

УДК: 004.81: 159.953.52

Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в биортогональных вейвлет-базисах

В.В. Рыбин

Аннотация

В настоящее время для математических расчетов в процессе обучения применяются различные системы компьютерной математики (СКМ) и пакеты их расширения [8-10], которые предназначены для изучения спектральной формы математического описания систем управления. В работе [8] рассмотрена технология разработки пакетов расширения MLSY_SM СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab, которые позволяют проводить анализ в спектральной области линейных нестационарных непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных систем управления, находящихся под воздействием детерминированных и случайных сигналов.

В данной статье рассмотрен пакет расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в биортогональных вейвлет-базисах и особенности его формирования. Демонстрируется его применение на тестовых примерах.

Ключевые слова

биортогональный базис вейвлетов; кратномасштабный анализ; нестационарные системы автоматического управления; спектральная форма математического описания; системы компьютерной математики.

1. Основные характеристики спектральной формы описания непрерывно-дискретных систем в биортонормированных базисах

Для анализа и синтеза нестационарных непрерывных и, в общем случае, непрерывно-дискретных систем управления разработан спектральный метод расчета [1-3]. В основе этого

метода лежит понятие нестационарной спектральной характеристики (НСХ), которая определяется через ортонормированные функции. Однако для описания и анализа указанных классов систем управления можно использовать биортонормированные функции [4-6]. Рассмотрим основные характеристики спектральной формы описания непрерывно-дискретных систем в биортонормированных базисах.

Пусть $\varphi_i(\theta) \in L^2$, $\varphi_i(k) \in l^2$ и $\psi_i(\theta) \in L^2$, $\psi_i(k) \in l^2$ для всех i и $\{\varphi_i, \psi_i\}$ и $\left\{ \begin{matrix} \varphi_i \\ * \\ \psi_i \end{matrix} \right\}$

биортонормированные системы непрерывных и дискретных функций соответственно. Тогда каждая функция $x(\theta) \in L^2$ и $x(k) \in l^2$ имеет два разложения:

$$x(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} X(i, t) \varphi_i(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} X(i, t) \psi_i(\theta), \quad (1.1)$$

$$x(k) = \sum_{i=0}^{M-1} X(i, M) \varphi_i(k) = \sum_{i=0}^{M-1} X(i, M) \psi_i(k). \quad (1.2)$$

В этих разложениях

$$S[x(\theta)] = X(i, t) = \int_0^t \psi^*(i, t, \theta) x(\theta) d\theta, \quad (1.3)$$

$$S[x(\theta)] = X(i, t) = \int_0^t \varphi^*(i, t, \theta) x(\theta) d\theta \quad (1.4)$$

и

$$S[x(k)] = X(i, M) = \sum_{k=0}^{M-1} \psi^*(i, L, k) x(k), \quad (1.5)$$

$$S[x(k)] = X(i, M) = \sum_{k=0}^{M-1} \varphi^*(i, L, k) x(k) \quad (1.6)$$

- нестационарные спектральные характеристики (НСХ).

Из (1.1) – (1.6) находим:

$$X = \Lambda \begin{matrix} X \\ \psi \psi^* \varphi \end{matrix}, \quad (1.7)$$

$$X = \Lambda \begin{matrix} X \\ \varphi \varphi^* \psi \end{matrix}, \quad (1.8)$$

где Λ - двумерная нестационарная характеристика связи (ДНХС) [3], которая для непрерывных базисных функций имеет вид:

$$\Lambda_{\psi^*}^*(h, i, t, t) = \int_0^t \gamma^*(h, t, \tau) \gamma(i, t, \tau) d\tau, \quad (1.9)$$

а для дискретных

$$\Lambda_{\gamma\gamma^*}^*(h, i, L, L) = \sum_{l=0}^{L-1} \gamma^*(h, L, l) \gamma(i, L, l). \quad (1.10)$$

Заметим, что матрица ДНХС $\Lambda_{\psi\psi^*}^*$, обратная к матрице $\Lambda_{\varphi\varphi^*}^*$, т.е. $\Lambda_{\psi\psi^*}^* \cdot \Lambda_{\varphi\varphi^*}^* = \Lambda_{\varphi\varphi^*}^* \cdot \Lambda_{\psi\psi^*}^* = E$.

Из формул (1.1)-(1.6) видно, что каждый из двух базисов φ_i, ψ_i можно использовать для разложения и восстановления сигнала. Поэтому в дальнейшем будем считать, что ψ_i - базис разложения, а φ_i - базис восстановления сигнала.

Аналогично определяется НСХ функции двух переменных (ДНСХ):

$$S_{\psi\psi^*}^*[x] = X_{\psi\psi^*}^*(h, i) = (\psi(h) \psi^*(i), x). \quad (1.11) \text{ Например,}$$

выражение (1.11) для непрерывно-дискретной функции времени $x(\theta, m)$ раскрывается как

$$S_{\psi\psi^*}^*[x(\theta, m)] = X_{\psi\psi^*}^*(h, i, t, M) = \int_0^t \psi^*(h, t, \theta) \sum_{m=0}^{M-1} \psi(i, M, m) x(\theta, m) d\theta. \quad (1.12)$$

Подобными формулами определяются многомерные НСХ функций многих переменных.

Обращение НСХ, т.е. отыскание искомой функции многих аргументов, производится по формулам обращения. Например, для функций одного и двух аргументов

$$S^{-1} \left[X_{\psi}^*(i) \right] = x = \left(\varphi^*(i), X_{\psi}^*(i) \right); \quad (1.13)$$

$$S^{-1} \left[X_{\psi\psi^*}^*(h, i) \right] = x = \left(\varphi^*(h) \varphi(i), X_{\psi\psi^*}^*(h, i) \right). \quad (1.14)$$

Случайные нестационарные сигналы в спектральной области описываются НСХ своих моментных функций: первой нестационарной спектральной плотностью (НСП)

$${}^1 S_x(i) = S_{\psi}^*[m_x], \quad (1.15)$$

где m_x - математическое ожидание случайного сигнала; второй НСП (или просто НСП)

$$S_x(h, i) = S_{\psi\psi^*}^*[R_{xx}], \quad (1.16)$$

где R_{xx} - корреляционная функция случайного сигнала.

Аналогично определяются и остальные НСХ моментных функций случайного сигнала.

Системными характеристиками нестационарных непрерывно-дискретных систем являются нестационарные передаточные функции (НПФ): нормальная (ННПФ), сопряженная (СНПФ), двумерная (ДНПФ). Для непрерывно-дискретной системы они классифицируются по типу входа и выхода как Н-Н, Д-Д, Н-Д, Д-Н непрерывно-дискретные системы.

Например, ДНПФ определяется как

$$W_{\psi\varphi}^*(h, i) = (\psi(h)\varphi^*(i, k)), \quad (1.17)$$

т.е. для систем:

- непрерывных и Н-Н непрерывно-дискретных

$$W_{\psi\varphi}^*(h, i, t, t) = \int_0^t \psi^*(h, t, \theta) \int_0^t k(\theta, \tau) \varphi(i, t, \tau) d\tau d\theta; \quad (1.18)$$

- дискретных и Д-Д непрерывно-дискретных

$$W_{\psi\varphi}^*(h, i, L, M) = \sum_{l=0}^{L-1} \psi^*(h, L, l) \sum_{m=0}^{M-1} k(l, m) \varphi(i, M, m); \quad (1.19)$$

- Д-Н непрерывно-дискретных

$$W_{\psi\varphi}^*(h, i, L, t) = \sum_{l=0}^{L-1} \psi^*(h, L, l) \int_0^t k(l, \tau) \varphi(i, t, \tau) d\tau; \quad (1.20)$$

- Н-Д непрерывно-дискретных

$$W_{\psi\varphi}^*(h, i, t, M) = \int_0^t \psi^*(h, t, \theta) \sum_{m=0}^{M-1} k(\theta, m) \varphi(i, M, m) d\theta. \quad (1.21)$$

НСХ, НСП и ДНПФ удобно представлять в матричной форме. В этой форме ДНПФ непрерывной системы (1.17), соответствующая дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=0}^n a_i(\theta) \frac{d^i x(\theta)}{d\theta} = \sum_{i=0}^m b_i(\theta) \frac{d^i g(\theta)}{d\theta}, \quad (1.22)$$

выражается соотношением

$$W(t, t) = [A_n(t, t)P^n(t, t) + \dots + A_0(t, t)]^{-1} [B_m(t, t)P^m(t, t) + \dots + B_0(t, t)]. \quad (1.23)$$

ДНПФ дискретной системы (1.19), соответствующая конечно-разностному уравнению

$$\sum_{i=0}^n a_i(l) \nabla_l^i x(l) = \sum_{i=0}^m b_i(l) \nabla_l^i g(l), \quad (1.24)$$

выражается соотношением, подобным (1.23):

$$W(L, L) = [A_n(L, L)P^n(L, L) + \dots + A_0(L, L)]^{-1} [B_m(L, L)P^m(L, L) + \dots + B_0(L, L)]. \quad (1.25)$$

ДНПФ (1.23) и (1.25) выражаются через элементарные и типовые звенья непрерывных и дискретных систем.

В качестве элементарных звеньев непрерывно-дискретных систем обычно рассматриваются интегрирующее, суммирующее, дифференцирующее первого и второго рода, разностное, непрерывные и дискретные звенья с переменными коэффициентами передачи, непрерывное и дискретное звено чистого сдвига (запаздывания и упреждения), понижения такта, сдвига тактовых точек, а также собственно непрерывно-дискретные звенья – дискретный элемент и экстраполяторы.

