УДК 004.076

Эффективность расслоенной памяти при поточной обработке адресных запросов

Брехов О.М.*, Тин Мо Аунг**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: obrekhov@mail.ru*

***e-mail: tinmoeaung1985@gmail.com*

Аннотация

Расслоенная память является известным средством для увеличения производительности памяти. Использование этого механизма при обработке массивов данных, когда последовательные номера ячеек массива располагаются в последовательных секциях памяти (по mod m), нашло применение вначале в высокопроизводительных ВС, а затем широкое применение во многих классах ВС включая ВС реального времени авиационно- космического назначения.

Указанные обстоятельства привлекли внимание многих исследователей к изучению эффективности расслоенной памяти посредством аналитического и имитационного моделирования. Обработка запросов в базах данных связана с обработкой массивов данных, в результате возникает множество потоков адресных обращений к секциям расслоенной памяти, при этом возможно обращение адресных обращений разных потоков к одним и тем же секциям, что уменьшает эффективность расслоенной памяти.

В данной работе посредством аналитического моделирования исследована эффективность расслоенной памяти с учетом адресных обращений конфликтующих потоков и получены следующие результаты. Определено абсолютное и относительное среднее и среднеквадратическое отклонение числа используемых секций в одном такте обращения к памяти в зависимости от числа секций расслоенной памяти, числа потоков адресных обращений и числа адресных обращений в одном потоке. Запас числа секций памяти в 1.6 раз может обеспечить в среднем 100% -ное обслуживание запросов при любом числе потоков. Относительное среднее число используемых секций в одном такте обращения к памяти зависит от числа потоков адресных обращений, но не зависит от числа адресных обращений в одном потоке. При возрастании числа потоков адресных обращений относительное среднее число используемых секций в одном такте обращения к памяти стремится к константе $1 - e^{-1} = 0.632$. Абсолютное среднеквадратическое отклонение числа используемых секций в одном такте обращения к памяти уменьшается с возрастанием числа адресных обращений в потоке при неизменном значении абсолютного среднее числа используемых секций. Отношение абсолютного среднеквадратического отклонения к абсолютному среднему числу используемых секций в одном такте обращения к памяти уменьшается с возрастанием числа адресных обращений в потоке. Среднее число используемых секций в одном такте обращения к памяти является существенным параметром характеризующим эффективность расслоенной памяти.

Ключевые слова: память, эффективность, расслоение, секции, потоки, адресные обращения, базы данных.

1. Введение

Расслоенная память является известным средством для увеличения производительности памяти. Использование этого механизма при обработке массивов данных, когда последовательные номера ячеек массива располагаются в последовательных секциях памяти (по mod m), нашло применение вначале в высокопроизводительных ВС [1] , а затем широкое применение во многих классах ВС

[2, 3]. Указанные обстоятельства привлекли внимание многих исследователей к изучению эффективности расслоенной памяти посредством аналитического и имитационного моделирования [4].

Обработка запросов в базах данных связана с обработкой массивов данных [5], в результате возникает множество потоков адресных обращений к секциям расслоенной памяти, при этом возможно обращение адресных обращений разных потоков к одним и тем же секциям, что уменьшает эффективность расслоенной памяти.

В данной работе посредством аналитического моделирования исследуется эффективность расслоенной памяти с учетом адресных обращений конфликтующих потоков.

2. Постановка задачи

Пусть n – число секций расслоенной памяти, k – число адресных обращений каждого потока в одном такте обращения к памяти, $p = \frac{n}{k}$ – число потоков. Поэтому общее число всех адресных обращений в одном такте обращения к памяти равно n.

Наша задача определить среднее число и среднеквадратическое отклонение числа используемых секций в одном такте обращения к памяти.

3. Среднее число используемых секций в одном такте обращения к памяти.

Нетрудно понять, что вероятность адресных обращений одного потока к конфликтующим секциям памяти равно $((p\text{-}1)\ k)\ /\ (p\ k)$. Тогда вероятность адресных обращений p потоков к конфликтующим секциям памяти равно $(\frac{p-1}{p})^{p}$.

Поэтому

относительное среднее число используемых секций в одном такте обращения к памяти равно:

$$m_{отн} = (1 - (1 - \frac{1}{p})^{p}) = 1 - (\frac{p-1}{p})^{p}, \qquad (3.1)$$

и абсолютное среднее число используемых секций в одном такте обращения к памяти равно:

$$m_{абс} = (1 - (1 - \frac{1}{p})^{p})\, n. \qquad (3.2)$$

Их предельные значения при $p \to \infty$ равны, соответственно:

$$\lim_{p \to \infty} m_{отн} = \lim (1 - (1 - \frac{1}{p})^{p})\, n = 1 - e^{-1}; \qquad (3.3)$$

$$\lim_{p \to \infty} m_{абс} = (1 - e^{-1})\, n, \qquad (3.4)$$

см. таблицу 3.1.

