УДК 536.21

Методика и программный комплекс по восстановлению характеристик анизотропных теплозащитных материалов для гиперзвуковых летательных аппаратов

В.Ф. Формалев, Е.Л. Кузнецова

Аннотация

Разработана методология и программный комплекс по численному решению обратных коэффициентных задач нелинейного теплопереноса в анизотропных материалах, используемых в качестве теплозащитных при аэрогазодинамическом нагреве гиперзвуковых летательных аппаратов (ЛА). Основными характеристиками анизотропных теплозащитных материалов при высоких температурах являются нелинейные компоненты тензора теплопроводности, которые необходимо восстановить по результатам экспериментальных замеров температур в пространственно-временных узлах. Предложенная методология основана на использовании нового экономичного абсолютно устойчивого метода переменных направлений с экстраполяцией численного решения задач теплопереноса и метода параметрической идентификации. Получены результаты по восстановлению компонентов тензора теплопроводности углерод-углеродного композиционного материала с использованием экспериментальных значений нелинейной теплопроводности этих материалов.

Ключевые слова: численное решение; обратная задача; теплоперенос; анизотропные материалы; тензор теплопроводности; композиционный материал; программный комплекс

Введение

Большинство теплозащитных материалов для гиперзвуковых летательных аппаратов (ЛА) являются анизотропными, теплопроводность которых описывается не скалярными величинами, а тензорами (матрицами) теплопроводности, компоненты которых при высоких температурах зависят от температуры, то есть являются нелинейными.

К таким материалам относятся композиционные материалы, такие как стеклопластики, асбопластики, углерод-углеродные пластики, большинство графитов и графитосодержащих материалов. Моделирование как прямых, так и обратных задач теплопереноса в таких материалах в условиях аэрогазодинамического нагрева ЛА представляет значительные трудности по следующим причинам:

– нестационарное температурное поле является многомерным по пространственным переменным;

–вектор плотности теплового потока не ортогонален изотермам, вследствие чего все координатные направления равнозначны и невозможно выделить одно главное направление;

– дифференциальное уравнение теплопереноса содержит смешанные производные, что приводит к невозможности разделения переменных по координатным направлениям;

– сложность сохранения порядка конечно-разностной аппроксимации краевых условий, содержащих производные, присущего порядку во внутренних узлах расчетной области.

Поскольку задачи восстановления нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных теплозащитных материалов относятся к классу обратных задач теплопереноса, для которых используются решения прямых задач, то все перечисленные трудности решения прямых задач переносятся на обратные задачи. К ним добавляются следующие: сильное влияние на результаты решения обратных коэффициентных задач теплопереноса погрешностей при экспериментальном определении температур; большое число пространственных узлов с экспериментальными значениями в анизотропном теплозащитном материале (не менее девяти); сложность учета нелинейностей компонентов тензора переноса и т.п.

Обратные задачи теплопереноса для изотропных тел рассматривались ранее в работах Алифанова О.М. [1], Бека Дж.В. [2], Самарского А.А. и Вабищевича П.Н. [3]. В работе Кузнецовой Е.Л. [4] решена обратная задача теплопроводности в анизотропном полупространстве на основе аналитического решения, полученного в [5].

В данной работе предложена методология численного решения обратных коэффициентных задач теплопроводности в анизотропных теплозащитных материалах, когда компоненты тензора теплопроводности зависят от температуры.

Постановка задачи

Для анизотропной полосы (рис. 1)

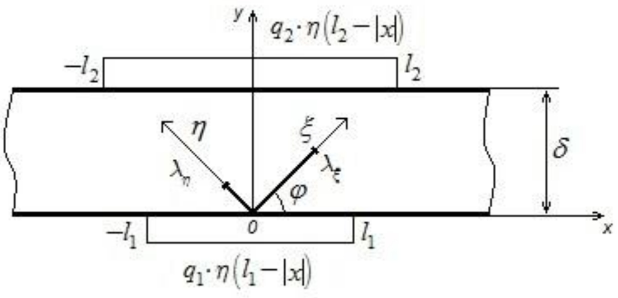

Рис. 1. Расчётная схема.