ДНПФ (1.17) этих звеньев имеют вид:

- ДНПФ интегрирующего звена

$$P_{\psi\varphi}^{-1}(h, i, t, t) = \int_0^t \psi^*(h, t, \theta) \int_0^\theta \varphi(i, t, \tau) d\tau d\theta; \quad (1.26)$$

- ДНПФ суммирующего звена

$$P_{\psi\varphi}^{-1}(h, i, L, L) = \sum_{l=0}^{L-1} \psi^*(h, L, l) \sum_{m=0}^l \varphi(i, L, m); \quad (1.27)$$

- ДНПФ дифференцирующего звена первого рода

$$P_{\psi\varphi}(h, i, t, t) = v_{\psi\varphi}(h, i, t, t) + \mathfrak{Z}_{\psi\varphi}(h, i, t, t) \quad (1.28)$$

где $v_{\psi\varphi}(h, i, t, t) = \psi^*(h, t, 0)\varphi(i, t, 0)$ - ДНПФ начальных значений, а

$$\mathfrak{Z}_{\psi\varphi}(h, i, t, t) = \int_0^t \psi^*(h, t, \theta) \frac{d}{d\theta} \varphi(i, t, \theta) d\theta - \text{ДНПФ дифференцирующего звена второго}$$

рода;

- ДНПФ разностного звена

$$P_{\psi\varphi}(h, i, L, L) = \psi^*(h, L, 0) \varphi^*(i, L, 0) + \sum_{l=0}^{L-1} \psi^*(h, L, l) \nabla_l \varphi^*(i, L, l); \quad (1.29)$$

- ДНПФ усилительных звеньев:

непрерывного

$$A_{\psi\varphi}(h, i, t, t) = \int_0^t a(\theta) \psi^*(h, t, \theta) \varphi(i, t, \theta) d\theta, \quad (1.30)$$

дискретного

$$A_{\psi\varphi}(h, i, L, L) = \sum_{l=0}^{L-1} a(l) \psi^*(h, L, l) \varphi^*(i, L, l); \quad (1.31)$$

- ДНПФ звена чистого запаздывания:

непрерывного ($\theta_0 > 0$)

$$\tau_{\psi\varphi}^{-\theta_0}(h, i, t, t) = \int_{\theta_0}^t \psi^*(h, t, \theta) \varphi(i, t, \theta - \theta_0) d\theta, \quad (1.32)$$

дискретного ($k > 0$)

$$\tau_{\psi\varphi}^{-k}(h, i, t, t) = \sum_{l=k}^{L-1} \psi^*(h, L, l) \varphi^*(i, L, l - k); \quad (1.33)$$

- ДНПФ звена чистого упреждения:

непрерывного ($\theta_0 < 0$)

$$\tau_{\psi\varphi}^{-\theta_0}(h, i, t, t) = \int_0^{t+\theta_0} \psi^*(h, t, \theta) \varphi(i, t, \theta - \theta_0) d\theta, \quad (1.34)$$

дискретного ($k < 0$)

$$\tau_{\psi\varphi}^{-k}(h, i, t, t) = \sum_{l=0}^{L+k-1} \psi^*(h, L, l) \varphi^*(i, L, l - k); \quad (1.35)$$

- ДНПФ звена понижения такта ($L < M$)

$$T_{\psi\varphi}(h, i, L, M) = \sum_{m=0}^{M-1} \psi^*(h, L, \tau_m) \varphi^*(i, M, m); \quad (1.36)$$

- ДНПФ дискретного элемента

$$D_{\psi\varphi}(h, i, L, t) = \sum_{l=0}^{L-1} \psi^*(h, L, l) \varphi(i, t, \theta_l); \quad (1.37)$$

- ДНПФ экстраполирующего звена нулевого порядка

$$\mathcal{E}_{\psi\varphi}^0(h, i, t, M) = \sum_{m=0}^{M-1} \varphi^*(i, M, m) \int_{\tau_m-0}^{\tau_{m+1}-0} \psi^*(h, t, \theta) d\theta. \quad (1.38)$$

Получение ДНПФ нестационарной непрерывно-дискретной системы связано с определением ДНПФ линейных звеньев и их соединений (параллельного, последовательного и с обратной связью). ДНПФ таких соединений рассчитываются по ДНПФ звеньев их составляющих по формулам:

- для параллельного соединения

$$W = W_1 + W_2; \quad (1.39)$$

- для последовательного соединения

$$W = W_2 \cdot W_1; \quad (1.40)$$

- для соединения с обратной связью

$$W = [E + W_1 W_2]^{-1} W_1 = W_1 [E + W_2 W_1]^{-1}. \quad (1.41)$$

Связи вход-выход по ДНПФ искомой системы и заданным входным НСХ и НСП при нулевых начальных условиях устанавливаются соотношениями:

- для детерминированных сигналов

$$X_{\psi} = W_{\psi\varphi^*} \cdot G_{\psi}, \quad (1.42)$$

- для случайных сигналов:

по математическому ожиданию

$$^1 S_x = W_{\psi\varphi^*} \cdot ^1 S_g, \quad (1.43)$$

по корреляционной функции

$$S_x = W_{\psi\varphi^*} \cdot S_g \cdot W_{\psi\varphi^*}^T; \quad S_{xg} = W_{\psi\psi^*} \cdot S_g. \quad (1.44)$$

Обращение НСХ (1.42) – (1.44) проводится по соотношениям (1.13) и (1.14), а НПФ по формулам

$$k = \Phi_{\psi} \cdot N_{\varphi} = H_{\varphi} \cdot \Psi_{\psi}^T = \Phi_{\psi\varphi^*} \cdot W_{\psi\varphi^*}^T. \quad (1.45)$$

Формулы связи ДНПФ линейной системы с ее одномерными НПФ имеют вид:

$$W_{\psi\varphi^*} = (\Psi_{\psi}^+, H_{\varphi}); \quad W_{\psi\varphi^*} = (N_{\varphi}, \Phi_{\psi}); \quad (1.46)$$

$$N_{\varphi} = W_{\psi\varphi^*} \Psi_{\psi}^+; \quad H_{\varphi} = \Phi_{\psi} W_{\psi\varphi^*}. \quad (1.47)$$

В формулах (1.45) - (1.47) Ψ и Φ матрицы-строки, составленные из систем базисных функций $\{\psi(i)\}$ и $\{\varphi(i)\}$.

ДНПФ непрерывной и Н-Н непрерывно-дискретной системы представляется бесконечной матрицей, ДНПФ дискретной и Д-Д непрерывно-дискретной системы – конечной прямоугольной матрицей порядка $L \times M$, а ДНПФ Д-Н и Н-Д непрерывно-дискретной системы полубесконечными матрицами.

2. Разработка пакета расширения СКМ Mathcad анализа нестационарных линейных непрерывно-дискретных систем управления в биортонормированных вейвлет-базисах на отрезке [0, t]

2.1. Пакет MLSY_SM СКМ Mathcad для биортонормированных базисов, его структура и способы работы с ним

В спектральной области всем элементарным операциям (1.1)-(1.47) ставится в соответствие система элементарных алгоритмов. На базе этой системы строится система алгоритмов исследования.

В настоящее время разработано несколько версий пакета прикладных программ анализа и параметрического синтеза систем управления спектральным методом [3, 8-10]. Одна из них создана на базе СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab [8]. Эта версия включает в себя все элементарные операции спектрального метода и предназначена для моделирования линейных систем управления спектральным методом (MLSY_SM).

Модификация пакета прикладных программ MLSY_SM [8], созданного на базе СКМ Mathcad [11], за счет его пополнения процедурами элементарных операций в базисах непрерывных и дискретных биортонормированных вейвлет-функций, отражена в приложении 1.

Имя программного модуля формируется теперь из расширенной системы идентификаторов. Для базисной биортонормированной системы используются следующие идентификаторы: L - непрерывные биортонормированные системы функций; M - дискретные биортонормированные системы функций.

Библиотека **NBF** пополнена разделом **SM_L**, библиотека **DBF** пополнена разделом **SM_M**, а библиотека **NDBF** разделом **SM_LM**.

Перейдем теперь к рассмотрению реализации элементарных вейвлет-операций и элементарных операций спектрального метода в базисах непрерывных и дискретных биортонормированных функций.

2.2. Биортонормированные вейвлет-базисы, заданные на конечных интервалах времени

2.2.1. Биортонормированные вейвлеты

Для описания нестационарных систем управления, заданных на конечных интервалах времени, можно использовать не только ортонормированные вейвлет-базисы [1-3, 7], но и биортонормированные вейвлет-базисы. В основе построения таких базисов лежат биортонормированные вейвлеты, построение которых рассмотрено в работах [4-6].

Биортонормированные вейвлеты – это две пары функций $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ и $\tilde{\varphi}(\tau)$, $\tilde{\psi}(\tau)$ принадлежащие $L^2(R)$, такие, что функции $\varphi_{j,k}(\tau) = 2^{j/2} \varphi(2^j \tau - k)$,

$\psi_{j,k}(\tau) = 2^{j/2} \psi(2^j \tau - k)$ порождают базисы пространств V_j , W_j при разложении

$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, а $\tilde{\varphi}_{j,k}(\tau)$, $\tilde{\psi}_{j,k}(\tau)$ образуют дуальные базисы пространств \tilde{V}_j , \tilde{W}_j при

разложении $\tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j$, т.е

$$\begin{cases} (\varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,m}) = \delta_{k,m}, j, k, m \in Z; & (\varphi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,m}) = 0, & j, k, m \in Z; \\ (\psi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,m}) = 0, & j, k, m \in Z; & (\psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m}) = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, j, k, l, m \in Z. \end{cases} \quad (2.1)$$

Для биортонормированных вейвлетов возникают две цепочки кратномасштабного анализа $\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$, $\dots \subset \tilde{V}_{-2} \subset \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_1 \subset \tilde{V}_2 \subset \dots$, а из (2.1) вытекает $W_j \perp \tilde{V}_j$, $\tilde{W}_j \perp V_j$.

2.2.2. Непрерывные и дискретные биортонормированные вейвлет-базисы на отрезке $[0, t]$

В работе И. Добеши [4] предложен способ построения ортонормированного базиса вейвлетов на конечном интервале с использованием теории кратномасштабного анализа из обычных вейвлет-функций $\psi_{n,k}(\tau)$, образующих ортонормированный базис в $L^2(R)$. Этот способ также пригоден и для построения базиса биортогональных вейвлетов в $L^2[0, t]$.

