

Труды МАИ. 2021. № 121
Trudy MAI, 2021, no. 121

Научная статья

УДК 517.958:621.225:621.454

DOI: [10.34759/trd-2021-121-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-06)

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ТОНКИМ СЛОЕМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

**Александра Геннадиевна Гягяева¹, Дмитрий Вячеславович Кондратов^{2✉},
Лев Ильич Могилевич³**

¹Российская академия народного хозяйства и государственной службы при
Президенте Российской Федерации,

Саратов, Россия

²Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук
(ИПТМУ РАН),

Саратов, Россия

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет им.
Н.Г. Чернышевского,

Саратов, Россия

^{2,3}Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Саратов, Россия

¹gyagaevaa@mail.ru

²kondratovdv@yandex.ru✉

³mogilevichli@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается постановка задачи гидроупругости геометрически нелинейных пластин с вязкой несжимаемой жидкостью и возможность реализации данной задачи с использованием компьютерных программных средств, как инструментов поддержки принятия решений. Рассматривается модель механической системы, состоящей из двух пластин взаимодействующих через слой вязкой несжимаемой жидкости, одна из которых является упругой геометрически нерегулярной нелинейной и удерживается свободным опиранием на краях, а вторая совершает гармонические колебания в вертикальной оси относительно первой и является абсолютно жесткой.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, упругая геометрически нерегулярная пластина, абсолютно жесткое тело

Для цитирования: Гягяева А.Г., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Вывод уравнения динамики геометрически нелинейной пластины, взаимодействующей с тонким слоем вязкой несжимаемой жидкости // Труды МАИ. 2021. № 121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-06)

DERIVATION OF THE DYNAMIC EQUATION FOR A GEOMETRICALLY NONLINEAR PLATE INTERACTING WITH A THIN LAYER OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

Alexandra G. Gyagyaeva¹, Dmitry V. Kondratov², Lev I. Mogilevich³

¹Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration,
Saratov, Russia

²Institute of Problems of Precision Mechanics and Control of the Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS),

Saratov, Russia

²Saratov National Research State University named after N.G. Chernyshevsky,

Saratov, Russia

^{2,3}Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin,

Saratov, Russia

¹gyagaevaa@mail.ru

²kondratovdv@yandex.ru[✉]

³mogilevichli@gmail.com

Abstract. At present, different methods for solving the problem of hydroelasticity are applied. They allow solving a set of problems in question by means of assumptions and limitations with a required precision and reliability. To make engineer decisions while examining hydroelasticity problems, specialized computer software is used. It allows simplifying the calculating process of hydroelasticity problems and demonstrating a graphical solution of the problems. Thin-wall structures interact with viscous incompressible fluid, particularly plates and shell structures. They are used in machine industry, in instrument making industry, in aviation and space industry. Thus, one needs to build mathematical models and apply program systems to make decisions in designing machines and devices. The article considers the model of a mechanical system consisting of an absolutely rigid body (vibrator); an elastic rib, rectangular plate (stator) and viscous incompressible fluid. Using the Hamilton's variation principle, the equation for the elastic geometrically nonlinear plate dynamics is derived. The mathematical model of the presented mechanical system consists of the incompressible fluid dynamics equations, the

elastic geometrically nonlinear ribbed plate dynamic equations, the equation of motion for the absolutely rigid vibrator and the corresponding boundary conditions. The program for the analytical derivation of the dynamic equations for an elastic irregular nonlinear stator was developed. It takes into account the boundary conditions of a free support and the conditions of free fluid flow on the ends. The constructed mathematical model can be applied for the design of hydrodynamic supports. The mathematical model can be used in designing of hydrodynamic bearings that are operated in machine industry, in instrument making industry, in aviation and space industry.