ставится следующая обратная коэффициентная задача теплопереноса по восстановлению нелинейных компонентов $\lambda_{11}(u),\ \lambda_{12}(u)=\lambda_{21}(u),\ \lambda_{22}(u)$ тензора теплопроводности:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{11}(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{12}(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{21}(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{22}(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=c\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t},\ \ x\in(-\infty;+\infty),\ \ y\in(0;\delta),\ \ t>0; \tag{1}$$

$$-\left[\lambda_{21}(u)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda_{22}(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right]=q_1\cdot\eta\left(l_1-|x|\right),\ \ x\in(-\infty;+\infty),\ \ y=0,\ \ t>0; \tag{2}$$

$$\lambda_{21}(u)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda_{22}(u)\frac{\partial u}{\partial y}=q_2\cdot\eta\left(l_2-|x|\right),\ \ x\in(-\infty;+\infty),\ \ y=\delta,\ \ t>0; \tag{3}$$

$$u(\pm\infty,y,t)=0,\ \ \frac{\partial u(\pm\infty,y,t)}{\partial x}=0,\ \ x\to\pm\infty,\ \ y\in[0,\delta],\ \ t>0; \tag{4}$$

$$u(x,y,0)=f(x,y),\ \ x\in(-\infty;+\infty),\ \ y\in[0,\delta],\ \ t=0; \tag{5}$$

$$\eta(\xi)=\begin{cases}1, & \xi>0\\ 0, & \xi<0\end{cases} \tag{6}$$

Для замыкания коэффициентной обратной задачи теплопереноса в анизотропной пластине необходимо задать экспериментальные значения температур в девяти точках (рис. 1) в зависимости от времени

$$u\left(\left(x,y\right)_i,t^k\right)=\tilde{u}_{ik},\ i=\overline{1,9},\quad k=\overline{1,K_0}, \tag{7}$$

причем эти девять узлов должны напоминать девятиточечный шаблон конечно-разностной схемы, используемой для численного решения прямой задачи анизотропного теплопереноса (1)–(6).

Одним из эффективных методов решения коэффициентной обратной задачи для уравнений параболического типа вообще и анизотропного переноса потенциала в частности является *метод параметрической идентификации* [3], в котором искомые функции $\lambda_{11}(u)$, $\lambda_{12}(u)$, $\lambda_{22}(u)$, находятся в виде линейной комбинации базисных функций $N_m(u)$, задаваемых на конечных элементах – конечных отрезках Δu_m, $m=\overline{1,M}$ $\left(u_{\min}\le u\le u_{\max}\right)$, связанных с конечно-разностной сеткой по времени, причем эти базисные функции ортогональны на отрезке $u\in\left[u_{\min},u_{\max}\right]$.

Здесь используются линейно непрерывные базисные функции [3, 6]:

$$N_m(u)=\begin{cases}0, & u<u_{m-1},\\ \dfrac{u-u_{m-1}}{u_m-u_{m-1}}, & u_{m-1}\le u\le u_m,\\ \dfrac{u_{m+1}-u}{u_{m+1}-u_m}, & u_m\le u\le u_{m+1},\\ 0, & u>u_{m+1},\ m=\overline{1,M}\,.\end{cases} \tag{8}$$

Решения обратной задачи, т.е. определение искомых характеристик тензора теплопроводности, зависящих от температуры, записываются в виде линейных комбинаций базисных функций $N_m(u)$

$$\lambda_{11}(u)\approx\sum_{m=1}^{M}\lambda_m^{11}\cdot N_m(u), \tag{9}$$

$$\lambda_{22}(u)\approx\sum_{m=1}^{M}\lambda_m^{22}\cdot N_m(u), \tag{10}$$

$$\lambda_{12}(u)\approx\sum_{m=1}^{M}\lambda_m^{12}\cdot N_m(u), \tag{11}$$

где коэффициенты линейных комбинаций λ_m^{11}, λ_m^{22}, λ_m^{12} подлежат определению, а M – количество блоков (конечных элементов), внутри каждого из которых находится одинаковое число шагов по времени.

Для конечно-разностной аппроксимации вводится конечно-разностная сетка по времени с шагом τ

$$\omega^{\tau} = \left\{ t^k = k\tau, k = \overline{0, N}, \tau = t_{\text{êoí}} \ / \ N \right\} \tag{12}$$

и пространственная сетка с шагами h_1 по переменной x и h_2 – по переменной y

$$\omega_h = \left\{ x_i = i \cdot h_1, i = \overline{0, I_0}, y_j = j \cdot h_2, j = \overline{0, J} \right\}. \tag{13}$$

Количество M временных блоков, в каждом из которых одинаковое число $K_m \left(m = \overline{1, M} \right)$ шагов τ по времени, и на каждом из которых коэффициенты λ_m^s $s = 11, 22, 12$ в линейных комбинациях (9)–(11) постоянны, определим из верхней оценки функциональной невязки

$$I \cdot K_m \cdot \delta^2 \leq \varepsilon, \tag{14}$$

где $I = 9$ – число пространственных узлов с замерами температуры по времени, K_m – число временных слоев в каждом блоке, δ – погрешность экспериментальных значений $\tilde{u}_{ik}$ (7), ε – верхняя оценка погрешности функциональной невязки, которая задается $a^{'} priori$ и по достижении которой останавливается итерационный процесс.