Для данного кратномасштабного анализа с масштабирующими функциями φ , $\tilde{\varphi}$ и материнскими вейвлетами ψ , $\tilde{\psi}$ имеющими компактный носитель длины $N\psi$, можно построить периодизированные масштабирующие функции φ^n , $\tilde{\varphi}^n$ и периодизированные вейвлеты ψ^n , $\tilde{\psi}^n$. Тогда кратномасштабное приближение с использованием периодизированных вейвлетов, осуществляется по двум цепочкам кратномасштабных пространств $V_0^n \subset V_1^n \subset V_2^n \subset \dots$ и $\tilde{V}_0^n \subset \tilde{V}_1^n \subset \tilde{V}_2^n \subset \dots$ с последующими ортогональными дополнениями W_j^n ($V_{j+1}^n = V_j^n \oplus W_j^n$, $j = 0, 1, 2, \dots$) и \tilde{W}_j^n ($\tilde{V}_{j+1}^n = \tilde{V}_j^n \oplus \tilde{W}_j^n$, $j = 0, 1, 2, \dots$), где $W_j^n \perp \tilde{V}_j^n$, $\tilde{W}_j^n \perp V_j^n$. При этом в пространстве $L^2[0, t]$ образуется биортонормированный базис $\{g_h, \tilde{g}_h\}$, где

$$g_h(t, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{при } h = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{l=0}^{N\psi-1} \psi_{n,k}(\theta + l \cdot t) & \text{при } h = 2^n + k, n = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\tilde{g}_h(t, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{при } h = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{l=0}^{N\psi-1} \tilde{\psi}_{n,k}(\theta + l \cdot t) & \text{при } h = 2^n + k, n = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

По этим непрерывным биортонормированным системам базисных функций можно построить [8] вейвлеты дискретной переменной, образующие на системе тактовых точек

$\tau_p = \frac{p}{L} + \frac{\alpha}{L}$, $p = 0, 1, \dots, L-1$; $L = 2, 4, 8, \dots$, $\alpha \in [0, 1]$ биортонормированный базис $\{g_h, \tilde{g}_h\}$ в $L^2[0, L-1]$, где

$$\mathbf{g}_h^*(L, p) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}} \text{ при } h = 0, p = 0, 1, \dots, L-1; \\ \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=0}^{N_{\psi}-1} \psi_{n,k}(p + \alpha + l \cdot L) \text{ при } L = 2^\gamma; \gamma = 1, 2, \dots; \\ h = 2^n + k = 1, 2, \dots, L-1; n = 0, 1, 2, \dots, \gamma-1; \\ k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1; p = 0, 1, \dots, L-1, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_h^*(L, p) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}} \text{ при } h = 0, p = 0, 1, \dots, L-1; \\ \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{l=0}^{N_{\tilde{\psi}}-1} \tilde{\psi}_{n,k}(p + \alpha + l \cdot L) \text{ при } L = 2^\gamma; \gamma = 1, 2, \dots; \\ h = 2^n + k = 1, 2, \dots, L-1; n = 0, 1, 2, \dots, \gamma-1; \\ k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1; p = 0, 1, \dots, L-1. \end{cases} \quad (2.5)$$

2.3. Алгоритм построения непрерывных биортогональных вейвлетов на основе В-сплайнов и его программная реализация

2.3.1. Рекуррентный алгоритм вычисления масштабирующих функций и его программная реализация

Существуют различные способы вычисления масштабирующих функций [4-6]. Они основаны на итерациях уравнения

$$\varphi(\tau) = \sqrt{2} \sum_{k \in Z} p_k^\varphi \varphi(2\tau - k). \quad (2.6)$$

Будем считать, что коэффициенты p_k^φ фильтров в (2.6), известны и носитель функции $\varphi(\tau)$ компактный и лежит на промежутке $[0, N\varphi]$, где $N\varphi$ - длина носителя масштабирующей функции φ . В этом случае масштабирующее уравнение (2.6) принимает вид конечной суммы

$$\varphi(\tau) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N\varphi} p_k^\varphi \varphi(2\tau - k). \quad (2.7)$$

Рассмотрим один из способов вычисления $\varphi(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\tau)$ [5] из масштабирующего уравнения (2.7) по рекуррентной схеме

$$\varphi_n(\tau) = \sum_{k=0}^{N_\phi} p_k^\phi \varphi_{n-1}(2\tau - k), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

где функция $\varphi_0(\tau)$ выбрана как линейный В-сплайн.

Заметим, что если известны значения $\varphi(1), \dots, \varphi(N\varphi - 1)$, то, так как $\varphi(k) = 0$ для всех $k \leq 0$ или $k \geq N\varphi$, соотношения $\varphi\left(\frac{k}{2}\right) = \sum_l p_l^\varphi \varphi(k-l)$, $\varphi\left(\frac{k}{2^2}\right) = \sum_l p_l^\varphi \varphi\left(\frac{k}{2} - l\right), \dots$

единственным образом определяют все значения $\varphi(\tau)$ в диадических рациональных точках $\tau = k/2^j$, $j, k \in Z$.

Для определения значений $\varphi(k)$, $k \in Z$ из (2.7) с целыми τ имеем

$$u = P \cdot u, \quad (2.9)$$

где u - вектор-столбец $u = [\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(N\varphi - 1)]^T$ и $P = \|p_{i,j}\|$ - матрица порядка $(N\varphi - 1) \times (N\varphi - 1)$, а $p_{i,j} = p_{2^i - j + 1}^\varphi$. Поэтому значения $\varphi(k)$, $k \in Z$ определим, найдя собственный вектор матрицы P соответствующий собственному значению 1 при условии нормировки $\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(N\varphi - 1) = 1$.

После вычисления значений в целых точках можно по рекуррентной формуле (2.8) вычислить значения φ в диадических рациональных точках. Интерполяция этих значений приводит к последовательности функций аппроксимирующих φ .

Алгоритм вычисления масштабирующей функции в диадических рациональных точках включает следующие шаги:

- 1) Для любого $k \in Z$ имеем $\varphi\left(\frac{k}{2^{j_1}}\right) = \sum_i \varphi(k-i) a_i^{j_1}$.
- 2) Полагаем $J = 6, 7, 8, \dots$
- 3) Пусть задана последовательность $\{\varphi_0(k) \mid k \in Z\}$ для линейного В-сплайна, т.е. в (2.11) $j_1 = 0$ и $a_i^0 = \delta_{i,0}$. Полагаем $j_1 = 1$ и переходим к шагу 4.
- 4) Для $j = 0, 1, \dots, j_1 - 1$ вычисляем:
 - а) последовательность $\{b_i^j\}$, $i \in Z$, где $b_{2k}^j = a_k^j$ и $b_{2k+1}^j = 0$, $k \in Z$;
 - б) последовательность $\{a_i^{j+1}\}$, используя а) и формулу $a_i^{j+1} = \sum_k p_{i-k}^\varphi b_k^j$, $i \in Z$;
 - в) последовательность $\{\varphi(k/2^{j_1}) \mid k \in Z\}$, используя (2.9) и б) для $j = j_1 - 1$.
- 5) Если $j_1 < J$, то полагаем $j_1 = j_1 + 1$ и переходим к шагу 2, иначе алгоритм заканчивает свою работу.

Фрагмент программного модуля, реализующего этот алгоритм в СКМ Mathcad, показан на рис. 2.1.

```

Ka_phi_SP(J,pS,FS) := | N ← length(pS) - 1
                        |
                        |
                        | a0,N ← 1
                        | for j1 ∈ 1..J
                        |   for j ∈ 0..j1 - 1
                        |     for k ∈ 0.. N · 2J-1
                        |       | bj,2k+N ← aj,k+N
                        |       | bj,2k+1+N ← 0
                        |     for k ∈ 0.. N · 2J
                        |       aj+1,k+N ← √2 · ∑p=0N h0,p+N · bj,k-p+N
                        |
                        | for k ∈ 0.. N · 2J
                        |   A1,k+N ← ∑p=0N F0,p+N · aJ,k-p+N
                        |
                        | for k ∈ 0.. N · 2J
                        |   | A10,k ←  $\frac{k}{2^J}$ 
                        |   | A11,k ← A1,k+N
                        |   A1

```

Рис. 2.1.

Параметр J , передаваемый в программу, задает число итераций рекуррентного алгоритма. Параметр pS - идентификатор для матрицы-столбца, которая содержит коэффициенты p_k^φ вейвлет-фильтра с компактным носителем. FS - идентификатор вектора, который содержит значения масштабирующей функции в целочисленных точках ее носителя и дополненный по краям нулями. Длина вектора FS совпадает с длиной вектора pS .

Выходными данными этой программы является матрица, содержащая масштабирующую функцию $\varphi\left(\frac{k}{2^J}\right)$, $k = 0, 1, \dots, N\varphi \cdot 2^J$.

2.3.2. Алгоритм вычисления материнского вейвлета и его программная реализация

Если масштабирующая функция и коэффициенты q_k вейвлет-фильтров уже известны, то материнский вейвлет строится по формуле

$$\psi(\tau) = \sqrt{2} \sum_k q_k \varphi(2\tau - k) \quad (2.10),$$

а ее программная реализация обеспечивает вычисление значений ψ на системе заданных диадических точек.

Программный модуль, реализующий этот алгоритм в СКМ Mathcad, показан на рис.

2.2.

```

psi_SP(J, phi, qS, Npsi) :=
  N ← length(qS)
  for i ∈ 0.. N - 1
    hi,0 ← qSi,0
  for i ∈ 0.. N - 1
    for j ∈ 0.. N · 2J+1
      Ai,j ← 0
  for k ∈ 0.. cols(phi) - 1
    for p ∈ 0.. N - 1
      Ap,p·2J+k ← phi1,k
  for k ∈ 0.. Npsi · 2J+1
    A20,k ←  $\frac{k}{2^{J+1}}$ 
    A21,k ←  $\sqrt{2} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} h_{n,0} \cdot A_{N-n-1,k}$ 
  A2
  
```

Рис. 2.2

Параметр J, передаваемый в программу, совпадает с числом итераций рекуррентного алгоритма, а также определяет размерность формируемой матрицы A2. Первая строка этой матрицы заполнена диадическими рациональными точками, заданными на отрезке $[0, N\psi]$, а вторая значениями ψ в этих точках. phi - идентификатор матрицы, которая содержит масштабирующую функцию $\varphi\left(\frac{k}{2^J}\right)$, $k = 0, 1, \dots, N\varphi \cdot 2^J$. Параметр qS - идентификатор матрицы-столбца, который содержит коэффициенты вейвлет-фильтра с компактными носителями [4].

