УДК 681.516.7

Вынужденные колебания парашютной системы с упругими стропами

Чуркин В.М.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

e-mail: churandr@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются вынужденные колебания в вертикальной плоскости парашютной системы с упругими стропами. При записи уравнений движения купол считается симметричным твердым телом, стропы моделируются двумя линейными невесомыми пружинами, а груз – точечной массой. Возмущающее воздействие, вызывающее колебания, представляется дополнительной составляющей вектора скорости, направленной горизонтально и изменяющейся по гармоническому закону. Составляются уравнения вынужденных колебаний системы, в которых учитывается нелинейная зависимость аэродинамической силы купола парашюта от его угла атаки. Методом гармонической линеаризации находятся выражения, определяющие основные параметры колебательных режимов и позволяющие рассчитывать амплитудно-фазовые частотные характеристики системы.

Ключевые слова: парашютная система, упругие стропы, вынужденные колебания, гармоническая линеаризация, параметры колебательных режимов.

Рассмотрим парашютную систему (ПС), составленную из жесткого симметричного относительно оси купола с центром давления D и центром масс C, лежащими на его оси симметрии, упругих строп в виде двух линейных невесомых пружин и точечного груза. Допустим, что на купол действуют сила тяжести $\overline{G}_К$ и составляющие аэродинамической силы: нормальная $\overline{N}$ и касательная $\overline{T}$, а на груз – только сила тяжести $\overline{G}_Г$. Движение такой модели ПС в вертикальной плоскости можно описать следующей системой уравнений [1]

$$\gamma_1(\dot{u}-vr)-\gamma_2 r^2=-\frac{C_T}{2k}u_D^2+\frac{C_{T0}}{2k}(1-\mu)\cos\theta+\frac{R_{1x}+R_{2x}}{1+\mu_1};$$

$$\gamma_1(\dot{v}+ur)+\gamma_2\dot{r}=-\frac{C_N}{2k}u_D^2-\frac{C_{T0}}{2k}(1-\mu)\sin\theta+\frac{R_{1y}+R_{2y}}{1+\mu_1};$$

$$\dot{r}+\gamma_3(\dot{v}+ur)=-\frac{C_N}{2i}u_D^2-\frac{C_{T0}}{2i}(1-\mu)\delta_C\sin\theta+\eta\left[\delta_B(R_{1x}-R_{2x})+\delta_E(R_{1y}+R_{2y})\right];$$

$$\dot{u}_1+\dot{u}-y\dot{r}-xr^2-2v_1r=\frac{C_{T0}}{2k}(1+\mu_1)\cos\theta-\frac{1}{\mu}(R_{1x}+R_{2x});$$

$$\dot{v}_1+\dot{v}+x\dot{r}+yr^2+2u_1r=-\frac{C_{T0}}{2k}(1+\mu_1)\sin\theta-\frac{1}{\mu}(R_{1y}+R_{2y});$$

$$\dot{\theta}=r;$$

$$\dot{x}=u_1;$$

$$\dot{y}=v_1. \qquad (1)$$

Здесь введены обозначения

$$u=\frac{V_{Ox}}{V_{00}};\quad v=\frac{V_{Oy}}{V_{00}};\quad u_D=\frac{V_D}{V_{00}};\quad u_1=\frac{V_{1x}}{V_{00}};\quad v_1=\frac{V_{1y}}{V_{00}};\quad r=\frac{\omega l_D}{V_{00}};\quad x=\frac{x_A}{l_D};$$

$$y=\frac{y_A}{l_D};\quad t*=\frac{tV_{00}}{l_D};\quad \mu=\frac{m_\Gamma}{m};\quad \mu_1=\frac{\lambda_{11}}{m};\quad k=\frac{m+\lambda_{11}}{\rho S l_D};\quad i=\frac{J_k+\lambda_{66}}{\rho S l_D^3};\quad \eta=\frac{m l_D^2}{J_k+\lambda_{66}};$$

$$\mu_{26}=\frac{\lambda_{26}}{l_D(m+\lambda_{11})};\quad \gamma_1=\frac{1+\mu_1-\mu}{1+\mu_1};\quad \gamma_2=\mu_{26}-\delta_C\frac{1-\mu}{1+\mu_1};\quad \gamma_3=\eta_{26}-\eta\delta_C(1-\mu);$$

$$\eta_{26}=\frac{l_D\lambda_{26}}{J_k+\lambda_{66}},\quad \delta_B=\frac{b}{l_D};\quad \delta_C=\frac{l_C}{l_D};\quad \delta_E=\frac{l_E}{l_D};\quad R_{jx,y}=\frac{\mu l_D F_{jx,y}}{m_\Gamma V_{oo}^2};\quad j=1,2;$$