Keywords: viscous incompressible fluid, elastic geometrically irregular plate, absolutely rigid vibrator

For citation: Gyagyaeva A.G., Kondratov D.V., Mogilevich L.I. Derivation of the dynamic equation for a geometrically nonlinear plate interacting with a thin layer of a viscous incompressible fluid. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. [DOI: 10.34759/trd-2021-121-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-06)

Введение

В настоящее время большие перспективы открывает проблема развития эксплуатационных характеристик различных конструкций. В частности, тонкостенных конструкций, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью. Таким образом, решение задач гидроупругости достаточно актуально и востребовано. При решении данного класса задач используются различные методы, позволяющие посредством допущений и ограничений получить решения с требуемой точностью и надежностью. Использование при решении

специализированных программных средства, позволяет упростить вычисления и наглядно представить графическое решение данных задач.

В данной работе будут рассматриваться тонкостенные конструкции в виде пластин и оболочек. Тонкостенные конструкции, взаимодействующие с вязкой несжимаемой жидкостью, применяются в машиностроении, приборостроении, авиационной и космической промышленности [1-7]. Теоретическим исследованием взаимодействия упругих оболочек с несжимаемой жидкостью занимались такие ученые как Бочкарёв С.А. и Каменских А.О. [2], Попов В.С [3], Добрышкин А.Ю. [6], Блинков Ю.А. [8], Плаксина И.В. [9], Рабинский Л.Н. [10], Нинх Д.Г и Тен Н.Д. [11], Глитко В. и Наумченко В. [12], Калинина А.В. [13], Блинкова О.В. [14] и др.

Исследованием процесса деформирования трехслойных композитных ортотропных прямоугольных пластин занимались Старовойтов Э.И., Локтева Н.А., Старовойтова Н.А. [4]. Аналитическим и экспериментальном исследованием свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс свои работы посвятили Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н. [5]. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. в своих исследованиях экспериментально проверяли математические модели вынужденных колебаний разомкнутой тонкостенной оболочки с малой присоединенной массой и жестко защемленными краями [6]. Напряженно-деформированное состояние симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории являлись предметом изучения Фирсанов В. В., Зоан К. Х. [7].

Изучением задач взаимодействия цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью занимались многие российские ученые. В частности, Сейфуллаев А.И. и Новрузова К.А. рассматривали задачу о свободном колебании продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью [15]. Плаксина И.В. изучала гидроупругость трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации при различных ее закреплениях [9]. Нелинейные волны в соосных физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость являлись предметом изучения Ковалевой И.А. [16]. Изучением цилиндрических оболочек из трехслойного композита, содержащих вязкую несжимаемую жидкость занимались такие зарубежные ученые, как Нинх Д.Г. и Тен Н.Д. [11]. Глитко В. и Наумченко В. моделировали свободные и вынужденные колебания оболочек, взаимодействующих с жидкостью [12]. Калинина А.В. проводила исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации [13]. Волошин А.Н. и Попова Е.В. исследовали продольные колебания стенок кольцевого канала с вязкой жидкостью [17-18]. Багхлали А. и Кхаят М. изучали свободные колебания цилиндрических оболочек в термической среде с учетом взаимодействия с жидкостью [19].

Вопросы моделирования процессов взаимодействия оболочки с вязкой жидкостью в плоской постановке также нашли отражение в трудах многих ученых. Бочкарёв С.А. и Лекомцев С.В. исследовали тонкостенные конструкции, взаимодействующие с вязкой жидкостью, в работе [17] представлены результаты

исследования тонкостенных пластин и цилиндрических оболочек, взаимодействующих с неподвижной или текущей вязкой сжимаемой жидкостью.

Однако в данных работах не рассматривались задачи колебания нелинейной геометрически нерегулярной пластины, взаимодействующей с вязкой несжимаемой жидкостью.

Таким образом, необходимо построение математических моделей и использование комплексов программ для принятия решений при изучении проблемы развития эксплуатационных характеристик различных конструкций.

Постановка задачи

Рассмотрим модель механической системы (Рис. 1), состоящий из 1 - абсолютно жесткого тела (вибратор); 2 - упругая ребристая, прямоугольная в плане пластина (статор) и 3 - вязкая несжимаемая жидкость.