2.3.3. Непрерывные биортогональные вейвлеты с компактными носителями и примеры их вычисления

Биортогональные материнские вейвлеты ψ , $\tilde{\psi}$ с компактными носителями выражаются через заданные для них масштабирующие функции φ , $\tilde{\varphi}$ и коэффициенты h_k , \tilde{h}_k вейвлет-фильтров по формулам

$$\begin{aligned}\psi(\tau) &= \sqrt{2} \sum_k (-1)^k \tilde{h}_{1-k} \varphi(2\tau - k); \\ \tilde{\psi}(\tau) &= \sqrt{2} \sum_k (-1)^k h_{1-k} \tilde{\varphi}(2\tau - k)\end{aligned}\quad (2.11)$$

Методы вычисления коэффициентов h_k , \tilde{h}_k вейвлет-фильтров рассмотрены в работах [4-6], а в книге Добеши [4] приводятся таблицы вычисленных значений коэффициентов фильтров биортогональных вейвлетов на основе В-сплайнов. Все эти коэффициенты содержатся в базе данных SM-LM пакета расширения MLSY_SM. Эта база данных содержит также программные модули вычисления масштабирующих функций и материнских вейвлетов. Для формирования масштабирующих функций и материнских вейвлетов разработана система идентификаторов характеристик биортогональных вейвлетов, построенных на основе В-сплайнов.

Пусть $M = 0, 1, 2, 3, \dots$ - порядок В-сплайна. Тогда $N = M + 2 = 2, 3, 4, \dots$ - число коэффициентов вейвлет-фильтра восстановления. Если N четное, то $k = 0, 2, 4, \dots$, если N нечетное, то $k = 1, 3, 5, \dots$. Учитывая эти обозначения, зададим имена идентификаторов, которые определяют характеристики элементарных вейвлет-операций:

- 1) $N\varphi B = N - 1$ - длина носителя масштабирующей функции (сплайна) восстановления;
- 2) $N\varphi R = N + 2k - 1$ - длина носителя масштабирующей функции разложения;
- 3) $N\psi = N + k - 1$ - длина носителя материнского вейвлета восстановления и разложения;
- 4) $hSR\varphi Mk$ - идентификатор вектора, который содержит коэффициенты фильтра масштабирующей функции разложения для сплайна порядка M и выбранного k ;
- 5) $hSR\psi M$ - идентификатор вектора, который содержит коэффициенты фильтра вейвлет-функции разложения для сплайна порядка M ;
- 6) $hSB\varphi M$ - идентификатор вектора, который содержит коэффициенты фильтра масштабирующей функции восстановления для сплайна порядка M ;
- 7) $hSB\varphi Mk$ - идентификатор вектора, который содержит коэффициенты фильтра вейвлет-функции восстановления для сплайна порядка M и выбранного k ;
- 8) FSM - идентификатор вектора, который содержит значения масштабирующей функции порядка M в целочисленных точках ее носителя и дополненный по краям нулями. Длина вектора FSM совпадает с длиной вектора $hSB\varphi M$;

9) $FSMk$ - идентификатор вектора, который содержит значения масштабирующей функции порядка M в целочисленных точках ее носителя и дополненный по краям нулями. Длина вектора $FSMk$ совпадает с длиной вектора $hSB\phi Mk$.

По коэффициентам вейвлет-фильтров В-сплайнов и программам формирования масштабирующих функций и материнских вейвлетов, которые хранятся в базе данных под именами $Ka_phi_SP(J, PS, FS)$ и $psi_SP(J, phi, qS, N\psi)$, вычисляем эти характеристики.

В этих программах: J - число итераций алгоритма вычисления масштабирующей функции В-вейвлета (сплайн-вейвлета) ($J \geq 8$); $pS := hSR\phi Mk$ или $pS := hSB\phi M$; $qS := hSR\psi M$ или $qS := hSR\psi Mk$; $FS := FSM$ или $FS := FSMk$; phi - идентификатор матрицы, которая содержит масштабирующую функцию.

Пример 2.1. Вычисление масштабирующих функций и материнских вейвлетов разложения и восстановления, построенных на базе линейного сплайна (первого порядка).

Вариант 1. Вычисление масштабирующей функции и материнского вейвлета разложения при $N = 3$; $k = 1$; $N\phi B = 2$; $N\phi R = 4$; $N\psi = 3$ (рис. 2.3).

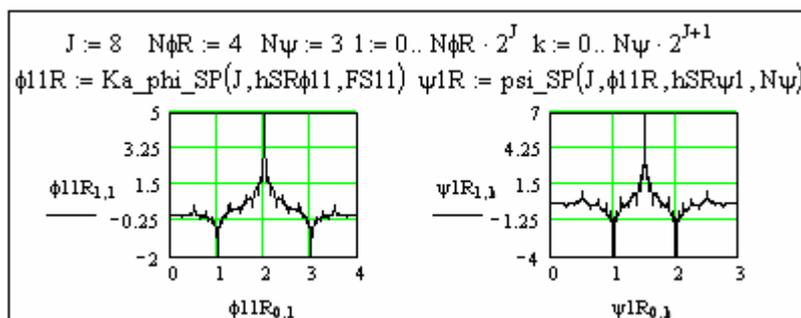


Рис. 2.3

Вычисление масштабирующей функции и материнского вейвлета восстановления при $N = 3$; $k = 1$; $N\phi B = 2$; $N\phi R = 4$; $N\psi = 3$ (рис. 2.4).

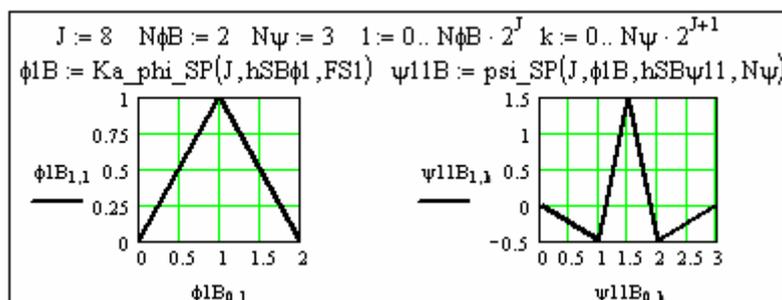


Рис.2.4

Вариант 2. Вычисление масштабирующей функции и материнского вейвлета разложения при $N = 3$; $k = 3$; $N\phi B = 2$; $N\phi R = 8$; $N\psi = 5$ (рис. 2.5).

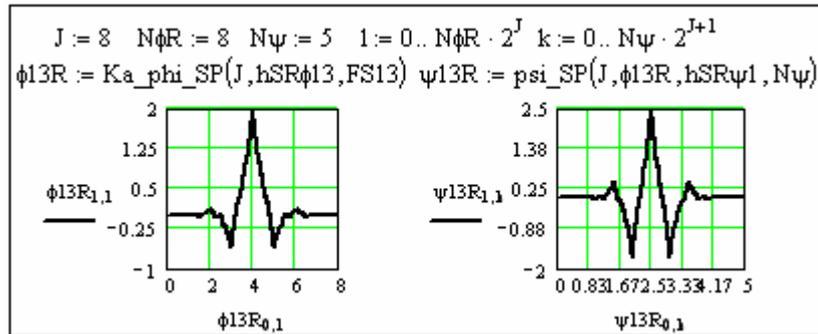


Рис.2.5

Вычисление масштабирующей функции и материнского вейвлета восстановления при $N = 3; k = 3; N\phi B = 2; N\phi R = 8; N\psi = 5$ (рис. 2.6).

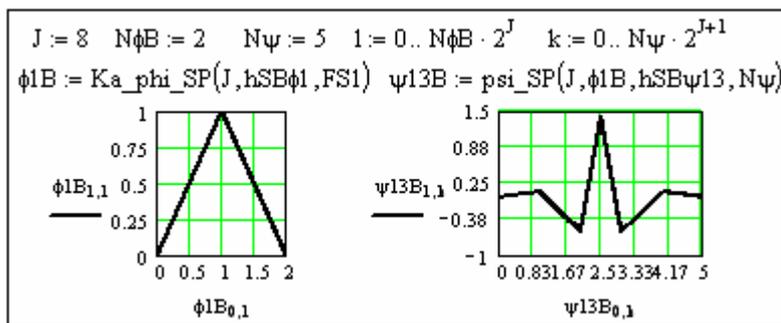


Рис.2.6

Вариант 3. Вычисление масштабирующей функции и материнского вейвлета разложения при $N = 3; k = 5; N\phi B = 2; N\phi R = 12; N\psi = 7$ (рис. 2.7).

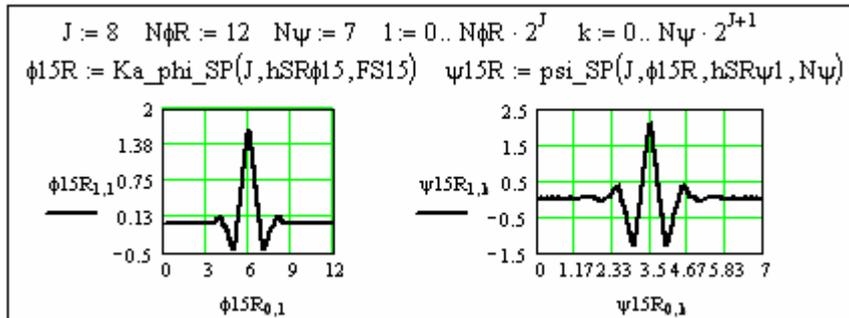


Рис. 2.7

Вычисление масштабирующей функции и материнского вейвлета восстановления при $N = 3; k = 5; N\phi B = 2; N\phi R = 12; N\psi = 7$ (рис. 2.8).

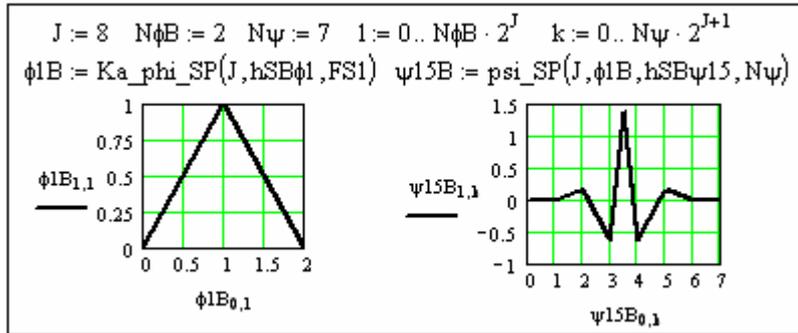


Рис. 2.8

2.3.4. Программный модуль вычисления базисной (j, n) -й непрерывной вейвлет-функции порядка m по данным материнского вейвлета порядка m с помощью линейной интерполяции.

