью численного интегрирования выражения (5), вычисляется акцептанс на отдельно взятой частоте в данной точке пластины. Изменяя число членов ряда в выражении (1), можно проводить расчёты как в одночастотном, так и в многочастотном приближении. Выполнив численное интегрирование выражения (3), можно получить среднеквадратичные напряжения, и спектральные моменты, необходимые для расчёта долговечности пластины.

Верификация гибридного численно-аналитического метода выполнялась двояким способом: сначала проводилось вычисление спектральной плотности напряжений с помощью точных аналитических выражений, затем также проводился расчёт спектральной плотности напряжений, но посредством численного вычисления интеграла (5) для акцептанса (собственные функции по-прежнему

имели вид произведения синусоид и задавались аналитически). На завершающем этапе проводился расчёт спектральной плотности напряжений с помощью вышеописанного гибридного численно-аналитического метода.

Разработанный гибридный численно-аналитический метод допускает обобщения на случай вычисления отклика пластины при иных типах закрепления (например, защемлённая по периметру пластина).

Сравнительный расчёт среднеквадратичных напряжений и долговечности

При проведении расчётов посредством вышеописанных методов для внешнего широкополосного акустического нагружения использовалась следующая функция частотной спектральной плотности:

$$S_q(\omega) = \Phi_0 \left(\frac{\omega}{\omega^*} \right)^2 \exp \left[- \left(\frac{\omega}{\omega^*} \right)^2 \right], \quad (6)$$

где ω^* - некоторая характеристическая частота, на которой достигается максимум, Φ_0 - нормировочная постоянная. Данная модель для функции частотной спектральной плотности использовалась в [13] и применяется при расчётах для аппроксимации спектров, имеющих ярко выраженный широкий максимум. Расчёты проводились для характеристической частоты, равной $\omega^* = \omega_{11}/10$ и $\omega^* = \omega_{11}$, где ω_{11} - первая собственная частота колебаний пластины, а общий уровень звукового давления предполагался равным 140 дБ.

Исследуемая пластина выполнена из алюминиевого сплава 1163РДТВ (механические и усталостные характеристики взяты из [19]) и имеет следующие геометрические размеры: длина $a = 500$ мм, ширина $b = 100$ мм, толщина $h = 1$ мм.

Необходимо отметить, что в [19] представлены усталостные характеристики, полученные для деформаций растяжения, в то время как в данной работе рассматриваются изгибные деформации. Разумеется, существует различие в долговечности для разных типов деформаций. Так как авторы не располагают усталостными характеристиками сплава 1163РДТВ для случая изгибных деформаций, то для проведения расчётов используются усталостные характеристики, полученные для случая деформации растяжения. Таким образом, данные, полученные в данной работе, носят качественный характер, который, тем не менее, позволяет выявить влияние пространственного распределения поля на долговечность пластины.

Расчет собственных частот и соответствующих форм колебаний пластины производился с использованием пре-постпроцессора FEMAP v10.2.0 64-bit в программном комплексе NX NASTRAN. Пластина моделировалась четырехузловыми конечными элементами типа PLATE. Конечно-элементная модель пластины содержала 40 000 элементов; для расчета собственных частот использовался метод Ланцоша.

Ниже будут рассмотрены результаты расчёта для спектральной плотности напряжений, среднеквадратичных напряжений и долговечности для вышеописанных моделей полей при различном числе учитываемых форм колебаний пластины и отношении частот. При расчёте гибридным методом число вычисленных форм колебаний пластины равнялось 20, а при расчёте аналитическим методом – до 200 форм колебаний пластины. Диапазон частот изменялся от 10 Гц до 6 кГц для

соотношения частот 1:10, и от 10 Гц до 2 кГц для соотношения частот 1:1, шаг по частоте составлял 10 Гц. Расчёт среднеквадратичных напряжений проводился только в центре пластины.

Сравнительный расчёт долговечности проводился с помощью четырёх различных методов [20, 21]: метода пересечений, узкополосного метода амплитуд, широкополосного метода амплитуд и основанного на гипотезе спектрального суммирования метода Райхера. Поскольку при расчёте долговечности использовалась теория максимальных напряжений, то в результатах приводятся значения только для максимальной компоненты напряжений, которой, в силу геометрии пластины, являлась Y-компонента. Среднеквадратичные напряжения, вычисленные для X-компоненты, в среднем были ниже на 50% и не вносили значимый вклад в расчёт долговечности.

Отношение частот 1:10.