Вибратор имеет ширину 2ℓ и длину $b \gg 2\ell$. Вибратор совершает колебания по гармоническому закону $z = \delta(t) = \delta_0 + z_m f_z(\omega t)$, в вертикальной плоскости. При этом частота его колебаний ω , а амплитуда колебаний вибратора z_m .

Внутренняя поверхность статора, находящаяся в контакте с жидкостью, является плоской, а внешняя поверхность имеет n ребер жесткости. Ребра расположены параллельно стороне b пластины. Толщина статора на участках, где отсутствуют ребра жесткости, равна h_0 . Высота j -го ребра равна h_{pj} , а его ширина ε_j ; Статор на торцах имеет шарнирное опирание.

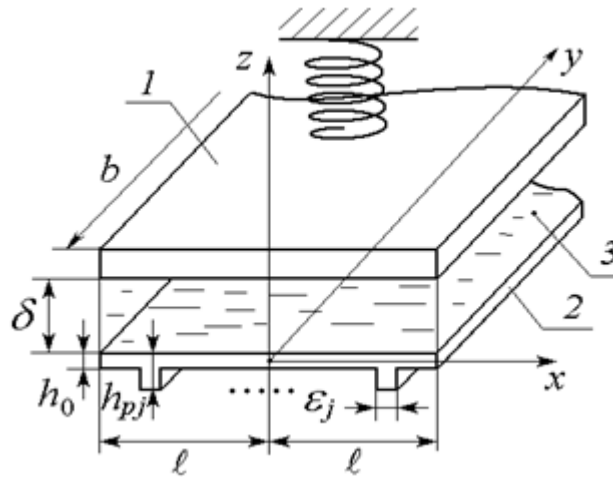


Рис. 1- Модель механической системы
(1 - вибратор; 2 - статор; 3 - вязкая несжимаемая жидкость).

Вязкая несжимаемая жидкость 3 полностью заполняет щелевой зазор между абсолютно твердым вибратором и упругим геометрически нерегулярным статором. При этом в жидкости, находящейся в щелевом зазоре, и вне его поддерживается постоянный уровень давления p_0 . Средняя величина щелевого зазора (средняя толщина слоя жидкости в опоре) равна δ_0 . На торцах сторон b имеются торцевые уплотнители, и истечение жидкости через эти торцы отсутствует. При этом предполагается, что на торцах $2l$ сторон торцевые уплотнители отсутствуют, и жидкость из щелевых зазоров вдоль сторон $2l$ (вдоль оси x) может свободно истекать в окружающую жидкость, постоянный уровень давления в которой равен p_0 . Кроме того, на левом и правом торцах считаются заданными законы пульсации давления над постоянным уровнем p_0 .

Вибратор имеет подвес, который обладает упругой жесткостью. Опора находится под воздействием виброускорения (т.е. считается установленной на вибрирующем основании). Вследствие этого возбуждение колебаний вибратора происходит за счет воздействия пульсации давления и переносного виброускорения.

Для правильного построения математической модели необходимо вывести уравнение описывающей динамику упругой геометрически нерегулярной пластины – статора, вариационными методами.

Уравнение динамики упругого геометрически нерегулярного статора

Для построения математической модели рассматриваемой механической системы необходимо получить уравнения динамики упругой геометрически нерегулярной нелинейной пластины - статора. Выведем уравнения пластины с помощью интегрального вариационного принципа Гамильтона. Для этого запишем вариационный принцип Гамильтона в следующем виде:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iiint_{\Omega} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \bar{u}^z}{\partial t}, \frac{\partial \bar{u}^z}{\partial t} \right) - (\sigma_x^z \varepsilon_x^z) \right] dz + \bar{p} \cdot \bar{u} \right\} d\Omega dt = 0 \quad (1)$$

где δ - вариация;

ρ_0 – плотность материала пластины;

$\bar{u}^z = \left(u - z \frac{\partial W}{\partial x} \right) \bar{i} + w \bar{k}$ – вектор упругих перемещений точек пластины,

отстоящих от координатой поверхности на расстоянии z ;