Если материнский вейвлет ψ задан своими значениями в диадических рациональных точках, то для вычисления (j, n) -й вейвлет-функции $\psi_{j,n}(\tau) = 2^{j/2} \psi(2^j \tau - n)$ по $\psi(\tau)$ в произвольной точке τ при $j \geq 0$ и $n \in Z$ можно использовать алгоритм линейной интерполяции. Программный модуль, реализующий этот алгоритм для вычисления $\psi_{j,n}(\tau)$ в СКМ Mathcad, показан на рис. 2.9.

В программу передаются параметры: $x \in [0, N\psi]$ – точка, в которой вычисляется (j, n) -я базисная вейвлет-функция порядка m ; j – параметр сжатия ($j \geq 0$); n – параметр сдвига ($n \in Z$); t – параметр сжатия или растяжения носителя базисной функции порядка m ; psi – идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями ψ , вычисленными в этих точках.

```

WSPpsil(x,j,n,t,psi,Nψ) :=
| J ← 8
| for k ∈ 0.. Nψ · 2J+1
|   | A10,k ←  $\frac{k}{(2^{J+1} - 1) \cdot 2^j} + \frac{n}{2^j}$ 
|   | A11,k ← psi1,k
|   y ←  $\frac{x}{t}$ 
|   psil ← 0
|   for k ∈ 0.. Nψ · 2J+1 - 1
|     | AA ← A11,k +  $\frac{(A1_{1,k+1} - A1_{1,k})}{A1_{0,k+1} - A1_{0,k}} \cdot (y - A1_{0,k})$ 
|     | psil ← AA if  $\frac{k}{(2^{J+1} - 1) \cdot 2^j} + \frac{n}{2^j} \leq y \leq \frac{k+1}{(2^{J+1} - 1) \cdot 2^j} + \frac{n}{2^j}$ 
|     psil ←  $\left(\frac{2^j}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot psil$ 
|   psil

```

Рис. 2.9

2.4. Общие алгоритмы вычисления непрерывных и дискретных базисных биортонормированных функций и их программная реализация.

Если материнский вейвлет $\psi(\tau)$ уже известен, то базис непрерывных биортонормированных функций, заданных на отрезке $[0, t]$, строится по формуле (2.2) и (2.3).

Программный модуль, реализующий этот алгоритм в СКМ Mathcad, показан на рис. 2.10. В программу передаются следующие параметры: p - номер базисной функции; $\theta \in [0, t]$ - точка, в которой вычисляется базисная функция; psi - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями ψ , вычисленными в этих точках.

```

SNBLL1(p,θ,t,psi,Nψ) :=
|
| m ← 0
|
| m ← (1/t)1/2 if 0 ≤ θ ≤ t if p = 0
|
| if p > 0
|   | n ← floor(log(p)/log(2))
|   | for n1 ∈ 0..n
|   |   | for k ∈ 0..2n1 - 1
|   |     | i ← 2n1 + k
|   |     | m ← ( ∑k1=0Nψ-1 WSPpsi(θ + k1 · t, n1, k, t, psi, Nψ) ) if m = 0 if i = p
|   |
| m

```

Рис. 2.10

На рис. 2.11 приведены первые восемь базисных функций восстановления Вейвлетов порядка 1, построенные по результатам работы этой программы.

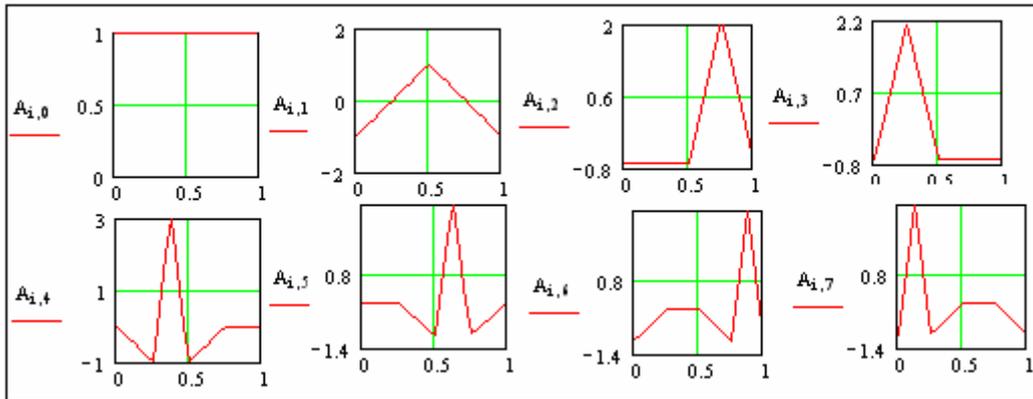


Рис. 2.11.

Другой вариант программного модуля, реализующий этот алгоритм, вызывается командой $SNBLL2(L1, L, t, psi, M)$. Он вычисляет L непрерывные базисные биортонормированных функции на отрезке $[0, t]$ на системе тактовых точек $\frac{tl}{L1}$, где $l = 0, 1, \dots, L1$.

Если материнский вейвлет $\psi(\tau)$ известен, то базис дискретных биортонормированных функций строится по формулам (2.4) и (2.5).

Программный модуль, реализующий этот алгоритм, показан на рис. 2.12. В программу передаются следующие параметры: p - номер базисной функции; $l \in [0, L1 - 1]$ - точка, в которой вычисляется базисная функция; psi - идентификатор матрицы, первая

строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями ψ , вычисленными в этих точках.

На рис. 2.13 приведены первые восемь биортонормированных базисных функций восстановления 1-го порядка, построенные по результатам работы этой программы.

Другой вариант программного модуля, реализующий этот алгоритм, вызывается командой $SDBMM2(L1, L, psi, M)$. Он вычисляет $L = 2, 4, 8, \dots$ дискретных биортогональные функции на отрезке $[0, L1-1]$ на системе тактовых точек $l = 0, 1, \dots, L1-1$, где $L1 = 2, 4, 8, \dots$ ($L \leq L1$).

```

SDBMM1(p,1,L1,psi,Nψ) :=
|
| Z ← 0.197
| m ← 0
| m ← 1/√L1 if 0 ≤ l ≤ L1 - 1 if p = 0
| if p > 0
|   n ← floor(log(p)/log(2))
|   for n1 ∈ 0..n
|     for k ∈ 0..2n1 - 1
|       i ← 2n1 + k
|       θ ← 1 + Z
|       m ← ∑k1=0Nψ-1 WSPpsi(θ + k1 · L1, n1, k, L1, psi, Nψ) if m = 0 if i = p
| m

```

Рис. 2.12

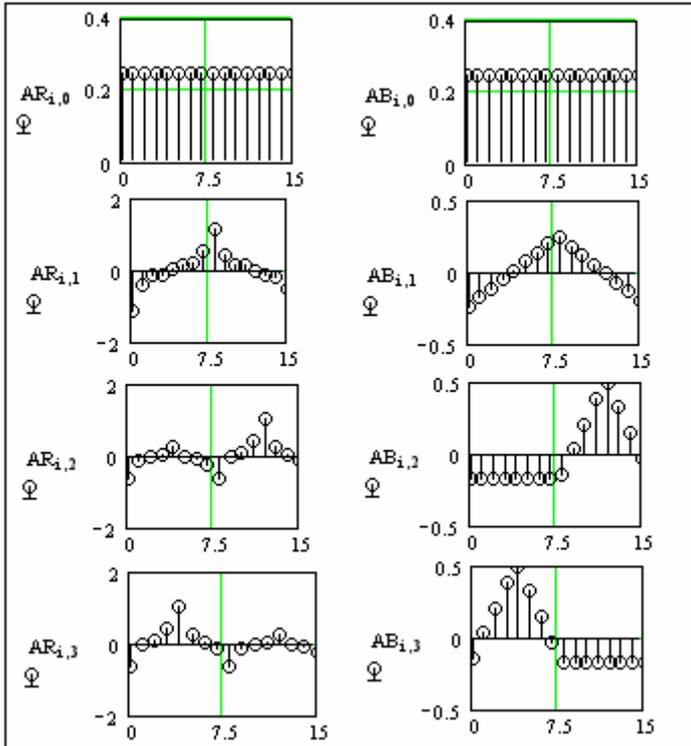


Рис. 2.13.

2.5. Общие алгоритмы вычисления НСХ непрерывных и дискретных биортонормированных функций и их программная реализация.

Общие алгоритмы вычисления НСХ биортонормированных непрерывных и дискретных функций описываются формулами (1.3) - (1.6).

Рассмотрим программную реализацию формул (1.3) и (1.4).

Программный модуль, вычисляющий усеченную НСХ по таблично заданной функции на интервале работы системы управления $[0, t]$ и по методу наименьших квадратов [3], показан на рис. 2.14.

```

SNXLL1(g, N1, L, t, psiB, Npsi) :=
  for 1 ∈ 0..L
  |
  | τ ←  $\frac{1 \cdot t}{L}$ 
  | for j ∈ 0..N1 - 1
  | | CB1,j ← SNBLL1(j, τ, t, psiB, Npsi)
  | | gr1 ← gr
  X ← (CBT · CB)-1 · CBT · gr
  X
  
```

Рис.2.14

В программу передаются следующие параметры: g - таблично заданная функция на системе равноотстоящих точек (первая точка совпадает с началом, а последняя с концом интервала работы системы управления $[0, t]$), по которой вычисляется НСХ входного

сигнала системы управления; $N1$ - порядок усечения НСХ; $L + 1$ - количество значений таблично заданной функции; $psiB$ - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями материнского вейвлета восстановления ψ , вычисленными в этих точках; $N\psi$ - длина носителя материнского вейвлета восстановления и разложения.

Другой вариант программного модуля, реализующий этот алгоритм, вызывается командой $SNXLL2(g, N1, t, psi, N\psi)$. Он вычисляет усеченную НСХ порядка $N1$ по аналитически заданной на интервале работы системы управления $[0, t]$ с использованием квадратурной формулы Гаусса. psi - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями ψ , вычисленными в этих точках; $N\psi$ - длина носителя материнского вейвлета восстановления и разложения.

Рассмотрим теперь программную реализацию формул (1.5) и (1.6).

Программный модуль, вычисляющий усеченную НСХ дискретной функции на интервале работы системы управления $[0, t]$ по методу наименьших квадратов, показан на рис. 2.15.