V_{Ox}, V_{Oy} – проекции вектора скорости точки O на оси системы xOy; V_D – скорость центра давления D купола; V_{00} – скорость точки O при установившемся спу-ске ПС; ω – угловая скорость вращения купола; θ – угол тангажа купола; V_{1x}, V_{1y} – проекции вектора скорости груза на оси системы xOy; C_T, C_N – коэффициенты касательной T и нормальной N составляющих аэродинамической силы купола

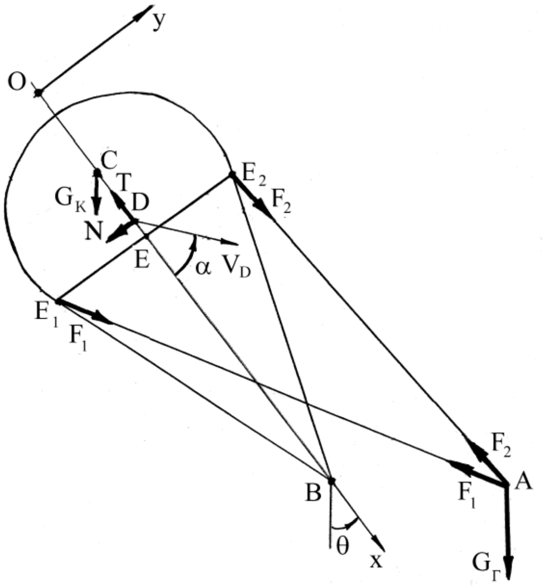

Схема ПС с упругими стропами.

$$C_T = C_T(\alpha);\quad C_N = C_N(\alpha);$$

α – угол атаки купола; F_{jx}, F_{jy} – проекции на оси системы xOy сил реакций строп $F_j (j = 1, 2)$

$$F_{jx} = (x_A - l_E) F_j / l_j; \quad F_{jy} = (y_A \pm b) F_j / l_j;$$

l_j – длина j –ой деформированной стропы

$$l_j = \sqrt{(x_A - l_E)^2 + (y_A \pm b)^2};$$

x_A, y_A – координаты груза; l_C, l_D, l_E, b – расстояния между характерными точками купола

$$l_C = OC; \quad l_D = OD; \quad l_E = OE; \quad b = EE_1 = EE_2;$$

$m_К$, $m_Г$ – массы купола и груза

$$m_К + m_Г = m;$$

$J_К$ – момент инерции купола относительно оси, проходящей через точку O.

Силы реакций строп условимся представлять в виде суммы

$$F_i = c(l_i - l) + f \frac{dl_i}{dt},$$

где c – коэффициент упругости стропы; f - коэффициент «внутреннего» трения стропы; l – длина недеформированной стропы

$$l = \sqrt{h^2 + b^2}; \quad h = BE;$$

$$\frac{dl_i}{dt} = \frac{1}{l_i}\left[(x_A - l_E)\frac{dx_A}{dt} + (y_A \pm b)\frac{dy_A}{dt}\right].$$

Предположим, что движение ПС сопровождается воздействием возмущения, которое описывается дополнительной составляющей $\bar{\varepsilon}$ вектора скорости $\overline{V}_D$. В реальных условиях таким возмущением может быть ветер или управляющее воздействие. Рассмотрим случай, когда вектор $\bar{\varepsilon}$ лежит в вертикальной плоскости, направлен горизонтально и имеет модуль, изменяющийся по гармоническому закону $\varepsilon = \varepsilon_m \sin \Omega t^*$. Тогда в уравнениях (1)

$$u_D^2 = (u + \varepsilon \sin\theta)^2 + (v + \varepsilon \cos\theta + r)^2;$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{v + \varepsilon\cos\theta + r}{u + \varepsilon \sin\theta}\right).$$

Вынужденные колебания геометрически неизменяемой модели ПС и модели ПС с шарнирно подвешенным грузом под действием такого возмущения исследовались в монографии [1]. Используем ту же методику для анализа вынужденных колебаний модели ПС с упругими стропами. Составим систему упрощенных нелинейных уравнений возмущенного движения ПС, приняв, что в невозмущенном движении купол ПС движется поступательно с постоянной скоростью $\overline{V}_{00}$ и постоянным углом атаки $\alpha = \alpha_n$, а груз (с координатами $x = x^*$; $y = 0$) относительно купола не перемещается. Будем считать, что в возмущенном движении

$$u = \cos\alpha_n + x_1;\ v = \sin\alpha_n + x_2;\ r = x_3;\ \theta = x_4;$$

$$u_1 = x_5;\ v_1 = x_6;\ x = x^* + x_7;\ y = x_8;\ \alpha = \alpha_n + x_9.$$

Рассматривая колебания ПС в диапазоне частот основного резонанса, представим искомое решение в виде

$$x_i = x_{i0} + x_{i1};\ x_{i1} = A_i \sin(\Omega t^* + \varphi_i);\ i = 1, \ldots, 9. \qquad (2)$$