Число учитываемых форм колебаний – 8 для всех методов расчёта

Полностью коррелированное поле

Сначала рассмотрим случай численного расчёта отклика пластины при восьми учитываемых формах колебаний. На рис. 1 представлена спектральная плотность напряжений для полностью коррелированного поля, вычисленная при помощи гибридного численно-аналитического метода, на всех ниже приведенных графиках красная кривая соответствует – X компоненте напряжений, а синяя – Y компоненте напряжений. Хорошо видно, что максимальные напряжения, как и ожидается,

имеют место для Y-компоненты напряжений, а максимальная амплитуда отклика достигается на первой частоте колебаний пластины. Также необходимо принять во внимание, что в центре пластины, несмотря на учёт восьми форм колебаний, эффективно возбуждаются только четыре. Этот факт связан с особенностями возбуждения симметричных и несимметричных форм колебаний свободно опёртой по периметру пластины.

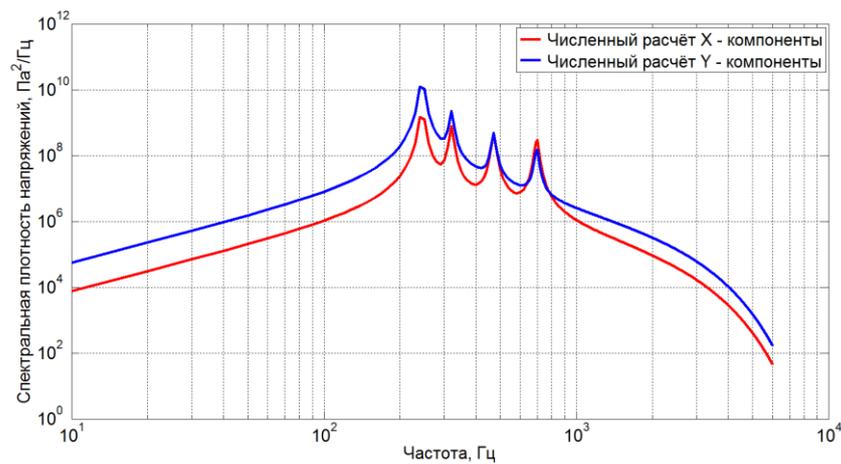


Рис. 1. Спектральная плотность напряжений для полностью коррелированного поля, вычисленная с помощью гибридного метода.

Зависимости для спектральной плотности напряжений, вычисленные посредством точного аналитического решения, идентичны зависимостям, представленным на рис. 1 и поэтому не приводятся. В дальнейшем, если зависимости для спектральной плотности совпадают, то на графиках будет приводиться спектральная плотность напряжений, полученная только с помощью гибридного метода.

Проведём анализ среднеквадратичных напряжений и долговечности. Сравнение расчётов показывает, что аналитический расчёт (1.518635 МПа) и расчёт,

выполненный при помощи численного вычисления интегралов (1.518634 МПа), почти полностью совпадают (разница менее 0,001%). Сравнение вычисленных напряжений, выполненных гибридным методом (1.530934 МПа), приводит к завышению действующих напряжений на 1.3%. При расчёте долговечности этот факт приводит к небольшому снижению долговечности в среднем на 3%. Тем не менее, согласие с точным расчётом остаётся на хорошем уровне. Для X-компоненты напряжений точность расчёта среднеквадратичных напряжений и долговечности носит такой же характер.

При сравнительном расчёте долговечности с помощью четырёх методик отчётливо видно, что расчёт с помощью метода пересечений ($1.130174 \cdot 10^{11}$ сек) и метода Райхера ($1.254392 \cdot 10^{11}$ сек) дают близкие значения, а расчёт с помощью узкополосного ($4.394654 \cdot 10^{10}$ сек) и широкополосного методов амплитуд ($3.653897 \cdot 10^{12}$ сек) дают для долговечности оценку снизу и сверху соответственно.

Поле с конечными масштабами корреляции

Теперь рассмотрим случай поля с конечными масштабами корреляции. Поскольку расчёт проводился для значений управляющих параметров $\alpha = 0.1$ и $\beta = 0.7$, то при таком выборе параметров характеристики поля с конечными масштабами корреляции близки к полю, полностью коррелированному по поверхности пластины [15]. Зависимость для спектральной плотности напряжений в этом случае качественно не отличается от зависимости, представленной на рис.1

Сравнение среднеквадратичных напряжений, вычисленных различными методами, как и в случае полностью коррелированного поля, демонстрирует хорошее согласие для случаев аналитического (1.457598 МПа) и численного расчётов (1.457605 МПа). Расчёт гибридным методом (1.469359 МПа) приводит к небольшому (менее 1 %) завышению напряжений.