В программу передаются следующие параметры: g - дискретная функция, заданная на системе равноотстоящих точек $\frac{l}{L}, l = 0, 1, \dots, L - 1$, по которой вычисляется НСХ входного сигнала системы управления; $N1$ - порядок усечения НСХ; L - количество значений дискретной функции ($L \geq N1$); $psiB$ - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями материнского вейвлета восстановления ψ , вычисленными в этих точках; $N\psi$ - длина носителя материнского вейвлета восстановления и разложения.

$$\begin{array}{l}
 \boxed{SNXMM2(g, N1, L, psiB, N\psi) :=} \\
 \begin{array}{l}
 \text{for } l \in 0..L-1 \\
 \quad \tau \leftarrow 1 \cdot \frac{1}{L-1} \\
 \quad \text{for } j \in 0..N1-1 \\
 \quad \quad C_{1,j} \leftarrow SDBMM1(j, 1, L, psiB, N\psi) \\
 X \leftarrow (C^T \cdot C)^{-1} \cdot C^T \cdot g \\
 X
 \end{array}
 \end{array}$$

Рис. 2.15

Другой вариант программного модуля, реализующий этот алгоритм, вызывается командой $SNXMM1(g, N1, L, psi, N\psi)$. Он вычисляет усеченную НСХ порядка $N1$ по аналитически заданной дискретной функции g на системе равноотстоящих точек

$\frac{l}{L}, l = 0, 1, \dots, L-1 (L \geq N1)$, на интервале $[0, L-1]$. psi - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями ψ , вычисленными в этих точках; $N\psi$ - длина носителя материнского вейвлета восстановления и разложения.

2.6. Общие алгоритмы вычисления НСП непрерывных и дискретных функций в биортогональном базисе и их программная реализация.

Общий алгоритм вычисления НСП (1.16) в биортогональном базисе раскрывается для непрерывной функции времени как

$$S_x^*(h, i, t, t) = \int_0^t \psi^*(h, t, \theta) \int_0^t \psi(i, t, \tau) R_{xx}(\theta, \tau) d\tau d\theta, \quad (2.12)$$

а для дискретной как

$$S_x^*(h, i, t, t) = \sum_{l=0}^{L-1} \psi^*(h, L, l) \sum_{m=0}^{L-1} \psi(i, L, m) R_{xx}(l, m). \quad (2.13)$$

Рассмотрим программный модуль, реализующий формулу (2.12) и вычисляющий усеченную НСП непрерывной функции на интервале работы системы управления $[0, t]$ по методу наименьших квадратов [3]. Он показан на рис. 2.16.

В программу передаются следующие параметры: R - матрица порядка $(L3 + 1) \times (L3 + 1)$ таблично заданной корреляционной функции на системе равноотстоящих точек, по которой вычисляется НСП входного сигнала системы управления; $N1$ - порядок усечения НСП; $psiB$ - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями материнского вейвлета восстановления ψ , вычисленными в этих точках; $N\psi$ - длина носителя материнского вейвлета восстановления и разложения.

Другой вариант программного модуля, реализующий этот алгоритм с использованием квадратурной формулы Гаусса, вызывается командой $SNCLL1(R, N1, t, psiR, N\psi)$ и вычисляет усеченную НСП входного сигнала системы управления порядка $N1 \times N1$ по аналитически заданной корреляционной функции. $psiR$ - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями материнского вейвлета разложения ψ , вычисленными в этих точках; $N\psi$ - длина носителя материнского вейвлета восстановления и разложения.

Рассмотрим теперь один вариант программной реализации формулы (2.13).

Программный модуль, вычисляющий усеченную НСП дискретной функции на интервале $[0, L - 1]$, показан на рис. 2.17.

```

SNCDDL2(R, N1, L3, t, psiB, Nψ) :=
  for l ∈ 0..L3
    for m ∈ 0..L3
      θ1 ← 1 ·  $\frac{t}{L3}$ 
      τm ← m ·  $\frac{t}{L3}$ 
      Rl,m ← R(θ1, τm)
    for i ∈ 0..L3
      for j ∈ 0..N1 - 1
        θ ← 1 ·  $\frac{t}{L3}$ 
        pl,i ← SNBLL1(i, θ, t, psiB, Nψ)
      NSP ← (pT · p)-1 · pT · Rl · p · (pT · p)-1
    NSP
  
```

Рис.2.16

```

SNCMM1(R1, N1, L1, psi, Nψ) :=
  for l ∈ 0..L1 - 1
    for i ∈ 0..N1 - 1
      Rl,i ← SDBMM1(i, l, L1, psi, Nψ)
    for h ∈ 0..N1 - 1
      for i ∈ 0..N1 - 1
        NSPh,i ←  $\sum_{p=0}^{L1-1} \sum_{k=0}^{L1-1} R1(k,p) \cdot R_{k,h} \cdot R_{p,i}$ 
      NSP
  
```

Рис. 2.17

В программу передаются следующие параметры: $R1$ - дискретная корреляционная функция, заданная на системе равноотстоящих точек $\frac{l}{L1}$, $l = 0, 1, \dots, L1 - 1$, по которой вычисляется НСП входного сигнала системы управления; $N1$ - порядок усечения НСП ($L1 \geq N1$); psi - идентификатор матрицы, первая строка которой заполнена диадическими рациональными точками, а вторая – значениями материнского вейвлета ψ , вычисленными в этих точках; $N\psi$ - длина носителя материнского вейвлета восстановления и разложения.

2.7. Общие алгоритмы вычисления ДНПФ элементарных и типовых звеньев непрерывно-дискретных систем в биортогональных базисах и их программная реализация.

Системными характеристиками нестационарных непрерывно-дискретных систем являются нестационарные передаточные функции (1.18) – (1.21). Эти общие алгоритмы позволяют по известным ИПФ элементарных и типовых звеньев найти ДНПФ этих звеньев.

Рассмотрим только вариант программной реализации формулы (1.18) для колебательного звена, заданного своей ИПФ.

Программный модуль, вычисляющий усеченную ДНПФ колебательного звена по ИПФ на интервале работы системы управления $[0, t]$ с использованием квадратурной формулы Гаусса, показан на рис. 2.18.

В программу передаются следующие параметры: IPF - аналитически заданная ИПФ колебательного звена на интервале работы системы управления $[0, t]$, по которой вычисляется ДНПФ непрерывной системы управления; $N1$ - порядок усечения ДНПФ; T - постоянная времени колебательного звена; ξ - коэффициент демпфирования колебательного звена; $psiR$ и $psiB$ - идентификаторы матриц, первые строки которых заполнены диадическими рациональными точками, а вторые – значениями материнского вейвлета разложения и восстановления, вычисленными в этих точках; $N\psi$ - длина носителя материнского вейвлета разложения и восстановления.

```

SDNPFLL1(IPF, N1, T, ξ, t, psiR, psiB, Nψ) :=
:=
ω ← ω1
α ← α1
m ← 2
for v ∈ 0..m · N1 - 1
  for k ∈ 0..8
    τk,v ← (2 · v + 1 + αk) ·  $\frac{t}{2 \cdot m \cdot N1}$ 
    λk ← ωk ·  $\frac{t}{2 \cdot m \cdot N1}$ 
    for j ∈ 0..N1 - 1
      C1k+9,v,j ← SNBLL1(j, τk,v, t, psiR, Nψ)
      C2k+9,v,j ← SNBLL1(j, τk,v, t, psiB, Nψ)
  for h ∈ 0..N1 - 1
    for i ∈ 0..N1 - 1
      A ← 0
      for s ∈ 0..m · N1 - 1
        for z ∈ 0..8
          for l ∈ 0..m · N1 - 1
            for k ∈ 0..8
              A ← A + λk · λz · IPF(τk,1 - τz,s, T, ξ) · C1k+9,1,h · C2z+9,s,i
      DNPFh,i ← A
DNPF

```

Рис. 2.18

Выходными данными этой программы является усеченная матрица ДНПФ колебательного звена. Эта матрица при помощи оператора WRITEPRN запоминается в базе данных и вызывается из неё специальной командой для ее дальнейшей обработки. Далее эта матрица передается в программный модуль (см. рис. 2. 19) для ее усечения до нужного размера $N1 \times N1$.

```

SKOLL1(N1, t, KO) :=
for i ∈ 0.. N1 - 1
  for j ∈ 0.. N1 - 1
    Ai,j ← t · KOi,j
A

```

Рис. 2.19

Усеченные матрицы ДНПФ элементарных звеньев непрерывно-дискретных систем могут быть найдены и по формулам (1.26) – (1.38).

В качестве примера рассмотрим только вариант программной реализации формулы (1.29).

```

SR1MM1(N1,L1,psiR,psiB,Nψ) :=
:= | for l ∈ 0..L1 - 1
    | for m ∈ 0..N1 - 1
    |   Q1l,m ← SDBMM1(m,1,L1,psiB,Nψ)
    |   Q2l,m ← SDBMM1(m,1,L1,psiR,Nψ)
    | for h ∈ 0..N1 - 1
    | for i ∈ 0..N1 - 1
    |   Ah,i ← Q20,h · Q10,i + ∑p=1L1-1 Q2p,h · (Q1p,i - Q1p-1,i)
    | A

```

Рис. 2.20

Программный модуль, вычисляющий усеченную ДНПФ разностного звена на дискретном отрезке $[0, L1-1]$, показан на рис. 2.20.

В программу передаются следующие параметры: $N1$ - порядок усечения ДНПФ; $psiR$ и $psiB$ - идентификаторы матриц, первые строки которых заполнены диадическими рациональными точками, а вторые – значениями материнского вейвлета разложения и восстановления, вычисленными в этих точках; $Nψ$ - длина носителя материнского вейвлета разложения и восстановления.

2.8. Примеры выполнения элементарных операций спектрального метода.

Для выполнения всех элементарных операций необходимо подсоединить базу данных SM-LM пакета расширения MLSY_SM в биортогональном вейвлет-базисе, построенном на основе линейных В-сплайнов, которая содержит программные модули для выполнения всех элементарных операций спектрального метода расчета непрерывно-дискретных систем управления.