Из (14) получаем количество K_m временных шагов τ в каждом m-м блоке, $m = \overline{1, M}$ для всех характеристик (9)–(11)

$$K_m = \frac{\varepsilon}{9 \cdot \delta^2}, \ \ m = \overline{1, M} \ . \tag{15}$$

Если теперь весь временной промежуток $\left[0, t_{\text{кон}} \right]$ разделить на число K_m временных слоев в каждом блоке, получим количество M конечных элементов в (9)–(11), а длина Δu_m каждого конечного элемента $m = \overline{1, M}$ равна

$$\Delta u_m = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{M}, \ \ M = \frac{t_{\text{кон}}}{K_m}, \ \ m = \overline{1, M} \ . \tag{16}$$

Таким образом, равномерной сетке по времени ставится в соответствие более крупная (блоковая, с числом слоев K_m в каждом блоке) сетка по времени с одинаковым числом слоев, которой, в свою очередь, ставится в соответствие неравномерная сетка по функции u, причем эта сетка может быть построена после численного решения прямой задачи с граничными условиями второго или третьего родов, когда станет известно значение $u_{\max}$, а $u_{\min}$ равно минимальному значению функции $f(x,y)$ в начальном условии (5). Для граничных условий первого рода эти значения известны и величину Δu_m можно определить $a^{'}priori$ (до решения прямой задачи).

Метод определения кусочно-постоянных коэффициентов в линейных комбинациях при параметрическом представлении компонентов тензора теплопроводности

Для определения постоянных коэффициентов $\lambda_m = \left\{\lambda_m^{11}, \lambda_m^{22}, \lambda_m^{12}\right\}$, $m = \overline{1, M}$ в выражениях (9)–(11) вводится квадратичный функционал

$$S(\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\sum_{k=1}^{K_0}\left[u_{i,k}(\lambda) - \tilde{u}_{i,k}\right]^2, \tag{17}$$

где $u_{i,k}(\lambda) \equiv u\left((x,y)_i, t^k, \lambda\right)$, в виде суммы по пространственно-временным переменным квадратов отклонения экспериментальных значений $\tilde{u}_{i,k}$ в точках $\left((x,y)_i, t^k\right)$ от расчетных, полученных численно.

В случае отсутствия экспериментальных значений в качестве последних принимаются результаты численного решения по приемлемым характеристикам $\lambda_{11}(u)$, $\lambda_{22}(u)$, $\lambda_{12}(u)$, считающихся искомыми и определяемыми косвенно через расчетные значения температур $u_{i,k}(\lambda)$, когда функционал (17) стремится к своему стационарному значению. При этом экспериментальные значения могут быть определены с относительной погрешностью δ, принимающей одно из значений множества $(0{,}01; 0{,}02, \ldots, 0{,}1)$.

Для минимизации функционала используется *неявный* метод градиентного спуска

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} - \alpha_n grad\ S\left(\lambda^{(n+1)}\right), \tag{18}$$

где n – номер итерации, α_n – параметрические шаги, выбираемые достаточно малыми с подчинением условию $(\alpha_n > 0)$

$$S\left(\lambda^{(n+1)}\right) < S\left(\lambda^{(n)}\right). \tag{19}$$

Если следовать условию (19), то первоначальное значение α_0 может быть выбрано произвольно, например, $\alpha_0 = 0,01$. Тогда, если в результате следующей итерации условие (19) не выполнилось, то α_n *на этой итерации* уменьшается в десять раз и расчет на этой итерации повторяется, в противном случае (когда (19) выполняется) *для следующей итерации* α_n увеличивается в десять раз.

Окончание итерационного процесса устанавливается по близости к нулю $grad\ S\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}\right)$, то есть при выполнении условия

$$\left|grad\ S\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}\right)\right| \le \varepsilon, \tag{20}$$

где ε – заданная точность.