$\varepsilon_x^z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - z \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)$ – компонента тензора упругой деформации;

$\sigma_x^z = \frac{E}{1 - \mu_0^2} \varepsilon_x^z$ – компонента тензора напряжений;

E – модуль Юнга материала пластины;

μ_0 – коэффициент Пуассона материала пластины;

$\bar{p} = q_x \bar{i} + q_k \bar{k}$ – вектор поверхностных напряжений;

$\bar{u} = u\bar{i} + w\bar{k}$ – вектор упругих перемещений точек координатной поверхности упругой ребристой пластины;

$d\Omega = dx dy$ – элемент площади;

$z_1 = -\frac{h_0}{2} - \sum_j (h_{pj} - h_0) \Delta\Gamma_{xj}$, $z_2 = \frac{h_0}{2}$ – уравнения, описывающие нижнюю и

верхнюю поверхности пластины;

$\Delta\Gamma_{xj} = \Gamma\left(x - x_j + \frac{\varepsilon_j}{2}\right) - \Gamma\left(x - x_j - \frac{\varepsilon_j}{2}\right)$ – столбчатая функция;

$\Gamma(x)$ – единичная функция Хевисайда по продольной координате;

$x_j - \frac{\varepsilon_j}{2}$ – точка появления начала ребра по продольной координате;

ε_j – толщина ребра; x_j – точка середины ребра;

h_{pj} – толщина пластины на ребре.

После использования метода варьирования для уравнения (1) с учетом начальных условий получаем принцип Гамильтона в виде:

$$\int_0^b \int_{-l}^l \left\{ \int_{z_1}^{z_2} \left(\rho_0 \frac{\partial \bar{u}^z}{\partial t} \cdot \delta \bar{u}^z - \sigma_x^z \varepsilon_x^z \right) dz + q_k \delta u + q_u \delta \omega \right\} dx dy = 0 \quad (2)$$

С учетом упрощения $\delta \left(\frac{\partial \bar{u}^z}{\partial t}, \frac{\partial \bar{u}^z}{\partial t} \right) = \frac{\partial \bar{u}^z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta \bar{u}^z) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u^z}{\partial t} \delta u_z \right) - \frac{\partial^2 \bar{u}^z}{\partial t^2} \delta u_z^z$

найдем вариацию работы сил инерции:

$$\int_0^b dy \int_{-l}^l dx \int_{-\frac{h_0}{2} - \sum_j (h_{pj} - h_0) \Delta\Gamma_{xj}}^{\frac{h_0}{2}} \rho_0 \left[\frac{\partial \bar{u}^z}{\partial t} \cdot \delta \bar{u}^z + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + z_0 \right) \delta w^z \right] dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \rho_0 b \int_{-l}^l \left\{ \left[h_0 \left(1 + \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h_0^2}{2} \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \right] \delta u + \right. \\
&\quad + \left[h_0 \left(1 + \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial t^2} \right) - \frac{h_0^2}{2} \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} - \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \frac{h_0^3}{12} \left(1 + \sum_j k_{3j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \right] \delta w \right\} dx - \\
&\quad \rho_0 b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{h_0^2}{2} \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} u + \frac{h_0^3}{12} \left(1 + \sum_j k_{3j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{-l}^l \quad (3)
\end{aligned}$$

где $k_{1j} = \frac{h_{p1}}{h_0} - 1$, $k_{2j} = k_{1j}^2 + k_{1j}$, $k_{3j} = 4k_{1j}^3 + 6k_{1j}^2 + 3k_{1j}$.