После гармонической линеаризации нелинейной функции $C_N = C_N(\alpha)$ запишем систему упрощенных нелинейных уравнений возмущенного движения ПС в операторной форме

$$(a_{11}s + b_{11})x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{15}x_5 + b_{17}x_7 = 0;$$

$$a_{22}sx_2 + (a_{23}s + b_{23})x_3 + b_{24}x_4 + b_{26}x_6 + b_{28}x_8 + b_{29}(J_0 + Jx_{91}) = 0;$$

$$a_{32}sx_2 + (s + b_{33})x_3 + b_{34}x_4 + b_{36}x_6 + b_{38}x_8 + b_{39}(J_0 + Jx_{91}) = 0;$$

$$sx_1 + (s + b_{45})x_5 + b_{47}x_7 = 0;$$

$$sx_2 + a_{53}sx_3 + b_{54}x_4 + (s + b_{56})x_6 + b_{58}x_8 = 0;$$

$$sx_4 - x_3 = 0;$$

$$sx_7 - x_5 = 0;$$

$$sx_8 - x_6 = 0,$$

где $a_{11} = a_{22} = \gamma_1$; $b_{11} = \dfrac{C_{T0}}{k}\cos\alpha_n$; $b_{12} = \dfrac{C_{T0}}{k}\sin\alpha_n$; $b_{13} = \left(\dfrac{C_{T0}}{k} - \gamma_1\right)\sin\alpha_n$;

$b_{15} = -\dfrac{2\mu\sigma e_h^2}{1+\mu_1}$; $b_{17} = -\dfrac{2\mu\lambda}{1+\mu_1}\left(1 - e_l + e_l e_h^2\right)$; $a_{23} = \gamma_2$; $b_{23} = \gamma_1\cos\alpha_n$;

$b_{24} = \dfrac{C_{T0}}{2k}(1-\mu)$; $b_{26} = -\dfrac{2\mu\sigma e_B^2}{1+\mu_1}$; $b_{28} = -\dfrac{2\mu\lambda}{1+\mu_1}\left(1 - e_l + e_l e_B^2\right)$; $b_{29} = \dfrac{1}{2k}$;

$a_{32} = \gamma_3$; $b_{33} = \gamma_3\cos\alpha_n$; $b_{34} = \dfrac{C_{T0}}{2i}(1-\mu)\delta_C$; $b_{36} = -2\mu\sigma\eta e_B(\delta_B e_h + \delta_E e_B)$;

$b_{38} = -2\mu\lambda\eta\left[\delta_E(1 - e_l + e_l e_B^2) + \delta_B e_l e_B e_h\right]$; $b_{39} = \dfrac{1}{2i}$; $b_{45} = 2\sigma e_h^2$; $b_{47} = 2\lambda\left(1 - e_l + e_l e_h^2\right)$;

$a_{53} = x*$; $b_{54} = \dfrac{C_{T0}}{2k}(1+\mu_1)$; $b_{56} = 2\sigma e_B^2$; $b_{58} = 2\lambda\left(1 - e_l + e_l e_B^2\right)$;

$$\sigma = \frac{l_D f}{m_Г V_{00}}; \;\; \lambda = \frac{l_D^2 c}{m_Г V_{00}^2}; \;\; e_h = \frac{h*}{l*}; \;\; e_l = \frac{l}{l*}; \;\; e_B = \frac{b}{l*};$$

$$h* = x * - l_E; \;\; l* = \sqrt{(h*)^2 + b^2}; \; C_{T0} = \left(C_T\right)_{\alpha=\alpha_n};$$

$J_0, J-$ коэффициенты гармонической линеаризации функции $C_N = C_N(\alpha)$.

Например, при $C_N = c_1\alpha + c_2\alpha^3$; $c_1 < 0$; $c_2 > 0$;

$$J_0 = c_2\left[2\alpha_П^2 x_{90} + 3\alpha_П x_{90}^2 + x_{90}^3 + \frac{3}{2}(\alpha_П + x_{90})A_9^2\right];$$

$$J = c_2\left[2(\alpha_П^2 + 3\alpha_П x_{90} + \frac{3}{2}x_{90}^2) + \frac{3}{4}A_9^2\right]. \tag{3}$$

Полученные уравнения распадаются на две системы, которые соответствуют постоянным и переменным составляющим искомого решения (2).