Для вычисления градиента функционала (17) с последующей подстановкой его компонентов в (18) и определения вектора $\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(n)} = \boldsymbol{\lambda}^{(n+1)} - \boldsymbol{\lambda}^{(n)}$, разложим в ряд Тейлора функцию $u_{i,k}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}\right)$ в окрестности $\boldsymbol{\lambda}^{(n)}$, сохраняя линейные относительно $\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(n)}$ члены, получим

$$S\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\sum_{k=1}^{K_0}\left[\left(u_{i,k}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right) + \sum_{l=1}^{L}\frac{\partial u_{i,k}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_l}\Delta\lambda_l^{(n)}\right) - \tilde{u}_{i,k}\right]^2. \tag{21}$$

Компоненты градиента функционала (23) имеют вид

$$\frac{\partial S\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}\right)}{\partial\lambda_l} = \sum_{i=1}^{9}\sum_{k=1}^{K_0}\left[\left(u_{i,k}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right) - \tilde{u}_{i,k}\right) + \sum_{k=1}^{K_0}\frac{\partial u_{i,k}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_l}\Delta\lambda_l^{(n)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\partial u_{i,k}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_l} + \frac{\partial}{\partial\lambda_l}\left(\sum_{l=1}^{L}\frac{\partial u_{i,k}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_l}\Delta\lambda_l^{(n)}\right)\right] \approx \sum_{i=1}^{9}\sum_{k=1}^{K_0}\left[\left(u_{i,k}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right) - \tilde{u}_{i,k}\right) + \sum_{l=1}^{L}\frac{\partial u_{i,k}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_l}\Delta\lambda_l^{(n)}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial u_{i,k}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_l},\quad l = \overline{1,L}. \tag{22}$$

где L – количество неизвестных параметров.

Представим (22) в следующей векторно-матричной форме:

$$grad\ S\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n+1)}\right) = Z^T\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)\left(\mathrm{u}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right) - \tilde{\mathrm{u}}\right) + Z^T\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)Z\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(n)}, \tag{23}$$

где

$$Z\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_{11}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_1} & \dfrac{\partial u_{11}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_2} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial u_{11}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_L} \\ \dfrac{\partial u_{12}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_1} & \dfrac{\partial u_{12}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_2} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial u_{12}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_L} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_{I,K}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_1} & \dfrac{\partial u_{I,K}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_2} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial u_{I,K}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)}{\partial\lambda_L} \end{pmatrix}; \qquad (24)$$

$$\mathbf{u}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)-\tilde{\mathrm{u}}=\Big(\left(u_{1,1}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)-\tilde{u}_{1,1}\right)...,\left(u_{I,1}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)-u_{I,1}\right);\ \cdots,\ \left(u_{I,1}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)-u_{I,1}\right);$$

$$\left(u_{1,2}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)-\tilde{u}_{1,2}\right),\ \cdots,\ \left(u_{I,2}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)-u_{I,2}\right)\ \cdots,\ \left(u_{I,J}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)-\tilde{u}_{I,K}\right)\Big)^{\mathrm{T}}; \qquad (25)$$

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(n)}=\left(\Delta\lambda_1^{(n)}\Delta\lambda_2^{(n)}...\Delta\lambda_L^{(n)}\right)^{\mathrm{T}}. \qquad (26)$$

Подставляя (23), в (18), получим

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(n)}=-\alpha_n\left[Z^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)\left(\mathrm{u}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)-\tilde{\mathrm{u}}\right)+Z^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)Z\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right],$$

откуда

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}^{(n)}=-\alpha_n\left(E+\alpha_n Z^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)Z\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)\right)^{-1}Z^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)\left(\mathrm{u}\left(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}\right)-\tilde{\mathrm{u}}\right). \qquad (27)$$

Элементы матрицы (24) (ее можно назвать матрицей коэффициентов чувствительности) в точках $\left((x,y)_i,\ t^k\right)$ определяются из решения сопряженных задач относительно производных от прямой задачи (1)–(6) по каждому компоненту $\lambda_l,\ l=\overline{1,L}$ и имеют смысл коэффициентов чувствительности температуры от параметров λ_l.

Можно показать, что изложенный итерационный метод сходится к точным значениям вектора $\boldsymbol{\lambda}$, когда $n\to\infty$.