Учитывая граничные условия, вариация работы сил инерции принимает вид:

$$\begin{aligned}
\delta A_I &= \rho_0 b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-l}^l \left\{ \left[u \left(1 + \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{h_0}{2} \cdot \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \right] \delta u + \right. \\
&\quad + \left[(w + z_0) \left(1 + \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{h_0}{2} \cdot \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{h_0^2}{12} \left(1 + \sum_j k_{3j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \right] \delta w \left. \right\} dx \quad (4)
\end{aligned}$$

Вариация работы сил упругости определяется в виде:

$$\int_0^b dy \int_{-l}^l dx \int_{-\frac{h_0}{2} - h_0 \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x^z \delta \varepsilon_x^z dz \quad (5)$$

Вариация работы сил упругости с учетом усилия T_x и момента запишется в

виде:

$$b \int_{-l}^l \left\{ T_x \left[\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right] - M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -b \int_{-l}^l \left\{ \frac{\partial T_x}{\partial x} \delta u + \left[\frac{\partial}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} T_x \right) + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \right] \delta w \right\} dx + \\
&+ b \int_{-l}^l \left\{ T_x \delta u + \left(\frac{\partial w}{\partial x} T_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} \right) \delta w - M_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} \Big|_{-l}^l
\end{aligned} \tag{6}$$

где усилия T_x - действуют на пластину со стороны жидкости, а момент M_x возникает при взаимодействии жидкости на пластину,

$$\begin{aligned}
T_x &= \int_{-\frac{h_0}{2} - h_0 \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x^z dz = \frac{Ek_0}{1 - \mu_0^2} \left[\left(1 + \sum_j k_{3j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{h_0}{2} \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
M_x &= \int_{-\frac{h_0}{2} - h_0 \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x^z z dz = -\frac{Ek_0}{1 - \mu_0^2} \left[\frac{h_0}{2} \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{h_0^2}{12} \left(1 + \sum_j k_{3j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]
\end{aligned}$$

Исходя из граничных условий $u = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$, $T_x = M_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_x = 0$

последнее слагаемое в уравнение (6) обращается в нуль и будет иметь вид:

$$\delta w = -b \int_{-l}^l \left\{ \frac{\partial T_x}{\partial x} \delta u + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} T_x \right) + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \right] \delta w \right\} dx \tag{7}$$

Рассмотрим вариацию поверхностных сил:

$$\delta A_f = \int_0^b \int_{-l}^l \bar{p} \cdot \delta \bar{u} dx dy = b \int_{-l}^l (q_x \delta u + q_k \delta w) dx, \tag{8}$$

тогда принцип Гамильтона для поверхностных сил запишем как:

$$-\delta A_f - \delta W + \delta A_f = 0.$$

Тогда в силу независимости δu и δw получаем уравнения пластины:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &= \rho_0 b \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left(1 + \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) + \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \cdot \frac{h_0}{2} \cdot \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \right] - q_x \\
\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} T_x \right) &= \rho_0 h_0 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial t^2} \right) \left(1 + \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \cdot \frac{h_0}{2} \cdot \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} - \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} \frac{h_0^2}{12} \left(1 + \sum_j k_{3j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \right] - q_u
\end{aligned} \tag{9}$$

Для удобства запишем уравнения динамики пластины (9) в перемещениях:

$$\begin{aligned}
&\frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \left(1 + \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{h_0}{2} \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \right\} = \\
&= p_0 h_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[u \cdot \left(1 + \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{h_0}{2} \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \right] - q_x \\
&\quad - \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{h_0^2}{12} \left(1 + \sum_j k_{3j} \Delta \Gamma_{xj} \right) + \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{h_0}{2} \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \right\} + \tag{10} \\
&+ \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \left(1 + \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{h_0}{2} \left(1 + \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \right\rangle = \\
&= p_0 h_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(w + z_0(t)) \left(1 + \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{h_0}{2} \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{h_0^2}{12} \left(1 + \sum_j k_{3j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \right] - q_k
\end{aligned}$$

Таким образом, получили уравнение геометрически нерегулярной нелинейной пластины.

Математическая модель механической системы

С учетом выведенного уравнения упругой геометрически нерегулярной нелинейной пластины, можем записать математическую модель рассматриваемой механической системы.

Движение жидкости в канале, образованном упругой нелинейной пластиной и вибратором, описывается уравнениями динамики вязкой несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right); \\ \ddot{z}_0 + \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

где p – гидродинамическое давление жидкости; ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости; ρ – плотность жидкости; V_x, V_z – компоненты скорости жидкости.