Таблица 3.1. Относительное среднее число используемых секций в одном такте обращения к памяти

число потоков p	1	2	3	4	10	32	∞
относительное среднее $m_{отн}$	1	0.75	0.703	0.6836	0.672	0.638	$1 - e^{-1} = 0.632$

Из таблицы 1 следует, что запас числа секций памяти в 1.6 раз может обеспечить в среднем 100% -ное обслуживание запросов при любом числе потоков.

Представляет интерес определение среднеквадратического отклонения числа используемых секций.

4. Среднеквадратическое отклонение числа используемых секций в одном такте обращения к памяти.

Для вычисления среднеквадратического отклонения, σ, случайной величины (числа занятых секций) – X воспользуемся известной формулой

$$\sigma = \sqrt{D(X)}, \tag{4.1}$$

где дисперсия $D(X)$ определяется выражением:

$$D(X) = M[X^2] - (M[X])^2, \tag{4.2}$$

здесь

$M[X] = m_{абс.}$

$\sigma_{абс} = \sqrt{D(X)}$

$$\sigma_{отн} = \sigma_{абс} / (k\,p) \tag{4.3}$$

Для вычисления M $[X^2]$ необходимо определить вероятность числа занятых секций для конкретных значений числа потоков p.

4.1. Число потоков равно 2

В этом случае число секций расслоенной памяти $n = pk = 2k$.

Пусть адресные обращения первого и второго потоков обозначены символами «*a*» и «*b*», соответственно.

Число возможных распределений адресных обращений для каждого из двух потоков равно C_{2k}^{k}.

В таблицах 4.1 и 4.2 приведено, как пример, для $k = 2$ распределение адресных обращений потоков по номерам секций памяти.

Таблица 4.1. Распределение адресных обращений потока «*b*» при фиксации адресных обращений потока «*a*» по номерам 1 и 2 секций памяти

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">Номер секции</td><td rowspan="3">число обслуженных секций</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Поток 1</td><td>a</td><td>a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">Распределение Потока 2</td><td>1</td><td>b</td><td>b</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>b</td><td></td><td>b</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>b</td><td></td><td></td><td>b</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>b</td><td>b</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>b</td><td></td><td>b</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td>b</td><td>b</td><td>4</td></tr>
</table>

Таблица 4.2. Распределение адресных обращений потока «*b*» при фиксации адресных обращений потока «*a*» по номерам 3 и 4 секций памяти

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">Номер секции</td><td rowspan="3">число обслуженных секций</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Поток 1</td><td></td><td></td><td>a</td><td>a</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Распределение Потока 2</td><td>1</td><td>b</td><td>b</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>b</td><td></td><td>b</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>b</td><td></td><td></td><td>b</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td>b</td><td>b</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>b</td><td></td><td>b</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td>b</td><td>b</td><td>2</td></tr>
</table>

Для каждого из приведенных распределений адресных обращений потока «*a*» среднее число обслуженных адресных обращений равно:

$$\frac{6\,(1*2+4*3+1*4)}{6*6} = \frac{18}{6} = 3$$

Очевидно, что среднее число для любого распределения потока «*a*» по секциям памяти одинаково: $\frac{18}{6} = 3$.

Поэтому в общем случае при вычислении среднего числа и среднеквадратического отклонения адресных обращений можно ограничиться только одним из C_{2k}^{k} распределением адресных обращений потока «*a*».

Для произвольных значений n и k для двух потоков (p = 2) число обслуженных адресных обращений (число занятых секций) равно $k + i$, где $i = \overline{0,\ k}$.

При этом число распределений адресных обращений потока «*b*» (для фиксированного распределения потока «*a*» для $k + i$ занятых секций определяется соотношением $C_k^{k-i}\ C_k^{i}$, где первый сомножитель C_k^{k-i} соответствует (k – i) адресным обращениям потока «*b*» к *«k»* секциям памяти, к которым были *«k»* адресных обращений потока *«a»*.

Второй сомножитель C_k^{i} соответствует i адресным обращениям потока «*b*» к свободным «*k*» секциям памяти.