Для определения расчетных значений температур $u_{i,k}\left(\boldsymbol{\lambda}\right)$, входящих в функционал (17), используется экономичный абсолютно устойчивый метод переменных направлений с экстраполяцией (МПНЭ), подробно изложенный и обоснованный в [6], а для определения элементов матрицы чувствительности (24) необходимо решить промежуточные задачи, называемые сопряженными, относительно производных $z = \frac{\partial u}{\partial \lambda_{11}}$, $v = \frac{\partial u}{\partial \lambda_{12}}$, $w = \frac{\partial u}{\partial \lambda_{22}}$ на каждом из отрезков $u \in [u_{m-1}, u_m]$, $m = \overline{1, M}$.

Эти задачи в количестве неизвестных z_m, v_m, w_m на каждом конечном элементе $u \in [u_{m-1}, u_m]$ по температуре формируются как производные от прямой задачи (1)–(6) по параметрам λ_m^{11}, λ_m^{12}, λ_m^{22}, $m = \overline{1, M}$, входящим в линейные комбинации (9)–(11).

Таким образом, для каждого отрезка $u \in [u_{m-1}, u_m]$ необходимо решить следующие три сопряженные задачи относительно $z_m = \frac{\partial u}{\partial \lambda_m^{11}}$, $v_m = \frac{\partial u}{\partial \lambda_m^{12}}$, $w_m = \frac{\partial u}{\partial \lambda_m^{22}}$:

$$\lambda_m^{11} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2\lambda_m^{12} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + \lambda_m^{22} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - c\rho \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial q}; \tag{28}$$

$$-\lambda_m^{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \lambda_m^{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} = q_1 \cdot \eta\left(l_1 - |x|\right) + M; \tag{29}$$

$$\lambda_m^{21} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda_m^{22} \frac{\partial \theta}{\partial y} = q_2 \cdot \eta\left(l_2 - |x|\right) - M; \tag{30}$$

$$\theta(x, y, 0) = 0, \ x \in (-\infty, \infty), \ y \in [0, \delta], \ t = 0, \tag{31}$$

где $\theta = \{z_m, v_m, w_m\}$; в задаче для $z_m : r = x, \ q = x, \ M = 0;$ в задаче для $v_m : r = x, \ q = y,$ $M = \partial u / \partial x;$ в задаче для $w_m : r = y, \ q = y, \ M = \partial u / \partial y.$

Эти три задачи (28)–(31) относительно z_m, v_m, w_m на каждом отрезке $u \in [u_{m-1}, u_m]$ решаются тем же методом переменных направлений с экстраполяцией, что и прямая задача (1)–(6), что создает возможность *распараллеливания решений сопряженных задач (28)–(31).* При этом в качестве начальных условий для последующих конечных элементов принимаются распределения температур $u(x, y, t)$ и производных z_m, v_m, w_m, полученные в конце предыдущего конечного элемента.

Программный комплекс

По изложенной методологии разработан программный комплекс численного решения обратных задач теплопроводности в теплозащитных анизотропных материалах по восстановлению нелинейных компонентов $\lambda_{11}(u)$, $\lambda_{12}(u) = \lambda_{21}(u)$, $\lambda_{22}(u)$ тензора теплопроводности, построенного по модульному принципу *с возможностью подключения* *на каждом промежутке* $u \in [u_{m-1}, u_m]$ *к трем процессорам* по количеству искомых коэффициентов чувствительности $z_m = \frac{\partial u}{\partial \lambda_m^{11}}$, $v_m = \frac{\partial u}{\partial \lambda_m^{12}}$, $w_m = \frac{\partial u}{\partial \lambda_m^{22}}$, причем на промежутке $u \in [u_{m-1}, u_m]$ предварительно должна быть решена прямая задача (1)–(6), поскольку задачи (28)–(31) в существенной степени зависят от распределения $u(x, y, t)$.

На рис. 2 приведена укрупненная блок-схема программного комплекса OZTNT.

В случае, если экспериментальные данные $\tilde{u}_{i,k}$ отсутствуют (что чаще всего и случается на практике), в качестве последних принимаются расчетные значения температур $\tilde{u}_{i,k}$ в заданных пространственно-временных точках, полученные из численного решения задачи (1)–(6) по приемлемым компонентам $\lambda_{11}(u)$, $\lambda_{12}(u)$, $\lambda_{22}(u)$ тензора теплопроводности, считающихся после этого искомыми функциями. Эта процедура реализована в блоке 2.