Как и ранее, при расчёте долговечности методом Райхера и методом пересечений получаются близкие значения ($1.366879 \cdot 10^{11}$ сек и $1.517795 \cdot 10^{11}$ сек), а узкополосный и широкополосный методы амплитуд дают для долговечности оценку снизу и сверху соответственно ($5.128145 \cdot 10^{10}$ сек и $4.268993 \cdot 10^{12}$ сек). Разница между значениями, вычисленными с помощью точного метода и гибридного метода, в среднем составляет 3%. Как и ранее, расчёт на основе гибридного метода приводит к сниженным значениям долговечности.

Дельта-коррелированное поле

Рассмотрим случай дельта-коррелированного поля. Расчёты проводились при значении параметра $A = 1$. На рис. 2 представлены зависимости для спектральной плотности напряжений при воздействии дельта-коррелированного поля. Отчётливо видно, что в отличие от случая полностью коррелированного поля (см. рис. 1), для X-компоненты напряжений отклик пластины на первой и второй частотах сравним, а для Y-компоненты напряжений максимальная амплитуда отклика наблюдается на третьей частоте колебаний. Такое поведение связано с особенностями выражения для акцептанса дельта-коррелированного поля (акцептанс зависит только от

толщины пластины, её плотности и нормы собственных функций) и формы спектра акустического воздействия. Необходимо также отметить, что, начиная с частоты 1.5 кГц, наблюдается сближение кривых для X и Y-компонент напряжений, которое отсутствует для случаев, рассмотренных выше (для точного аналитического решения наблюдается такое же поведение).

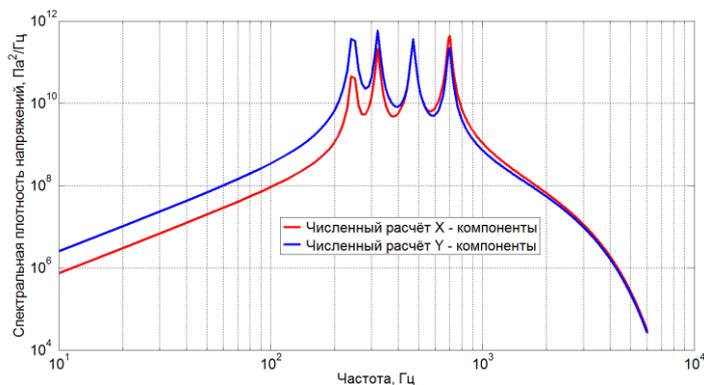


Рис. 2. Спектральная плотность напряжений для дельта-коррелированного поля, вычисленная с помощью гибридного метода.

Сравнение вычисленных среднеквадратичных напряжений, полученных разными методами расчёта, демонстрирует хорошее согласие - 15.53226 МПа для точного решения, и 15.54438 МПа для гибридного метода. Сравнение вычисленных напряжений с предыдущими случаями демонстрирует, что для дельта-коррелированного поля наблюдается существенное увеличение напряжений – в 10 раз. Такое поведение связано с выбором значениям параметра A : при его уменьшении величина среднеквадратичных напряжений снижается, а при увеличении возрастает [15]. Причём форма зависимости спектральной плотности напряжений от частоты, при уменьшении амплитуды максимумов, остаётся неизменной.

Общая точность вычислений для долговечности сохраняется на уровне 3%, однако увеличение напряжений приводит к существенному снижению долговечности: $1.341541 \cdot 10^6$ сек для метода пересечений, $1.550743 \cdot 10^6$ сек для метода Райхера, $8.056682 \cdot 10^5$ сек для узкополосного метода амплитуд и $8.760541 \cdot 10^6$ сек для широкополосного метода амплитуд.

Диффузное поле

Рассмотрим, наконец, отклик пластины при воздействии диффузного поля, спектральная плотность напряжений которого представлена на рис. 3. Как и в случае полностью коррелированного поля, максимальный отклик пластины наблюдается на первой частоте колебаний для X-компоненты напряжений. Однако при увеличении частоты свыше 2 кГц наблюдается сближение кривых для X и Y-компонент напряжений, которое, очевидно, отсутствует для случая полностью коррелированного поля (см. рис.1).