Имея ввиду равенство $C_k^{k-i}\ C_k^{i} = (\ C_k^{i}\ )^2$, находим вероятность $k + i$ обслуженных адресных обращений (занятых секций), где i = $\overline{0,\ k}$:

$p_{\,k+i} = (\ C_k^{i}\ )^2\ /\ C_{2k}^{k}$, i = $\overline{0,\ k.}$ (4.4)

В соответствии с соотношением (3.8) абсолютное среднее число занятых секций равно:

$$m_{абс} = (\ k\ (\ C_k^{0}\ )^2 + (\ k + 1\ )\ (\ C_k^{1}\ )^2 + (\ k + 2\ )\ (\ C_k^{2}\ )^2 + \ldots + (\ 2k - 1)\ (\ C_k^{k-1}\ )^2 + 2k\ (\ C_k^{k}\ )^2\ )\ /\ C_{2k}^{k} = (\ \frac{k+2k}{2}\ (\ (\ C_k^{0}\ )^2 + (\ C_k^{1}\ )^2 + \ldots + \left(\ C_k^{k}\ \right)^2))\ /\ C_{2k}^{k}\ .$$

С учетом соотношения

$$(C_k^0)^2 + (C_k^1)^2 + \ldots + (C_k^k)^2) = C_{2k}^k$$

находим, что

$$m_{абс} = (\frac{k+2k}{2} (C_{2k}^k) / C_{2k}^k = 1.5\, k = \frac{3}{4}\, n.$$

Отметим, что полученное соотношение является частным случаем соотношения (3.2) при $p = 2$.

В соответствии с соотношением (4.4) также находим:

$$M\,[X^2] = (\textstyle\sum_{i=0}^{k} (k + i)^2 \left(C_k^i \right)^2) / C_{2k}^k. \qquad (4.5)$$

В частности, для $k = 4$ при $p = 2$ ($n = k\,p = 8$) находим:

$$M\,[X^2] = (4^2 \text{ x } 1 + 5^2 \text{ x } 4^2 + 6^2 \text{ x } 6^2 + 7^2 \text{ x } 4^2 + 8^2 \text{ x } 1) / C_8^4 = 2560/70 = 36.57$$

$$D\,(X) = M\,[X^2] – (M\,[X])^2 = 36.57 – 6^2 = 0.57$$

$$\sigma_{абс} = \sqrt{D\,(X)} = 0.7559$$

$$\sigma_{отн} = \sigma_{абс} / (k\,p) = 0.0945$$

В таблице 4.3 для $p = 2$ приведены значения числа занятых секций и вероятности числа занятых секций памяти, значения относительного $m_{отн}$ и абсолютного $m_{абс}$ среднего числа используемых секций и значения относительного $\sigma_{отн}$ и абсолютного $\sigma_{абс}$ среднеквадратического отклонения числа используемых секций в одном такте обращения к памяти в зависимости от числа адресных обращений в потоке – k.

Таблица 4.3. Значения среднего числа секций (относительного $m_{отн}$ и абсолютного $m_{абс}$) и среднеквадратического отклонения (относительного $\sigma_{отн}$ и абсолютного $\sigma_{абс}$) для $p = 2$

Число адресных ссылок в потоке – k	Число занятых секций	(Вероятность числа занятых секций) х C_{2k}^{k}	Среднее относительное $m_{отн}$	Отклонение относительное $\sigma_{отн}$	Среднее абсолютное $m_{абс}$	Отклонение абсолютное $\sigma_{абс}$
2	2 3 4	1 2^2 1	0.75	0.1443	3	0.57735
3	3 4 5 6	1 3^2 3^2 1	0.75	0.118	4.5	0.67082
4	4 5 6 7 8	1 4^2 6^2 4^2 1	0.75	0.0945	6	0.7559
5	5 6 7 8 9 10	1 5^2 10^2 10^2 5^2 1	0.75	0.08(3)	7.5	0.8(3)
6	6 7 8 9 10 11 12	1 6^2 15^2 20^2 15^2 6^2 1	0.75	0.0754	9	0.9045
10	10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20	1 10^2 45^2 120^2 210^2 252^2 210^2 120^2 45^2 10^2 1	0.75	0.0573	15	1.147
16	16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26	1 16^2 120^2 560^2 1820^2 4368^2 8008^2 11440^2 12870^2 11440^2 8008^2	0.75	0.0449	24	1.4368

	27	4368^2				
	28	1820^2				
	29	560^2				
	30	120^2				
	31	16^2				
	32	1				

Из таблицы 4.3 следует:

Абсолютное среднеквадратическое отклонение числа используемых секций в одном такте обращения к памяти уменьшается с возрастанием числа адресных обращений в потоке при неизменном значении абсолютного среднее числа используемых секций.

Отношение абсолютного среднеквадратического отклонения к абсолютному среднему числу используемых секций в одном такте обращения к памяти уменьшается с возрастанием числа адресных обращений в потоке.

4.2. Число потоков равно 3.

В этом случае число секций расслоенной памяти $n = pk = 3k$.