- 1) Подсоединяем эту базу данных:

```

➔ Reference:C:\RVV\SM-MCD6\SM-LM\SM-LM.mcd

```

- 2) По коэффициентам вейвлет-фильтров линейных В-сплайнов вычисляем масштабирующие функции и материнские вейвлеты разложения и восстановления:

```

J := 8   NφR := 4   NφB := 2   Nψ := 3
φ11R := Ka_phi_SP(J,hSRφ11,FS11)  ψ1R := psi_SP(J,φ11R,hSRψ1,Nψ)
φ1B := Ka_phi_SP(J,hSBφ1,FS1)     ψ1B := psi_SP(J,φ1B,hSBψ11,Nψ)

```

Пример 2.2. Нужно вычислить усеченные матрицы НСХ заданных непрерывных и дискретных сигналов и выполнить операцию их обращения в область времени.

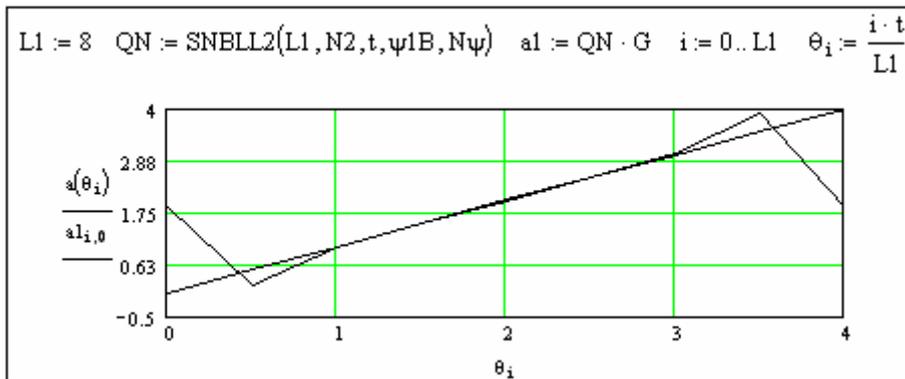
Решение.

1) Зададим непрерывную функцию и вычислим ее усеченную НСХ на отрезке $[0, t]$:

$$t := 4 \quad N2 := 8 \quad a(\theta) := \theta \quad G := \text{SNXLL2}(a, N2, t, \psi1R, N\psi)$$

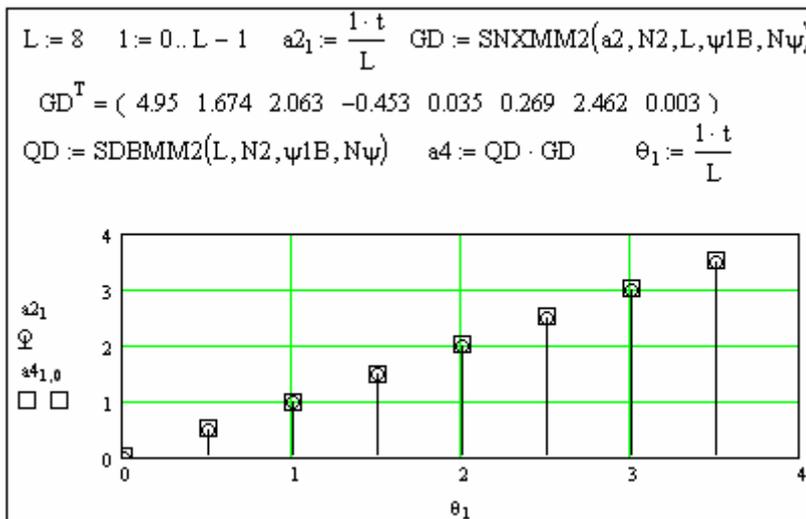
$$G^T = (4 \quad 0.174 \quad 1.019 \quad -0.897 \quad -0.004 \quad -0.006 \quad 0.743 \quad -0.633)$$

2) Вычислим систему непрерывных базисных функций (2.2) и выполним операцию обращения НСХ в область времени:



Из построенных графиков функций видно, что операция обращения соответствует восстановлению периодической функции с периодом равным t .

3) Зададим дискретную функцию и вычислим ее усеченную НСХ на отрезке $[0, t]$, систему дискретных базисных функций (2.5), а также выполним операцию обращения НСХ в область времени:



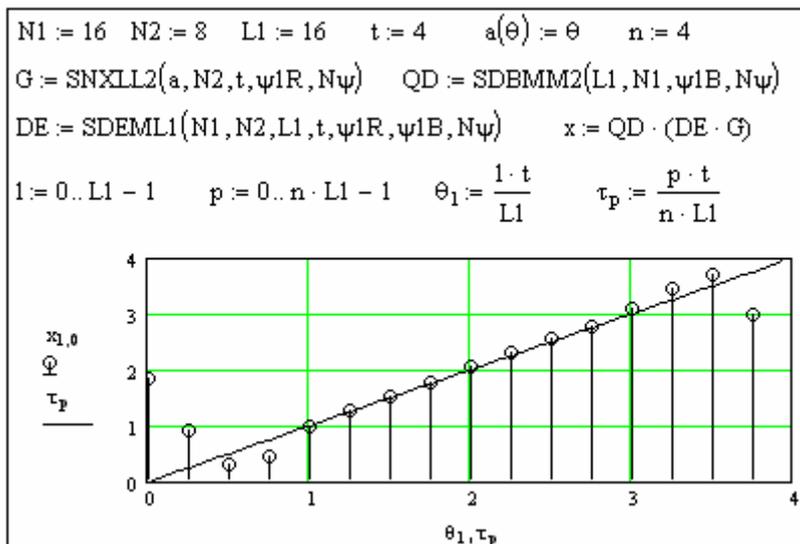
Пример 2.3. Нужно вычислить усеченные матрицы ДНПФ элементарных звеньев: дискретного усилительного звена (1.31), дискретного элемента (1.37), экстраполятора нулевого порядка (1.38).

Решение. Формируем программу вычисления усеченных матриц ДНПФ элементарных звеньев и вычисляем усеченные матрицы ДНПФ указанных элементарных звеньев.

$$\begin{array}{l}
 N1 := 2 \quad N2 := 4 \quad L1 := 2 \quad t := 4 \quad l := 0..L-1 \quad a(l) := \frac{1 \cdot t}{L} \\
 DE := SDEML1(N1, N2, L1, t, \psi1R, \psi1B, N\psi) \\
 E0 := SEOLM1(N2, N1, L1, t, \psi1R, \psi1B, N\psi) \\
 DE = \begin{pmatrix} 0.707 & 0.001 & -0.493 & -0.493 \\ -0.004 & 0.115 & 0.002 & 0.005 \end{pmatrix} \quad E0 = \begin{pmatrix} 1.414 & 0 \\ 0 & 0.108 \\ 0 & 0.509 \\ 0 & -0.509 \end{pmatrix} \\
 YZ := SYZMM1(a, N1, L1, \psi1R, \psi1B, N\psi) \quad YZ = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.128 \\ 0.04 & 0.02 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

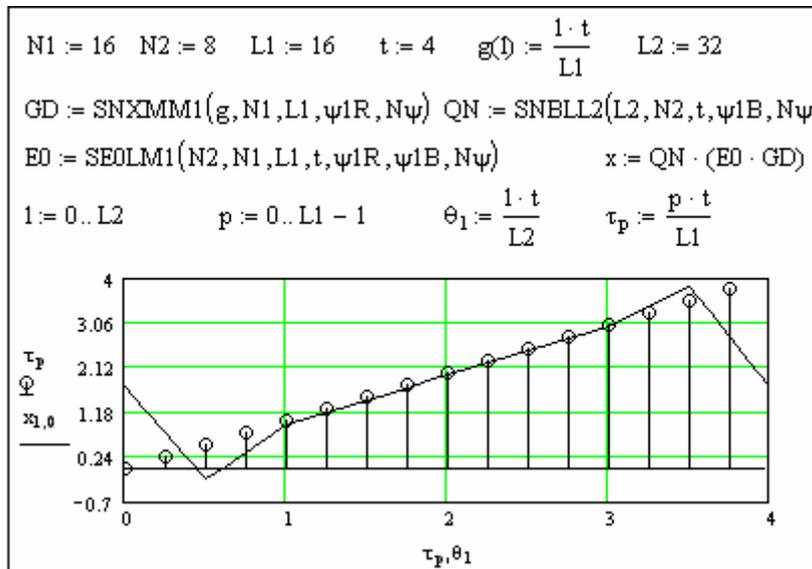
Пример 2.4. Пусть непрерывно-дискретная система выполняет операцию дискретизации сигнала, т.е. задается дискретным элементом (1.37) и пусть на вход этой системы поступает непрерывный детерминированный сигнал $g(\theta)$. Требуется найти НСХ выходного сигнала, сам дискретный сигнал и построить графики входного и выходного сигналов.

Решение. Формируем программу вычисления усеченных матриц НСХ входного сигнала, ДНПФ дискретного элемента, дискретных базисных функций, вычисления выходного дискретного сигнала и построения их графиков.



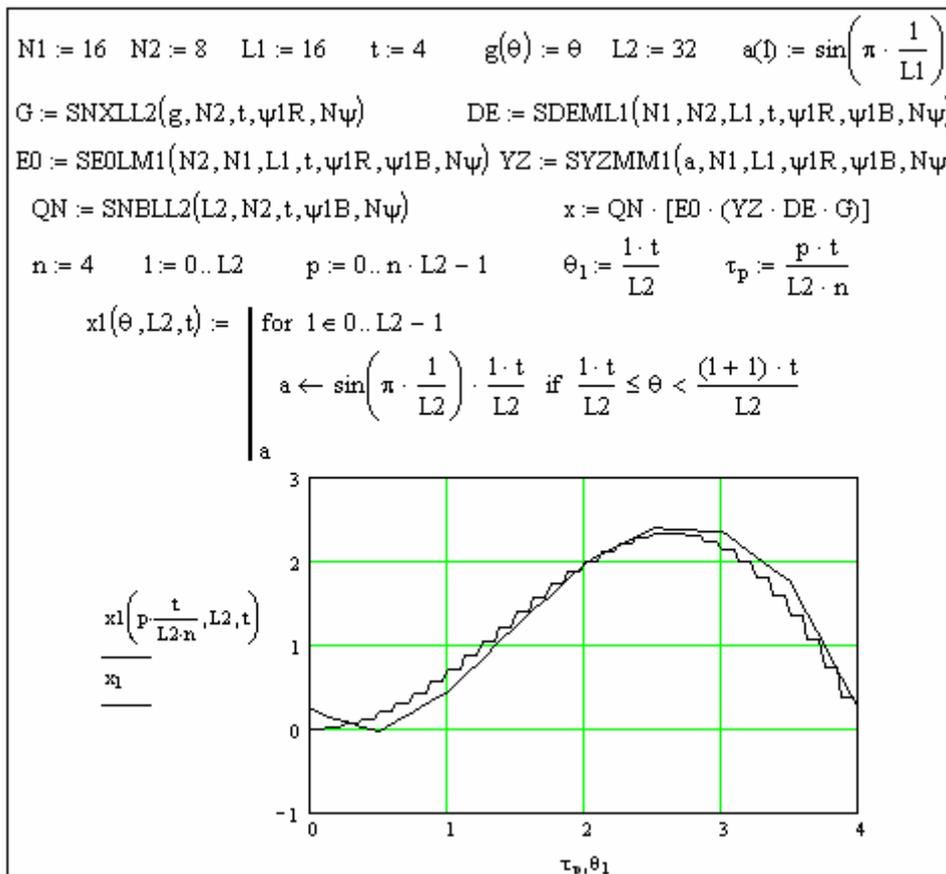
Пример 2.5. Пусть непрерывно-дискретная система выполняет операцию экстраполяции сигнала, т.е. задается экстраполирующим элементом нулевого порядка (1.38) и пусть на вход этой системы поступает дискретный детерминированный сигнал $g(l)$. Требуется найти НСХ выходного сигнала, сам непрерывный выходной сигнал и построить графики входного и выходного сигналов.