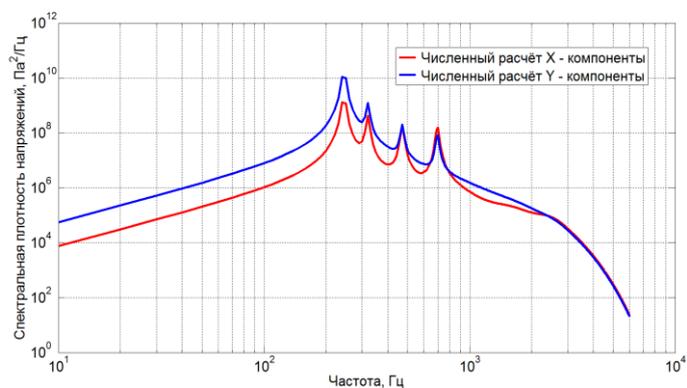


Рис. 3. Спектральная плотность напряжений для диффузного поля, вычисленная с помощью гибридного метода.

Анализ данных для среднеквадратичных напряжений демонстрирует поведение, соответствующее трём ранее рассмотренным случаям (1.401405 МПа – точное решение и 1.413786 МПа – гибридный метод). Однако если сравнивать среднеквадратичные напряжения для случая полностью коррелированного и диффузного полей, то видно, что при воздействии диффузного поля среднеквадратичные напряжения на 7% ниже, чем при воздействии полностью коррелированного поля.

Для диффузного поля точность вычислений для долговечности сохраняется на уровне 3-5%. Значения долговечности, полученные на основе точного решения, равны: $1.757518 \cdot 10^{11}$ сек для метода пересечений, $1.896935 \cdot 10^{11}$ сек для метода Райхера, $7.740737 \cdot 10^{10}$ сек для узкополосного метода амплитуд и $3.592624 \cdot 10^{12}$ сек для широкополосного метода амплитуд. Как и ранее, метод пересечений и метод Райхера демонстрируют близкие значения, а узкополосный и широкополосный метод амплитуд дают для долговечности оценки снизу и сверху соответственно.

Отношение частот 1:10. Число учитываемых форм колебаний: 20 форм колебаний для гибридного метода и 200 форм колебаний для точного решения.

Полностью коррелированное поле

Теперь рассмотрим случай численного и аналитического расчёта отклика пластины при учёте двадцати форм колебаний пластины для численно-аналитического метода и двухсот форм колебаний пластины для аналитического расчёта. На рис. 4(а) представлена спектральная плотность среднеквадратичных

напряжений для полностью коррелированного поля, вычисленная с помощью гибридного метода, а на рис. 4(б) – с помощью точного аналитического решения.

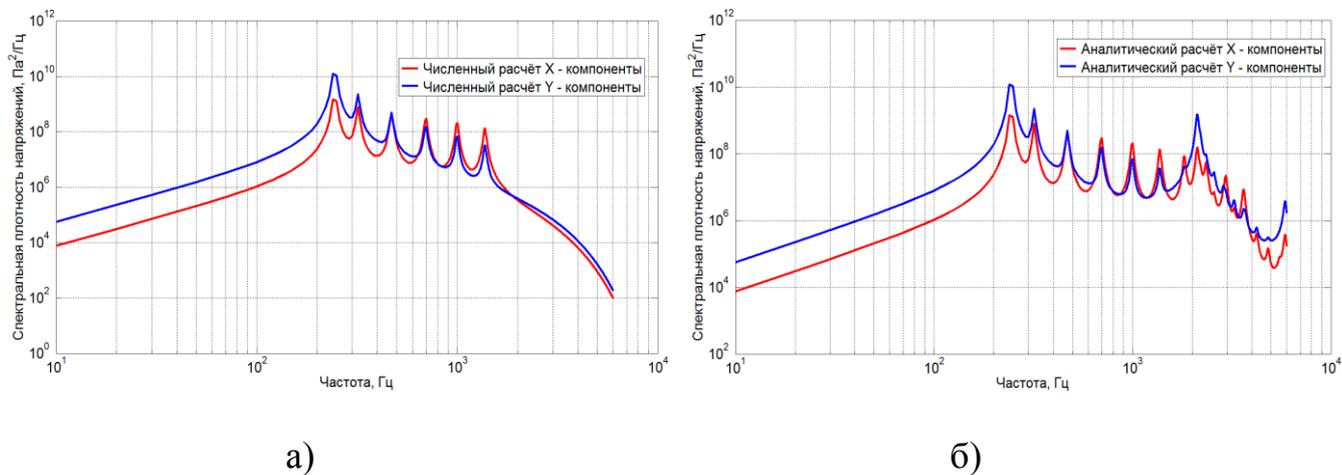


Рис. 4. Спектральная плотность напряжений для полностью коррелированного поля, вычисленная с помощью гибридного метода (а) и с помощью точного аналитического решения (б).