Пусть адресные ссылки первого, второго и третьего потоков обозначены символами *«a»*, *«b» и «c»*, соответственно. Зафиксируем адресные обращения потока *«a»*. Пусть адресные обращения *«b»* совпадают с адресными обращениями потока *«a»*. Для потока *«c»* возможно C_{3k}^{k} разных адресных обращений к *«k»* секциям. Число занятых секций и количество таких вариантов тремя потоками адресных обращений находится в пределах от k до $2k$ и приведено в таблице 4.4, что соответствует известному соотношению:

$$C_k^k\ C_{2k}^0 + C_k^{k-1}\ C_{2k}^1 + \ldots + C_k^0\ C_{2k}^k = C_{3k}^k.$$

Таблица 4.4. Число занятых секций и количество вариантов при совпадении адресных обращений потоков «*a*» и «*b*»

Число занятых секций	Количество вариантов
k	$C_k^k\ C_{2k}^0$
$k + 1$	$C_k^{k-1}\ C_{2k}^1$
$k + 2$	$C_k^{k-2}\ C_{2k}^2$
$k + 3$	$C_k^{k-3}\ C_{2k}^3$
.....	………
$k + j$	$C_k^{k-j}\ C_{2k}^j$
.....	………
$2k - 1$	$C_k^1\ C_{2k}^{k-1}$
$2k$	$C_k^0\ C_{2k}^k$

Пусть адресные обращения потока «*a*» по-прежнему зафиксированы. Пусть адресные обращения потока «*b*» отличаются по количеству адресных обращений в секции занятые потоком «*a*». Количество вариантов адресных обращений потока «*b*» для $i,\ i = \overline{0,\ k}$, в секции уже занятые адресными обращениями потока «*a*» равно C_k^{k-i} C_{2k}^i.

Заметим, что в силу известного соотношения [6]

$$C_p^0\ C_{n-p}^m + C_p^1\ C_{n-p}^{m-1} + \ldots + C_p^m\ C_{n-p}^0 = C_n^m$$

при

$p = k + i, n = 3k\ , m = k$ имеем

$$C_{k+i}^0\ C_{3k-(k+i)}^k + C_{k+i}^1\ C_{2k-i}^{k-1} + \ldots + C_{k+i}^k\ C_{2k-i}^k = C_{3k}^k.$$

В каждом варианте для потока «*c*» возможно C_{3k}^k разных адресных обращений к «*k*» секциям.

В таблице 4.5 приведено число занятых секций и количество таких вариантов обращений.

Таблица 4.5. Число занятых секций и количество вариантов при несовпадении адресных обращений потоков «*a*» и «*b*»

Число занятых секций	Количество вариантов
$k + i$	$C_{k+i}^{k}\ C_{2k-i}^{0}$
$k + i + 1$	$C_{k+i}^{k-1}\ C_{2k-i}^{1}$
$k + i + 2$	$C_{k+i}^{k-2}\ C_{2k-i}^{2}$
….	…..
$2k + i - d$	$C_{k}^{d}\ C_{2k-i}^{k-d}$
….	….
$2k + i - 1$	$C_{k}^{1}\ C_{2k-i}^{k-1}$
$2k + i$	$C_{k}^{0}\ C_{2k-i}^{k}$

Пусть p_{k+i} – вероятность того, что будет обслужено $k + i$, $i = \overline{0,\ 2k,}$ адресных обращений (занято $k+i$, $i = \overline{0,\ 2k,}$ секций).

Тогда из предыдущих объяснений следует:

$p_{k} = C_{k}^{k}\ C_{2k}^{0} /(C_{3k}^{k})^{2},$

$p_{k+1} = (C_{k}^{k-1}\ C_{2k}^{k} + C_{k}^{k-1}\ C_{2k}^{k}\ C_{k+1}^{k}\ C_{2k-1}^{0}) / (C_{3k}^{k})^{2},$

$p_{k+2} = (C_{k}^{k-2}\ C_{2k}^{2} + C_{k}^{k-1}\ C_{2k}^{1}\ C_{k+1}^{k-1}\ C_{2k-1}^{1} + C_{k}^{k-2}\ C_{2k}^{2}\ C_{k+2}^{k}\ C_{2k-2}^{0}) / (C_{3k}^{k})^{2},$

$p_{k+3} = (C_{k}^{k-3}\ C_{2k}^{3} + C_{k}^{k-1}\ C_{2k}^{1}\ C_{k+1}^{k-2}\ C_{2k-1}^{1} + C_{k}^{k-2}\ C_{2k}^{2}\ C_{k+2}^{k-1}\ C_{2k-2}^{1}) + C_{k}^{k-3}\ C_{2k}^{3}\ C_{k+3}^{k}$ $C_{2k-3}^{0})/ \ /(C_{3k}^{k})^{2},$