Граничные условия для уравнения динамики жидкости представляют собой условия прилипания жидкости к стенкам статора и вибратора, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} V_x = 0, V_z = \frac{d\delta(t)}{dt} \quad \text{при} \quad z = \delta_0 + z_m f_z(\omega t) + \frac{h_0}{2}; \\ V_x = \frac{\partial U}{\partial t}, V_z = \frac{\partial W}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = W + \frac{h_0}{2}, \\ P = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1, \end{aligned} \quad (12)$$

где U – проекция упругого перемещения геометрически нерегулярного статора на ось Ox ; V – проекция упругого перемещения геометрически нерегулярного статора на ось Oy ; W – упругое перемещение геометрически нерегулярного статора по нормали (т.е. его прогиб); δ_0 – среднее значение ширины щелевого зазора δ ; z_m – амплитуда колебаний абсолютно жесткого вибратора в вертикальном направлении; $f_z(\omega t)$ – закон движения вибратора;

Поведения неподвижной упругой нелинейной геометрически нерегулярной пластины описываются выведенные ранее уравнениями динамики статора:

$$\begin{aligned}
& \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \left(1 + \sum_j k_{3j} \Delta \Gamma_{xj} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{h_0}{2} \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \right\} = \\
& = p_0 h_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[u \cdot \left(1 + \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{h_0}{2} \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \right] - q_x \quad (13) \\
& - \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{h_0^2}{12} \left(1 + \sum_j k_{3j} \Delta \Gamma_{xj} \right) + \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{h_0}{2} \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \right\} + \\
& + \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \left(1 + \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{h_0}{2} \left(1 + \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \right\rangle = \\
& = p_0 h_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(w + z_0(t)) \left(1 + \sum_j k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{h_0}{2} \sum_j k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{h_0^2}{12} \left(1 + \sum_j k_{3j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \right] - q_k;
\end{aligned}$$

Закрепления балки-полоски при построении математической модели представляют собой граничные условия свободного опирания и имеют вид:

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = \pm \ell \quad (14)$$

Помимо учета закрепления балки-полоски для уравнений необходимо учесть условия свободного истечения жидкости на торцах. Условия свободного торцевого истечения жидкости в направлении оси x и в противоположном направлении при построении математической модели принимают вид условий совпадения давления на торце с давлением в окружающей жидкости и записываются в виде:

$$p = p_0 - \rho \ddot{z}_0 (z - h_0 / 2) \quad \text{при } x = \pm \ell. \quad (15)$$

Таким образом было получено уравнение динамики упругого геометрически

нерегулярного статора для балки-полоски с учетом граничных условий свободного опирания и условий свободного истечения жидкости на торцах.

Заключение

Таким образом, был проанализирован опыт отечественных и зарубежных авторов, работы которых повешены изучению упругих оболочек с несжимаемой жидкостью. На основе проведенного анализа была обоснована необходимость построения и изучения модели механической системы, состоящей из двух пластин, взаимодействующих через слой вязкой несжимаемой жидкости. Обе пластины представляют собой упругие геометрически нерегулярные нелинейные пластины. Первая пластина удерживается свободным опиранием на краях, а вторая совершает гармонические колебания в вертикальной оси относительно первой и является абсолютно жесткой.

Для данной системы была построена математическая модель, представляющая собой уравнения динамики упругого нерегулярного нелинейного статора. Для данных уравнений были сформулированы граничные условия свободного опирания и условия свободного истечения жидкости на торцах в направлении осей x и y .

Построенная математическая модель может найти применения при проектировании гидродинамических опор, которые применяются в машиностроении, приборостроении, авиационной и космической промышленности.