Сравнение представленных зависимостей демонстрирует значительное различие, с предшествующим случаем расчёта для полностью коррелированного поля (см. рис. 1). Во-первых, число форм колебаний, дающих вклад в отклик пластины при расчёте гибридным методом, составляет всего 6, тогда как в предыдущем случае их было 4. Это означает, что из двадцати вычисленных форм колебаний только шесть эффективно возбуждаются и вносят свой вклад в отклик. Однако аналитический расчёт показывает, что число возбуждаемых форм колебаний существенно больше. Более того, на частоте свыше 2 кГц наблюдается второй максимум в отклике пластины. Этот максимум связан с тем, что при отношении

частот 1:10 на этой частоте находится максимум частотной спектральной плотности, приводящий к увеличению отклика. Таким образом, можно ожидать существенного различия между точным аналитическим решением и гибридным методом расчёта при вычислении среднеквадратичных напряжений и долговечности.

Как и ранее, расчёты, выполненные с помощью точного аналитического решения и точного решения на основе численного вычисления интегралов (1.890615 МПа), находятся в хорошем согласии друг с другом (разница менее 0.001%). Однако расчёт напряжений, выполненный гибридным методом, приводит к занижению среднеквадратичных напряжений на 18% (1.542714 МПа). При расчёте долговечности разница в вычисленных значениях составляет свыше 90%. Например, для метода пересечений долговечность, вычисленная с помощью точного решения, составляет величину $9.190822 \cdot 10^9$ сек, а для гибридного метода $9.521300 \cdot 10^{10}$ сек. Отчётливо видно, что не учёт высших форм колебаний приводит к завышению долговечности на порядок. Необходимо отметить, что зависимость долговечности от методики расчёта остаётся прежней: расчёт с помощью узкополосного и широкополосного методов амплитуд дают, соответственно, оценку снизу и сверху, в то время как расчёт методом пересечений и методом Райхера находятся между ними, хотя теперь они начинают различаться несколько больше, чем было ранее ($9.190822 \cdot 10^9$ сек и $1.734853 \cdot 10^{10}$ сек для точного расчёта).

Поле с конечными масштабами корреляции

Как и ранее, при значении параметров $\alpha = 0.1$ и $\beta = 0.7$ зависимость спектральной плотности напряжений для поля с конечными масштабами близка к полностью коррелированному полю и мало отличается от зависимостей, представленных на рис.4 и рис.5 и здесь не приводится.

Сравнение среднеквадратичных напряжений показывает, что в случае поля с конечными масштабами корреляции не учёт высших форм колебаний приводит к занижению величины среднеквадратичных напряжений на 18% (1.814752 МПа для точного решения и 1.480895 МПа для гибридного метода). Как и в случае полностью коррелированного поля, уменьшение среднеквадратичных напряжений приводит к завышению расчётной долговечности примерно в 10 раз для всех методик расчёта. Например, долговечность, вычисленная на основе точного решения по методу Райхера равна $2.099817 \cdot 10^{10}$ сек, а вычисленная с помощью гибридного метода – $1.368576 \cdot 10^{11}$ сек.

Дельта-коррелированное поле

Зависимости для спектральной плотности напряжений в случае дельта-коррелированного поля представлены на рис. 5. Как и ранее, при расчёте гибридным методом учитывается только 6 форм колебаний пластины (рис. 5(а)), а при расчёте с помощью точного аналитического решения число форм колебаний существенно больше (рис. 5(б)). Однако в отличие от случаев полностью коррелированного поля и поля с конечными масштабами корреляции амплитуда высших форм колебаний для X-компоненты напряжений убывает значительно медленнее, и максимум на

частоте свыше 2 кГц сравним с максимум на первой частоте колебаний пластины. Для Y-компоненты напряжений наблюдается увеличение амплитуд вклада высших форм колебаний с увеличением частоты, однако максимум достигается на частоте ниже 1.8 кГц. Подобная зависимость для спектральной плотности напряжений свидетельствует о том, что отклик пластины является существенно многочастотным.