Решение. Формируем программу вычисления усеченных матриц НСХ входного сигнала, ДНПФ экстраполятора нулевого порядка, непрерывных базисных функций, выходного непрерывного сигнала и построения их графиков.



Пример 2.6. Пусть непрерывно-дискретная система есть последовательное соединение трех звеньев: дискретного элемента, дискретного усилительного звена и экстраполятора нулевого порядка. На вход этой системы поступает непрерывный детерминированный сигнал $g(\theta)$. Требуется найти непрерывный выходной сигнал спектральным методом и по аналитической формуле, а также построить их графики.

Решение. Формируем программу вычисления выходного непрерывного сигнала по усеченным матрицам НСХ входного непрерывного сигнала и ДНПФ последовательного соединения дискретного элемента, усилительного звена, экстраполятора нулевого порядка, а также программу вычисления выходного сигнала по аналитической формуле.



Приложение 1. Описание процедур элементарных операций спектрального метода в биортотгональном базисе.

Введем для биортонормированных базисных функций, заданных на конечном отрезке, следующие идентификаторы: L - непрерывные биортогональные функции; M - дискретные биортогональные функции.

1.1. Описание процедур непрерывных элементарных операций спектрального метода.

1) $SNBLL1(L1, L, t, psi, Nψ)$ - вычисляется матрица-строка L непрерывных биортонормированных БФ на отрезке $[0, t]$ на системе тактовых точек $(l - 1) t / L1$, где $l = 1, \dots, L1 + 1$. Результат представляется матрицей порядка $L1 \times L$.

2) $SNXLL1(g, N1, t, psi, Nψ)$ - вычисляется усеченная НСХ порядка $N1$ на отрезке $[0, t]$ по аналитически заданной непрерывной функции $g(x)$.

3) $SNCLL1(R, N1, t, psi, Nψ)$ - вычисляется усеченная матрица НСП порядка $N1 \times N1$ на отрезке $[0, t]$ по аналитически заданной непрерывной корреляционной функции $R(x, y)$.

4) $SI1LL1(t, L, psiR, psiB, Nψ)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ интегрирующего звена порядка $L \times L$ на отрезке $[0, t]$.

- 5) $SP1LL1(t, L, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ дифференцирующего звена порядка $L \times L$ на отрезке $[0, t]$.
- 6) $SM1LL1(t, L, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ звена начальных значений порядка $L \times L$ на отрезке $[0, t]$.
- 7) $SAPLL1(N1, T, k, t, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ аperiodического звена порядка $N1 \times N1$ на отрезке $[0, t]$. T - постоянная времени аperiodического звена. k - коэффициент усиления аperiodического звена.
- 8) $SKOLL1(N1, T, k1, k, t, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ аperiodического звена порядка $N1 \times N1$ на отрезке $[0, t]$. T - постоянная времени колебательного звена. k - коэффициент усиления колебательного звена. $k1$ - коэффициент демпфирования колебательного звена.
- 9) $SCDLL1(N1, T1, t, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ звена чистого сдвига порядка $N1 \times N1$ на отрезке $[0, t]$. $T1$ - величина чистого сдвига: если $T1 > 0$, то $T1$ - величина запаздывания, если $T1 < 0$, то $T1$ - величина упреждения.
- 10) $SYZLL1(g, N1, t, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ усилительного звена порядка $N1 \times N1$ на отрезке $[0, t]$ по аналитически заданной функции $g(x)$.
- 1.2. Описание процедур дискретных элементарных операций спектрального метода.
- 1) $SDBMM1(L1, L, psi, N\psi)$ - вычисляется матрица-строка L дискретных БФ на отрезке $[0, t]$ на системе тактовых точек $0, 1, \dots, L1 - 1$. Результат представляется матрицей порядка $L1 \times L$.
- 2) $SNXMM1(g, N1, L1, psi, N\psi)$ - вычисляется усеченная НСХ порядка $N1$ на отрезке $[0, t]$ по аналитически заданной дискретной функции g на системе равноотстоящих тактовых точек $lt / L1$, где $l = 0, 1, 2, \dots, L1 - 1$.
- 3) $SNCMM1(KF, N1, L1, psi, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица НСП порядка $N1 \times N1$ на системе равноотстоящих тактовых точек $lt / L1$, где $l = 0, 1, 2, \dots, L1 - 1$, отрезке $[0, t]$ по аналитически заданной дискретной корреляционной функции $KF(l, m)$. ($L1 \geq N1$).
- 4) $SC1MM1(L1, L, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ суммирующего звена порядка $L \times L$ на отрезке $[0, t]$. $L1$ - число тактовых точек на интервале работы системы управления. ($L1 \geq L$).

5) $SR1MM1(L1, L, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ разностного звена порядка $L \times L$ на отрезке $[0, t]$. $L1$ - число тактовых точек на интервале работы системы управления. ($L1 \geq L$).

6) $SM1MM1(L1, L, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ звена начальных значений порядка $L \times L$ на отрезке $[0, t]$. $L1$ - число тактовых точек на интервале работы системы управления. ($L1 \geq L$).

7) $SAPMM1(N1, T, k, L1, t, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ апериодического звена порядка $N1 \times N1$ на отрезке $[0, t]$. T - постоянная времени апериодического звена. k - коэффициент усиления апериодического звена. $L1$ - число тактовых точек на интервале работы системы управления ($L1 \geq N1$).

8) $SCDMM1(N1, k, t, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ звена чистого сдвига порядка $N1 \times N1$ на отрезке $[0, t]$. k - величина чистого сдвига: если $k > 0$, то k – величина запаздывания, если $k < 0$, то k - величина упреждения. $L1$ - число тактовых точек на интервале работы системы управления ($L1 \geq N1$).

9) $SYZZZ1(g, N1, t, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ усилительного звена порядка $N1 \times N1$ на отрезке $[0, t]$ по аналитически заданной функции $g(x)$.

10) $SPTZZ1(N1, N2, L1, L2, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ звена понижения такта порядка $N2 \times N1$ на отрезке $[0, t]$. $L1$ - число тактовых моментов на входе звена понижения такта. $L2$ - число тактовых моментов на выходе звена понижения такта ($L2$ кратно $L1$ и $L2 < L1, L1 \geq N1; L2 \geq N2$).

1.3. Описание процедур непрерывно-дискретных элементарных операций спектрального метода

1) $SDEML1(N1, N2, L1, t, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ дискретного элемента порядка $N2 \times N1$ на отрезке $[0, t]$. $L1$ - число тактовых точек на интервале работы системы управления ($L1 \geq N2$).

2) $SE0LM1(N1, N2, L1, t, psiR, psiB, N\psi)$ - вычисляется усеченная матрица ДНПФ экстраполирующего звена нулевого порядка на отрезке $[0, t]$ Порядок матрицы $N1 \times N2$. $L1$ - число тактовых точек на интервале работы системы управления ($L1 \geq N2$).

Заметим, что в каждой процедуре передаваемый параметр psi ($psiR, psiB$) - идентификатор матрицы порядка $2 \times N\psi \cdot 2^{J+1} + 1$, которая содержит базисный вейвлет

$\psi\left(\frac{k}{2^{J+1}}\right)$, $k \in 0, 1, \dots, N\psi \cdot 2^{J+1}$, заданный на отрезке $[0, N\psi]$, а параметр $N\psi$ – длина носителя

материнского вейвлета разложения и восстановления.

Библиографический список

1. Солодовников В.В. и др. Расчет систем управления на ЦВМ. – М.: Машиностроение, 1979.
2. Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М., Наука, 1974.
3. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом: Учебное пособие. –М.: МАИ, 1984.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.
5. Чуи К. Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. – М.: Мир. 2001.
6. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – ДМК Пресс, 2005. – 304 с, ил.
7. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных непрерывных систем управления в базисах вейвлетов. // Электронный журнал “Труды МАИ”-2003, № 10.
8. Рыбин В.В. Разработка и применение пакетов расширения MLSY_SM СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab.// Электронный журнал “Труды МАИ”- 2003, № 13.
9. Рыбин В.В. Разработка и применение пакета расширения Spektr_SM СКМ Matlab.// Электронный журнал “Труды МАИ”- 2003, № 13.
10. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных непрерывных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах: Учебное пособие. – М.: МАИ, 2003. – 96 с.
11. Дьяконов В.П. MathCAD 2001: Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002. - 345с.
12. Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 632с.
13. Рыбин В.В. Разработка собственных блоков пакета расширения Spektr_SM+VisSim+dll. // Электронный журнал “Труды МАИ”- 2007, № 28.

14. Рыбин В.В. Разработка и применение пакета расширения Spektr_SM CBM VisSim: Учебное пособие. – М.: МАИ, 2008. – 60 с.

Сведения об авторе

Рыбин Владимир Васильевич, доцент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н. Контакты: +7 499 158-48-11, dep805@mai.ru