$p_{3k-3} =(C_{k}^{3}\ C_{2k}^{k-3}\ C_{2k-3}^{0}\ C_{k+3}^{k} + C_{k}^{2}\ C_{2k}^{k-2}\ C_{2k-2}^{1}\ C_{k+2}^{k-1} + C_{k}^{1}\ C_{2k}^{k-1}\ C_{2k-1}^{2}\ C_{k+1}^{k-2} +$ $C_{k}^{0}\ C_{2k}^{k}\ C_{2k}^{3}\ C_{k}^{k-3})/(C_{3k}^{k})^{2},$

$p_{3k-2} = (C_{k}^{2}\ C_{2k}^{k-2}\ C_{2k-2}^{0}\ C_{k+2}^{k} + C_{k}^{1}\ C_{2k}^{k-1}\ C_{2k-1}^{1}\ C_{k+1}^{k-1} + C_{k}^{0}\ C_{2k}^{k}\ C_{2k}^{2}\ C_{k}^{k-2})/$ $(C_{3k}^{k})^{2},$

$p_{3k-1} = (C_{k}^{1}\ C_{2k}^{k-1}\ C_{2k-1}^{0}\ C_{k+1}^{k} + C_{k}^{0}\ C_{2k}^{k}\ C_{2k}^{1}\ C_{k}^{k-1})/(C_{3k}^{k})^{2},$

$p_{3k} = (C_k^0 \; C_{2k}^k \; C_{2k}^0 \; C_k^k)/(C_{3k}^k)^2.$ (4.6)

Используя соотношение (4.6) для вероятностей p_{k+i}, $i = \overline{0,\ 2k},$ определим абсолютное среднее число занятых секций при общем числе секций $3k$ и трех потоках, $p = 3$:

$$m_{абс} = \frac{1}{(C_{3k}^k)^2} * [k (C_k^k \; C_{2k}^0) + (k+1) (C_k^{k-1} \; C_{2k}^k + C_k^{k-1} \; C_{2k}^k \; C_{k+1}^k \; C_{2k-1}^0) +$$

$$+ (k+2) (C_k^{k-2} \; C_{2k}^2 + C_k^{k-1} \; C_{2k}^1 \; C_{k+1}^{k-1} \; C_{2k-1}^1 + C_k^{k-2} \; C_{2k}^2 \; C_{k+2}^k \; C_{2k-2}^0) +$$

$$+ (k+3) (C_k^{k-3} \; C_{2k}^3 + C_k^{k-1} \; C_{2k}^1 \; C_{k+1}^{k-2} \; C_{2k-1}^1 + C_k^{k-2} \; C_{2k}^2 \; C_{k+2}^{k-1} \; C_{2k-2}^1) + C_k^{k-3} \; C_{2k}^3$$

$$C_{k+3}^k \; C_{2k-3}^0) + \ldots +$$

$$+ (3k-3) (C_k^3 \; C_{2k}^{k-3} \; C_{2k-3}^0 \; C_{k+3}^k + C_k^2 \; C_{2k}^{k-2} \; C_{2k-2}^1 \; C_{k+2}^{k-1} + C_k^1 \; C_{2k}^{k-1} \; C_{2k-1}^2 \; C_{k+1}^{k-2}$$

$$+ C_k^0 \; C_{2k}^k \; C_{2k}^3 \; C_k^{k-3}) +$$

$$+ (3k-2) (C_k^2 \; C_{2k}^{k-2} \; C_{2k-2}^0 \; C_{k+2}^k + C_k^1 \; C_{2k}^{k-1} \; C_{2k-1}^1 \; C_{k+1}^{k-1} + C_k^0 \; C_{2k}^k \; C_{2k}^2 \; C_k^{k-2}) +$$

$$+ (3k-1) (C_k^1 \; C_{2k}^{k-1} \; C_{2k-1}^0 \; C_{k+1}^k + C_k^0 \; C_{2k}^k \; C_{2k}^1 \; C_k^{k-1}) +$$

$$+ 3k (C_k^0 \; C_{2k}^k \; C_{2k}^0 \; C_k^k)].$$

Имея ввиду, что число занятых секций лежит в пределах от k до $3k$ перепишем последнее соотношение, выделяя слагаемое с числом секций равным точно $2k$:

$$m_{абс} = \frac{1}{(C_{3k}^k)^2} * [2k (C_{3k}^k)^2 -$$

$$- (k \; C_k^k + (k-1) \; C_k^{k-1} \; C_{2k}^1 + (k-2) \; C_k^{k-2} \; C_{2k}^2 + \ldots + 2 \; C_k^2 \; C_{2k}^{k-2} + 1 \; C_k^1 \; C_{2k}^{k-1}) -$$

$$- C_k^{k-1} \; C_{2k}^1 ((k-1) \; C_{k+1}^k + (k-2) \; C_{k+1}^{k-1} \; C_{2k-1}^1 + (k-3) \; C_{k+1}^{k-2} \; C_{2k-1}^2 + \ldots +$$

$$+2 \; C_{k+1}^3 \; C_{2k-1}^{k-3} + 1 \; C_{k+1}^2 \; C_{2k-1}^{k-2} - C_{k+1}^0 \; C_{2k-1}^k) -$$