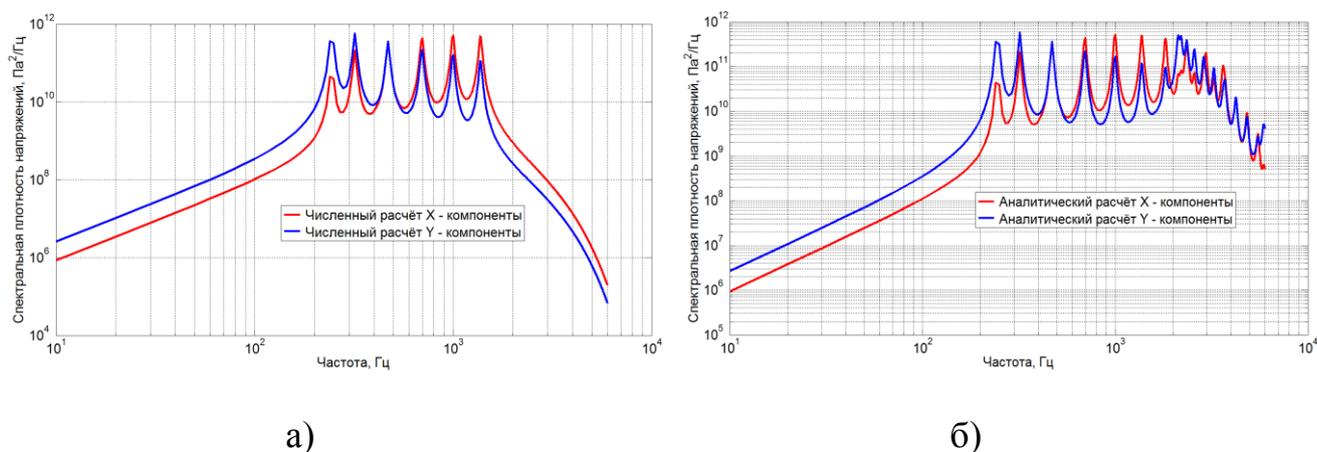


Рис. 5. Спектральная плотность напряжений для дельта-коррелированного поля, вычисленная с помощью гибридного метода (а) и с помощью точного аналитического решения (б).

Сравнение вычисленных значений для среднеквадратичных напряжений демонстрирует, что при расчёте отклика пластины в случае воздействия дельта-коррелированного поля не учёт высших гармоник приводит к ошибке при расчёте напряжений гибридным более чем на 50% (42.38433 МПа для точного решения и 18.66287 МПа для гибридного метода). В свою очередь, это приводит к ошибке при расчёте долговечности более чем в 100 раз в независимости от методики расчёта – $2.431507 \cdot 10^3$ сек (точное решение) и $3.457864 \cdot 10^5$ сек (гибридный метод) для

расчёта методом пересечений. Таким образом, прослеживается чёткая зависимость вычисленных значений среднеквадратичных напряжений и долговечности от пространственного распределения поля, числа учитываемых собственных форм колебаний пластины и распределения энергии по частотному спектру.

Диффузное поле

Рассмотрим, наконец, влияние числа учитываемых форм колебаний при воздействии диффузного поля. Зависимости для спектральной плотности напряжений при расчёте гибридным методом и с помощью точного аналитического решения представлены на рис. 6. Зависимость, представленная на рис. 6(а), по своему поведению близка к зависимости для полностью коррелированного поля (см. рис. 4(а)), но в высокочастотной части (свыше 1,5 кГц) наблюдается увеличение вклада Y -компоненты напряжений. При увеличении числа учитываемых мод на частоте максимума действующего поля (свыше 2 кГц) в функции спектральной плотности напряжений также наблюдается максимум отклика, однако амплитуда этого максимума ниже (почти на два порядка), чем для случая полностью коррелированного поля. Это является следствием того, что акцептанс для диффузного поля убывает с увеличением частоты [11], в то время как акцептанс для полностью коррелированного поля от частоты не зависит [5,15].

Расчёт среднеквадратичных напряжений показывает, что не учёт высших форм колебаний пластины в случае диффузного поля приводит к ошибке в 6% (1.510637 МПа для точного решения и 1.420393 МПа для гибридного метода), а

расчёт долговечности демонстрирует устойчивое увеличение в 2-4 раза, в зависимости от методики расчёта. Например, при расчёте методом Райхера долговечность составляет $8.560341 \cdot 10^{10}$ сек (точное решение) и $1.749115 \cdot 10^{11}$ сек (гибридный метод), а при использовании узкополосного метода амплитуд - $1.403285 \cdot 10^{10}$ сек (точное решение) и $5.763106 \cdot 10^{10}$ сек (гибридный метод).