Список источников

1. Блинкова О.В., Кондратов Д.В. Математическая модель взаимодействия сдвигаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругой трехслойной пластиной с легким несжимаемым наполнителем // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. № 1. С. 4-11.
2. Бочкарёв С.А., Каменских А.О., Лекомцев С.В., Сенин А.Н. Теоретическое и экспериментальное исследование тонкостенных конструкций, взаимодействующих с вязкой // Вестник Пермского федерального исследовательского центра. 2020. № 1. С. 6-18. DOI: [10.7242/2658-705X/2020.1.1](https://doi.org/10.7242/2658-705X/2020.1.1)
3. Попов В.С., Попова Е.В., Черненко А.В. Математическое моделирование гидроупругого взаимодействия между вибрирующим штампом и трехслойной балкой, установленной на основание винклера // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. № 4. С. 37-56.
4. Старовойтов Э.И., Локтева Н.А., Старовойтова Н.А. Деформирование трехслойных композитных ортотропных прямоугольных пластин // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53018>
5. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90079>
6. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Экспериментальная проверка математической модели вынужденных колебаний разомкнутой тонкостенной

оболочки с малой присоединенной массой и жестко заземленными краями // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)

7. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100589>

8. Могилевич Л.И., Блинков Ю.А., Иванов С.В. Волны деформации в двух соосных кубически нелинейных цилиндрических оболочках с вязкой жидкостью между ними // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2020. Т. 28. № 4. С. 435-454.

9. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И., Плаксина И.В. Гидроупругость трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации при различных ее закреплениях // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1(59). С. 29-37.

10. Mogilevich L.I., Popov V.S., Kondratov D.V., Rabinskiy L.N. Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator // Journal of Vibroengineering, 2017, vol. 19, no. 8, pp. 5758-5766. DOI: [10.21595/jve.2017.18179](https://doi.org/10.21595/jve.2017.18179)

11. Ninh D.G., Tien N.D., Hoang V.N.V., Bich D.H. Vibration of cylindrical shells made of three layers W-CU composite containing heavy water using flügge-lure-bryrne

theory // Thin-Walled Structures, 2020, vol. 146, pp. 106-114. DOI: [10.1016/j.tws.2019.106414](https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106414)

12. Gnitko V., Naumenko V., Ogorodnik U., Strelnikova E. Free and forced vibrations of shell structures interacting with liquid // WIT Transactions on Modelling and Simulation. Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXIV, 2012, pp. 83-95. DOI: [10.2495/BE120081](https://doi.org/10.2495/BE120081)

13. Кондратов Д.В., Калинина А.В. Исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=115116>

14. Блинкова О.В., Кондратов Д.В. Задача динамики взаимодействия сжимаемого слоя вязкого сжимаемого газа с упругой пластиной // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112935>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-21](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-21)

15. Сейфуллаев А.И., Новрузова К.А. Исследование колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 3. № 7 (75). С. 29-33.

16. Ковалева И.А. Моделирование динамики нелинейных волн в соосных физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2012. Т. 4. № 1 (68). С. 28-36.

17. Волошин А.Н., Попова А.А., Попова Е.В., Ратушный А.В. Моделирование продольных колебаний стенок кольцевого канала с вязкой жидкостью //

Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. № 4. С. 26-36.

18. Попов В.С., Попова Е.В., Черненко А.В. Математическое моделирование гидроупругого взаимодействия между вибрирующим штампом и трехслойной балкой, установленной на основание Винклера // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. № 4. С. 37-56.

19. Baghlani A., Khayat M., Dehghan S.M. Free vibration analysis of fgm cylindrical shells surrounded by pasternak elastic foundation in thermal environment considering fluid-structure interaction // Applied Mathematical Modelling, 2020, vol. 78, pp. 550-575.

DOI: [10.1016/j.apm.2019.10.023](https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.10.023)

20. Бочкарёв С.А., Каменских А.О., Лекомцев С.В., Сенин А.Н. Теоретическое и экспериментальное исследование тонкостенных конструкций, взаимодействующих с вязкой жидкостью // Вестник Пермского федерального исследовательского центра. 2020. № 1. С. 6-19. DOI: [10.7242/2658-705X/2020.1.1](https://doi.org/10.7242/2658-705X/2020.1.1)

References

1. Blinkova O.V., Kondratov D.V. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyi i naturnyi eksperiment v estestvennykh naukakh*, 2018, no. 1, pp. 4-11.