$- C_{k}^{k-2}\ C_{2k}^{2}\,((k-2)\ C_{k+2}^{k} + (k-3)\ C_{k+2}^{k-1}\, C_{2k-2}^{1} + (k-4)\ C_{k+2}^{k-2}\ C_{2k-2}^{2} + \ldots +$

$+2\, C_{k+2}^{4}\ \ C_{2k-2}^{k-4} + 1\, C_{k+2}^{3}\ \ C_{2k-2}^{k-3} - 1\, C_{k+2}^{1}\ \ C_{2k-2}^{k-1} - 2\, C_{k+2}^{0}\ \ C_{2k-2}^{k}\,) - \ldots +$

$+ C_{k}^{2}\ C_{2k}^{k-2}\,((k-2)\, C_{k+2}^{k} + (k-3)\, C_{2k-2}^{1}\ C_{k+2}^{k-1} + (k-4)\, C_{2k-2}^{2}\ C_{k+2}^{k-2}$

$+ \ldots + 2\ C_{2k-2}^{k-4}\ C_{k+2}^{4} + \ C_{2k-2}^{k-3}\ C_{k+2}^{3} - 1\ C_{2k-2}^{k-1}\ C_{k+2}^{1} - 2\ C_{2k-2}^{k}\ C_{k+2}^{0}\,) +$

$+\ C_{k}^{1}\ \ C_{2k}^{k-1}\ ((k-1)\, C_{k+1}^{k} + (k-\ )\, C_{2k-1}^{1}\ C_{k+1}^{k-1} + (k-3)\, C_{2k-1}^{2}\ C_{k+1}^{k-2} + \ldots +$

$+ 2\ C_{2k-1}^{k-3}\ C_{k+1}^{3} + 1\ C_{2k-1}^{k-2}\ C_{k+1}^{2} - C_{2k-1}^{k}\ C_{k+1}^{0}\,) +$

$+ C_{k}^{0}\, C_{2k}^{k}\,(k\ \ C_{2k}^{0}\, C_{k}^{k} + (k-1)\, C_{2k}^{1}\ C_{k}^{k-1} + (k-2)\, C_{2k}^{2}\, C_{k}^{k-2} + \ldots + 2\, C_{2k}^{k-2}\, C_{k}^{2} + 1\, C_{2k}^{k-1}$

$C_{k}^{1}).$

Группируя первое и последнее слагаемые, второе и предпоследнее слагаемые и т.д., получим:

$m_{абс} = \frac{1}{(C_{3k}^{k})^2} * [2k\,(C_{3k}^{k}\,)^2\ -$

$+ (C_{k}^{0}\ C_{2k}^{k} - 1)\,(k\ C_{k}^{k}\ + (k-1)\ C_{k}^{k-1}\ \ C_{2k}^{1} + (k-2)\, C_{k}^{k-2}\ C_{2k}^{2} + \ldots +$

$+ 2\, C_{k}^{2}\ \ C_{2k}^{k-2} +\ C_{k}^{1}\ \ C_{2k}^{k-1}\,) +$

$+\ C_{k}^{1}\,(\ C_{2k}^{k-1} -\ C_{2k}^{1}\,)\,((k-1)\ C_{k+1}^{k} + (k-2)\ C_{k+1}^{k-1}\ \ C_{2k-1}^{1} + (k-3)\ C_{k+1}^{k-2}\ C_{2k}^{2}\ +$

$+ \ldots + 2\ \ C_{k+1}^{3}\, C_{2k-1}^{k-3} + 1\, C_{k+1}^{2}\ \ C_{2k-1}^{k-2} - 1\ C_{k+1}^{0}\ \ C_{2k-1}^{k}\,) +$

$+\ C_{k}^{2}\,(\ C_{2k}^{k-2} -\ C_{2k}^{2}\,)\,((k-2)\ \ C_{k+2}^{2} + (k-3)\, C_{k+2}^{k-1}\ \ C_{2k-2}^{1} +$

$+ (k-4)\, C_{k+2}^{k-2}\ \ C_{2k-2}^{2}\ + \ldots + 2\ C_{k+2}^{4}\ \ C_{2k-2}^{k-4} +\ C_{k+2}^{3}\ C_{2k-2}^{k-3} - C_{k+2}^{1}\ \ C_{2k-2}^{k-1} - 2\, C_{2k-2}^{k}$
$+\ldots$

Можно убедиться в справедливости соотношений:

$k\ \ C_{k}^{k} + (k-1)\ \ C_{k}^{k-1}\ \ C_{2k}^{1} + \ldots + 2\, C_{k}^{2}\ \ C_{2k}^{k-2}\ +\ \ C_{k}^{1}\ \ C_{2k}^{k-1}\ =\ \frac{k}{3}\ C_{3k}^{k},$

$(k-1)\, C_{k+1}^{k} + (k-2)\ C_{k+1}^{k-1}\ C_{2k-1}^{1} + \ldots + 2\, C_{k+1}^{3}\ C_{2k-1}^{k-3} + \ C_{k+1}^{2}\ C_{2k-1}^{k-2} - \ C_{2k-1}^{k} = \frac{k-2}{3}\ C_{3k}^{k}$,

$(k-2)\, C_{k+2}^{k} + (k-3)\ C_{k+2}^{k-1}\ C_{2k-2}^{1} + \ldots + 2\, C_{k+2}^{4}\ C_{2k-2}^{k-4} + \ C_{k+2}^{3}\ C_{2k-2}^{k-3} - \ C_{k+2}^{1}\ C_{2k-2}^{k-1}$

$-\, 2\, C_{2k-2}^{k} = \frac{k-4}{3}\ C_{3k}^{3}$,

и так далее

$$(k-i)\, C_{k+i}^{k} + (k-(i+1))\ C_{k+i}^{k-1}\ C_{2k-i}^{1} + (k-(i+2))\, C_{k+i}^{k-2}\ C_{2k-i}^{2} + 2\, C_{k+i}^{i+2}\ C_{2k-i}^{k-(i+2)}$$

$$+\, 1\, C_{k+i}^{i+1}\ C_{2k-i}^{k-(i+1)} - 1\, C_{k+i}^{i-1}\ C_{2k-i}^{k-(i-1)} - 2\, C_{2k-i}^{k(i-2)}\ C_{k+i}^{i-2} - i\ C_{2k-i}^{k}\ C_{k+i}^{0} = \frac{k-2i}{3}\ C_{3k}^{3}.$$

Поэтому

$$m_{абс} = \frac{1}{(C_{3k}^{k})^2} * [2k\,(C_{3k}^{k})^2 + \frac{C_{3k}^{3}}{3}(\,k\,(\,C_{k}^{0}\ \ C_{2k}^{k} - 1\,) +$$

$$+\,(\,k-2\,)\ C_{k}^{1}\,(\,C_{2k}^{k-1} - \ C_{2k}^{1}\,) + (\,k-4\,)\ C_{k}^{2}\,(\,C_{2k}^{k-2} - \ C_{2k}^{2}\,) + \ldots].$$

Второе слагаемое в квадратных скобках можно записать в виде

$$\frac{C_{3k}^{3}}{3}(\,k\,(\,C_{k}^{0}\ \ C_{2k}^{1} - 1\,) + (\,k-2\,)\ C_{k}^{1}\ (\,C_{2k}^{k-1} - \ C_{2k}^{1}\,) - (\,k-4\,)\ C_{k}^{2}\ (\,C_{2k}^{k-2} - \ C_{2k}^{2}\,) = k\,(\frac{C_{3k}^{k}}{3})^2.$$

В результате получаем выражения:

для абсолютного среднего числа занятых секций:

$$m_{абс} = \frac{1}{(C_{3k}^{k})^2} * [2k\,(C_{3k}^{k})^2 + k\,(\frac{C_{3k}^{k}}{3})^2\,] = k\,\frac{19}{9} = \frac{3^3 - 2^2}{3^2}k \qquad (4.7)$$

для относительного среднего числа занятых секций:

$$m_{отн} = \frac{m_{абс}}{3k} = \frac{19}{27} = \frac{3^3 - 2^2}{3^3}\,. \qquad (4.8)$$

Отметим, что полученные соотношения являются частным случаем соотношения (3.2) при p = 3.

Для вычисления среднеквадратического отклонения, σ, случайной величины (числа занятых секций) – X воспользуемся формулами (3.5), (3.6) и (3.7), в которых вероятность p_{k+i} того, что будет занято $k + i$, $i = \overline{0,\ 2k},$ адресных обращений определяется соотношением (4.6).

В результате находим:

при k = 2 ($n = k\,p$ = 6):

$m_{абс}$ = $M\,[X]$ = (2 x 1+ 3 x 32 + 4 x 114+ 5 x 72 + 6 x 6) / $(C^2{}_6)^2$ $= 950/\ 225$ = 4.2(2)

$M\,[X^2]$ = (2^2 x 1+ 3^2 x 32 + 4^2 x 114+ 5^2 x 72 + 6^2 x 6) /$(C^2{}_6)^2$ $= 4132/\ 225$ = 18.36(4)