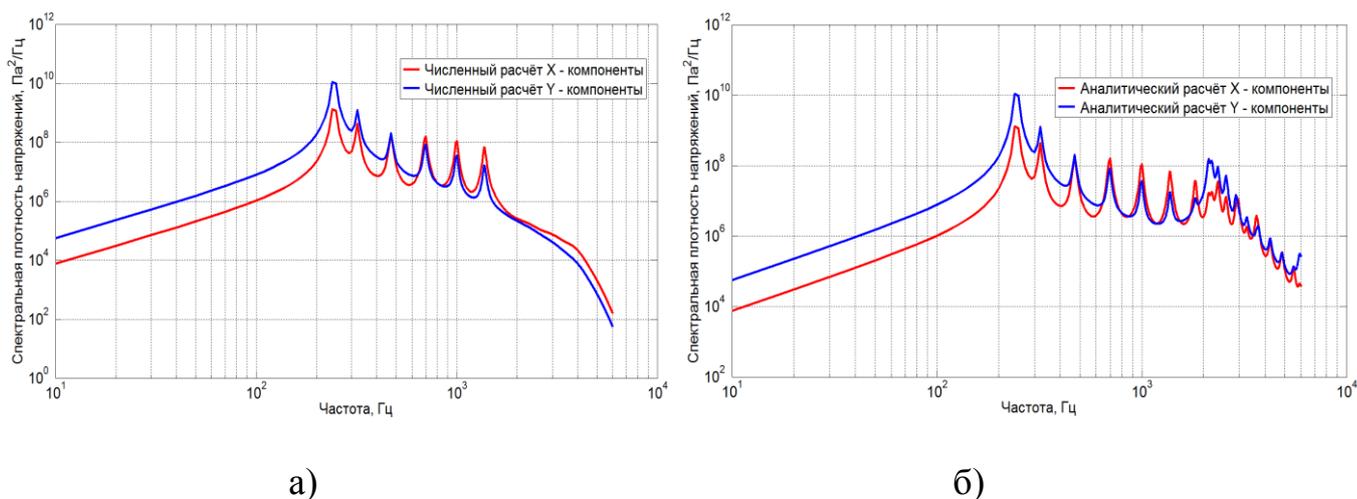


Рис. 6. Спектральная плотность напряжений для диффузного поля, вычисленная с помощью гибридного метода (а) и с помощью точного аналитического решения (б).

Сравнение расчётных среднеквадратичных напряжений с учётом высших форм (расчёт с помощью точного аналитического решения) колебаний для полностью коррелированного поля и диффузного поля показывает, что разница между полученными значениями составляет теперь 16%, в отличие от 7% при учёте восьми форм колебаний. Это приводит к снижению долговечности в среднем в 2-4 раза в зависимости от методики расчёта.

Отношение частот 1:1. Число учитываемых форм колебаний:
20 форм колебаний для гибридного метода и 200 форм колебаний для
аналитического расчёта

Предыдущий анализ показал, что наибольший интерес представляет случай, когда число учитываемых при расчёте собственных форм колебаний пластины для гибридного метода и точного аналитического решения различно. Анализ этого случая для отношения частот 1:1 (резонансный случай) показывает, что отклик пластины достигается, как и ранее, на первой частоте колебаний. Разница между среднеквадратичными напряжениями, вычисленными с помощью различных методов, составляет величину менее 0,01% и не зависит от пространственной структуры поля. Однако совпадение частот приводит к существенному увеличению амплитуды среднеквадратичных напряжений 27.52351 МПа для полностью коррелированного поля и 191.0364 МПа для дельта-коррелированного поля.

В свою очередь, разница при расчёте долговечности составляет величину менее 4%. Вычисления долговечности с помощью метода пересечений и метод Райхера снова приводят к близким значениям, а узкополосный метод амплитуд и широкополосный метод амплитуд дают нижнюю и верхнюю оценку для долговечности.

Выводы

Выполненные расчёты показывают, что среднеквадратичные напряжения и долговечность для шарнирно-закреплённой по периметру пластины существенно зависят от пространственного распределения акустического поля, действующего на

пластину, числа учитываемых при расчёте форм колебаний пластины и распределения энергии акустического поля по спектру. Сравнение расчёта среднеквадратичных напряжений и долговечности, выполненных с помощью предложенного в работе гибридного численно-аналитического метода, точного аналитического решения и решения, выполненного при помощи численного интегрирования выражения для акцептанса, показало хорошее согласование между собой. Однако при расчёте среднеквадратичных напряжений и долговечности при соотношении частот 1:10 были получены значительные отклонения вычисленных значений, которые обусловлены не только формой частотного спектра, но и тем, что при использовании численно-аналитического метода учитывается недостаточное число форм колебаний пластины.

Анализ использованных методик оценки долговечности показывает, что расчёт с помощью узкополосного и широкополосного методов амплитуд предоставляют нижнюю и верхнюю оценку для долговечности пластины, а метод пересечений и основанный на гипотезе спектрального суммирования метод Райхера, дают близкие значения, располагающиеся внутри этого интервала. При увеличении числа учитываемых форм колебаний зависимость долговечности от методик расчёта сохраняется, однако значения, вычисленные с помощью метода пересечений и метода Райхера, начинают существенно различаться.