2. Bochkarev S.A., Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V., Senin A.N. *Vestnik Permskogo federal'nogo issledovatel'skogo tsentra*, 2020, no. 1, pp. 6-18. DOI: [10.7242/2658-705X/2020.1.1](https://doi.org/10.7242/2658-705X/2020.1.1)

3. Popov V.S., Popova E.V., Chernenko A.V. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyi i naturnyi eksperiment v estestvennykh naukakh*, 2018, no. 40, pp. 37-56.
4. Starovoitov E.I., Lokteva N.A., Starovoitova N.A. *Trudy MAI*, 2014, no. 77. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53018>
5. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Nein S.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 98. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90079>
6. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)
7. Firsanov V.V., Zoan K.Kh. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100589>
8. Mogilevich L.I., Blinkov Yu.A., Ivanov S.V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Prikladnaya nelineinaya dinamika*, 2020, vol. 28, no. 4, pp. 435-454.
9. Kondratov D.V., Kondratova Yu.N., Mogilevich L.I., Plaksina I.V. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2011, vol. 4, no. 1 (59), pp. 29-37.
10. Mogilevich L.I., Popov V.S., Kondratov D.V., Rabinskiy L.N. Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator, *Journal of Vibroengineering*, 2017, vol. 19, no. 8, pp. 5758-5766. DOI: [10.21595/jve.2017.18179](https://doi.org/10.21595/jve.2017.18179)
11. Ninh D.G., Tien N.D., Hoang V.N.V., Bich D.H. Vibration of cylindrical shells made of three layers W-CU composite containing heavy water using flügge-lure-bryrne theory, *Thin-Walled Structures*, 2020, vol. 146, pp. 106-114. DOI: [10.1016/j.tws.2019.106414](https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106414)

12. Gnitko V., Naumenko V., Ogorodnik U., Strelnikova E. Free and forced vibrations of shell structures interacting with liquid, *WIT Transactions on Modelling and Simulation. Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXIV*, 2012, pp. 83-95. DOI: [10.2495/BE120081](https://doi.org/10.2495/BE120081)
13. Kondratov D.V., Kalinina A.V. *Trudy MAI*, 2014, no. 78. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=115116>
14. Blinkova O.V., Kondratov D.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112935>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-21](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-21)
15. Seifullaiev A.I., Novruzova K.A. *Vostochno-Evropeiskii zhurnal peredovykh tekhnologii*, 2015, vol. 3, no 7 (75), pp. 29-33.
16. Kovaleva I.A. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2012, vol. 4, no. 1 (68), pp. 28-36.
17. Voloshin A.N., Popova A.A., Popova E.V., Ratushnyi A.V. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyi i naturnyi eksperiment v estestvennykh naukakh*, 2019, no. 4, pp. 26-36.
18. Popov V.S., Popova E.V., Chernenko A.V. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyi i naturnyi eksperiment v estestvennykh naukakh*, 2018, no. 4, pp. 37-56.
19. Baghlani A., Khayat M., Dehghan S.M. Free vibration analysis of fgm cylindrical shells surrounded by pasternak elastic foundation in thermal environment considering fluid-structure interaction, *Applied Mathematical Modelling*, 2020, vol. 78, pp. 550-575. DOI: [10.1016/j.apm.2019.10.023](https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.10.023)

20. Bochkarev S.A., Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V., Senin A.N. *Vestnik Permskogo federal'nogo issledovatel'skogo tsentra*, 2020, no. 1, pp. 6-19. DOI: [10.7242/2658-705X/2020.1.1](https://doi.org/10.7242/2658-705X/2020.1.1)

Статья поступила в редакцию 13.10.2021; одобрена после рецензирования 28.10.2021; принята к публикации 21.12.2021.

The article was submitted on 13.10.2021; approved after reviewing on 28.10.2021; accepted for publication on 21.12.2021.