$D\,(X) = M\,[X^2] – (M\,[X])^2$ = 18.36(4) – 17.82716 = 0.53728

$\sigma_{абс} = \sqrt{}D\,(X)$ = 0.733

$\sigma_{отн} = \sigma_{абс} / (k\,p)$ = 0.733 / 6 = 0.12217

при k = 3 ($n = k\,p$ = 9):

$m_{абс}$ = $M\,[X]$ = (3x 1+ 4x 90 + 5x 1035+ 6x 2940 + 7x 2430 + 8x 540 + 9x 20) /$(C^3{}_9)^2$ = 40.1(1)

$M\,[X^2]$ = (3^2 x 1+ 4^2 x 90 + 5^2 x 1035+ 6^2 x 2940 + 7^2 x 2430 + 8^2 x 540 + 9^2 x 20) /$(C^3{}_9)^2$ = 288414/84^2 = 40.875

$D\,(X) = M\,[X^2] – (M\,[X])^2$ = 40.875– 40.1(1)= 0.764

$\sigma_{абс} = \sqrt{}D\,(X)$ = 0.874

$\sigma_{отн} = \sigma_{абс} / (k\,p)$ = 0.733 /9 = 0.0971(1)

В таблице 4.6 для p = 3 приведены значения числа занятых секций и вероятности числа занятых секций памяти, значения относительного $m_{отн}$ и абсолютного $m_{абс}$ среднего числа используемых секций и значения относительного $\sigma_{отн}$ и абсолютного $\sigma_{абс}$ среднеквадратического отклонения числа используемых секций в одном такте обращения к памяти в зависимости от числа адресных обращений в потоке – k.

Таблица 4.6. Значения среднего числа секций (относительного $m_{отн}$ и абсолютного $m_{абс}$) и среднеквадратического отклонения (относительного $\sigma_{отн}$ и абсолютного $\sigma_{абс}$) для p = 3

Число адресных обращений в потоке – k	Число занятых секций	(Вероятность числа занятых секций) x C_{2k}^{k}	Среднее относительное $m_{отн}$	Отклонение относительное $\sigma_{отн}$	Среднее абсолютное $m_{абс}$	Отклонение абсолютное $\sigma_{абс}$
2	2 3 4 5 6	1 32 114 72 6	0.703(703)	0.12217	4.2(2)	0.733
3	3 4 5 6 7 8 9	1 90 1035 2940 2430 540 20	0.703(703)	0.097(1)	6.3(3)	0.874

Аналогично можно определить среднеквадратическое отклонение числа используемых секций в одном такте обращения к памяти и для других значений числа потоков адресных обращений p и числа адресных обращений в одном потоке k. При этом отношение среднеквадратического отклонения к среднему числу используемых секций в одном такте обращения к памяти уменьшается с возрастанием числа адресных обращений в потоке, что дает возможность рассматривать параметр среднее число используемых секций в одном такте обращения к памяти как существенный параметр характеризующий эффективность расслоенной памяти.

5. Выводы

5.1. Определено абсолютное и относительное среднее и среднеквадратическое отклонение числа используемых секций в одном такте обращения к памяти в зависимости от числа секций расслоенной памяти, числа потоков адресных обращений и числа адресных обращений в одном потоке.

5.2. Запас числа секций памяти в 1.6 раз может обеспечить в среднем 100% - ное обслуживание запросов при любом числе потоков.

5.3. Относительное среднее число используемых секций в одном такте обращения к памяти зависит от числа потоков адресных обращений, но не зависит от числа адресных обращений в одном потоке.

5.4. При возрастании числа потоков адресных обращений относительное среднее число используемых секций в одном такте обращения к памяти стремится к константе $1 - e^{-1} = 0.632$.

5.5. Абсолютное среднеквадратическое отклонение числа используемых секций в одном такте обращения к памяти уменьшается с возрастанием числа адресных обращений в потоке при неизменном значении абсолютного среднее числа используемых секций.

5.6. Отношение абсолютного среднеквадратического отклонения к абсолютному среднему числу используемых секций в одном такте обращения к памяти уменьшается с возрастанием числа адресных обращений в потоке.

5.7. Среднее число используемых секций в одном такте обращения к памяти является существенным параметром характеризующим эффективность расслоенной памяти.

Библиографический список

1. Коуги П.М. Архитектура конвейерных ЭВМ. М.: Радио и связь, 1985. – 360 с.
2. Таненбаум Эндрю С. Архитектура компьютера. - Санкт-Петербург, 2011. – 848 с.
3. Цилькер Б.Я., Орлов С.А. Организация ЭВМ и систем. - Санкт-Петербург, 2004. – 668 с.
4. Артамонов Г.Т., Брехов О.М. Оценка производительности ВС аналитико-статистическими методами. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 301 с.
5. Кохонен Т. Ассоциативные запоминающие устройства. – М.: Мир, 1982. – 384.
6. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. - М.: Наука, 1969. – 323 с.