Разработанный алгоритм расчёта допускает обобщение на иные типы закрепления пластины. Результаты расчёта для случая закреплённой по периметру

пластины и пластины, закреплённой с двух противоположных сторон и свободно опертой с двух других, будут рассмотрены в дальнейших работах.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (код проекта № 15-08-04420 А).

Библиографический список

1. Von Glahn U., Goodykoontz J., Wagner J. Nozzle Geometry and Forward Velocity Effects on Noise for CTOL Engine-Over-The-Wing Concept // Oct. 1973, NASA TM-X-71453.
2. Von Glahn U., Groesbeck D., Wagner J. Wing Shielding of High-Velocity Jet and Shock – Associated Noise with Cold and Hot Flow Jets. AIAA Paper 76-547, July 1976.
3. Miles J. W. On Structural Fatigue Under Random Loading // Journal of the Aeronautical Sciences. 1954. Vol. 21, №. 11. Pp. 753 – 762.
4. Powell A. On the Fatigue Failure of Structure due to the Vibration Excited by Random Pressure Fields // Journal Acoustic Society of America. 1958. Vol. 30. Pp. 1130 – 1135.
5. Clarkson B. L. The design of Structures to Resist Jet Noise Fatigue // Journal Royal Aeronautic Society. 1962. Vol. 66, No. 622. Pp. 603 – 616.
6. Ballentine J. R. et al. Refinement of Sonic Fatigue Structural Design Criteria // Jan. 1968. AFFDL-TR-67-156, Air Force Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio. P.232.

7. Ballentine J. R. et al. Sonic Fatigue in Combined Environment // May 1966. AFFDL-TR-66-7, Air Force Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio. P.149.
8. Rudder F. F., Plumblee H. E. Sonic Fatigue Design Guide for Military Aircraft // May 1975. AFFDL-TR-74-112, Air Force Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio. P.572.
9. Blevins R. D. An Approximate method for Sonic Fatigue Analysis of Plates and Shells // Journal of Sound and Vibration. 1989. 129, № 1. P. 51 – 57.
10. Eringen A. C. Response of beams and Plates to random Loads // Trans. ASME Journal Applied Mechanics. 1957. № 24. Pp. 46 – 52.
11. Barnoski R. L., Maurer J. R. Distributed system response characteristics in random pressure field // September 1970, NASA contract report, NASA CR – 1660, P. 220.
12. Вронский Г.В. Оценка усталостной долговечности подкреплённой прямоугольной панели при воздействии движущейся случайной нагрузки // Труды ЦАГИ. 1976. Вып. 1796. С. 28.
13. Wagner H., Bhat Rama B., Linear Response of an Elastic Plate to Actual Random Load // Ingenieur-Archiv. 1970. Vol. 39. Pp. 149 – 158.
14. Денисов С.Л., Медведский А.Л. Отклик ортотропных пластин на широкополосное акустическое воздействие при различных видах взаимной спектральной плотности действующей нагрузки // Механика композиционных материалов. 2012. Т.18. № 4. С. 527 – 543.

15. Денисов С.Л., Медведский А.Л., Паранин Г.В. Изучение долговечности изотропных пластин при широкополосном акустическом нагружении с различными видами функции взаимной спектральной плотности // Учёные записки ЦАГИ. 2014. Т. XLV. № 2. С. 118 – 136.
16. Кузнецова Е.Л., Медведский А.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя // Труды МАИ, 2013, №71: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=46621>
17. Зарецкий М.В., Сидоренко А.С. Моделирование динамического напряженного состояния конструкции авиационного изделия при случайном нагружении // Труды МАИ, 2014, № 75: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=49667>
18. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Тарлаковский Д.В. Влияние формы набегающей волны на звукоизоляционные свойства прямоугольной пластины сложной структуры // Труды МАИ, 2015, № 82: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=58602>
19. Коновалов В.В., Качанов Е.Б., Сенник В.Я., Хватан А.М. Расчётные характеристики металлических конструкционных авиационных материалов / Справочник. – М. Триада Принт, 2007. - 353 с.
20. Lee Yung-Li, Pan Jwo, Hathaway R. B., Barkley M. E. Fatigue Testing and Analysis (Theory and Practice), ELSEVIER, 2005. P.402.

21. Райхер В.Л. Гипотеза спектрального суммирования и её применение для определения усталостной долговечности при действии случайных нагрузок // Труды ЦАГИ. 1969. Вып. 1134. С. 40.