Из системы для постоянных составляющих находим

$$(\alpha_П + x_{90})(x_{90}^2 + 2\alpha_П x_{90} + \frac{3}{2}A_9^2) = 0.$$

Отсюда определяем значения смещения центра колебаний x_{90}

$$(x_{90})_1 = -\alpha_n; \;\; (x_{90})_{2,3} = -\alpha_n \pm \sqrt{\alpha_n^2 - \frac{3}{2}A_9^2}. \tag{4}$$

Учитывая, что

$$x_9 \approx (x_2 + \varepsilon + x_3)\cos\alpha_n - x_1 \sin\alpha_n,$$

представим систему для переменных составляющих таким образом

$$(g_{120}s + g_{12})x_{21} + (g_{130}s + g_{13})x_{31} + g_{15}x_{51} + g_{17}x_{71} + (g_{190}s + g_{19})x_{91} = 0;$$

$$g_{220}sx_{21} + (g_{230}s + g_{23})x_{31} + g_{24}x_{41} + g_{26}x_{61} + g_{28}x_{81} + g_{29}Jx_{91} = 0;$$

$$g_{320}sx_{21} + (s + g_{33})x_{31} + g_{34}x_{41} + g_{36}x_{61} + g_{38}x_{81} + g_{39}Jx_{91} = 0;$$

$$g_{420}sx_{21}+g_{430}sx_{31}+(s+g_{45})x_{51}+g_{47}x_{71}+(g_{490}s+g_{49})x_{91}=0;$$

$$sx_{21}+g_{530}sx_{31}+g_{54}x_{41}+(s+g_{56})x_{61}+g_{58}x_{81}=0;$$

$$sx_{41}-x_{31}=0;$$

$$sx_{71}-x_{51}=0;$$

$$sx_{81}-x_{61}=0. \qquad (5)$$

Здесь $g_{120}=a_{11}g_1$; $g_1=\mathrm{ctg}\alpha_n$; $g_{12}=b_{11}g_1+b_{12}$; $g_{130}=-g_{120}$; $g_{13}=b_{13}-b_{11}g_1$;

$g_{15}=b_{15}$; $g_{17}=b_{17}$; $g_{190}=-a_{11}g_2+\varepsilon_m(g_{120}\Omega\cos\varphi_9-b_{11}\mathrm{ctg}\alpha_n\sin\varphi_9)/(A_9\Omega)$;

$g_{19}=-b_{11}g_2+\varepsilon_m(g_{120}\Omega\sin\varphi_9+b_{11}\mathrm{ctg}\alpha_n\cos\varphi_9)/A_9$; $g_2=1/\sin\alpha_n$; $g_{19}=-b_{11}g_2$;

$g_{220}=a_{22}$; $g_{230}=a_{23}$; $g_{23}=b_{23}$; $g_{24}=b_{24}$; $g_{26}=b_{26}$; $g_{28}=b_{28}$; $g_{320}=a_{32}$;

$g_{33}=b_{33}$; $g_{34}=b_{34}$; $g_{36}=b_{36}$; $g_{38}=b_{38}$; $g_{39}=b_{39}$; $g_{420}=g_1$; $g_{430}=-g_1$;

$g_{45}=b_{45}$; $g_{47}=b_{47}$; $g_{490}=-g_2+(g_1\varepsilon_m\cos\varphi_9)/A_9$; $g_{49}=(g_1\Omega\varepsilon_m\sin\varphi_9)/A_9$;

$g_{530}=a_{53}$; $g_{54}=b_{54}$; $g_{56}=b_{56}$; $g_{58}=b_{58}$.

Системе (5) соответствует характеристическое уравнение

$$B(s)+JG(s)=0, \qquad (6)$$

где $B(s)=\sum_{\nu=0}^{8}B_\nu s^{8-\nu}$; $G(s)=\sum_{\nu=0}^{7}G_\nu s^{7-\nu}$.

Подстановка $s=j\Omega$ в уравнении (6) приводит к системе, которая с учетом равенств (3) и (4) позволяет рассчитывать значения амплитуды A_9 и фазы φ_9, соответствующие заданным значениям частоты Ω искомых периодических колебаний. Так как характеристическое уравнение (6) имеет 8-ой порядок, то определение значений амплитуды A_9 и фазы φ_9, соответствующих значениям частоты Ω, и анализ устойчивости колебаний удобнее проводить с помощью построений на комплексной плоскости [2].

Библиографический список

1.Чуркин В.М. Динамика парашютных систем на этапе спуска. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2008. – 184 с.

2. Попов Е.П., Пальтов И.П. Приближенные методы исследования нелинейных атоматических систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 792 с.