Результаты численного решения

В качестве иллюстрации работоспособности изложенного метода и программного комплекса восстанавливаются нелинейные компоненты тензора теплопроводности углерод-углеродного композита, полученные экспериментальным путем в [7] и аппроксимируемые в помощью линейных комбинаций базисных функций $N_1(u)$, $N_2(u)$ на одном конечном элементе (линейная аппроксимация)

$$\lambda_{11}(u) = 0,0025 \cdot u = \lambda_{11} N_1(u) + \lambda_{11}^2 N_2(u)$$

$$\lambda_{22}(u) = 0,0015 \cdot u = \lambda_{22}^1 N_1(u) + \lambda_{22}^2 N_2(u)$$

$$\lambda_{12}(u) = 0,000866 \cdot u = \lambda_{12}^1 N_1(u) + \lambda_{12}^2 N_2(u),$$

где $N_1(u) = \frac{u_{\max} - u}{u_{\max} - u_{\min}}$; $N_2(u) = \frac{u - u_{\min}}{u_{\max} - u_{\min}}$.

Для решения прямой задачи с граничными условиями $u|_{\tilde{A}} = u_{\max} = 1400K$, $u(x, y, 0) = u_{\min} = 550K$ принимались следующие входные данные:

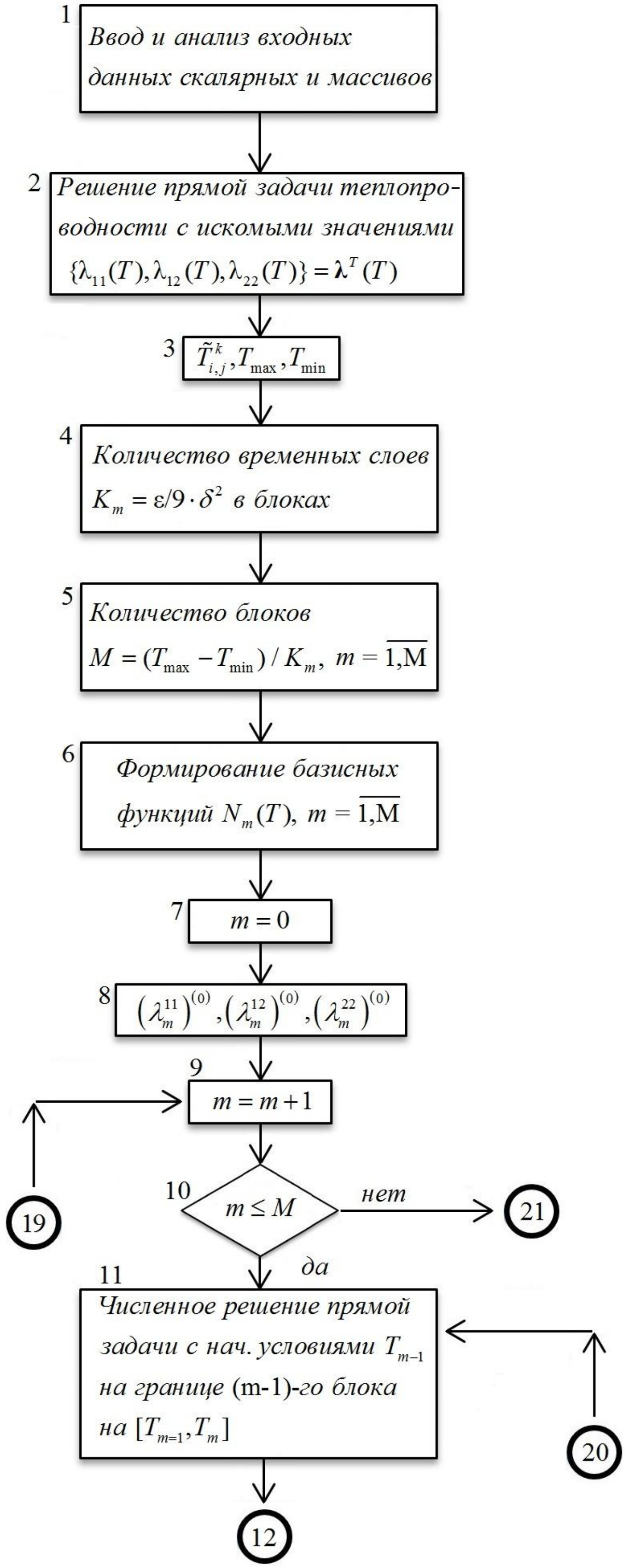

Рис.2. Блок-схема программного комплекса OZTNT.

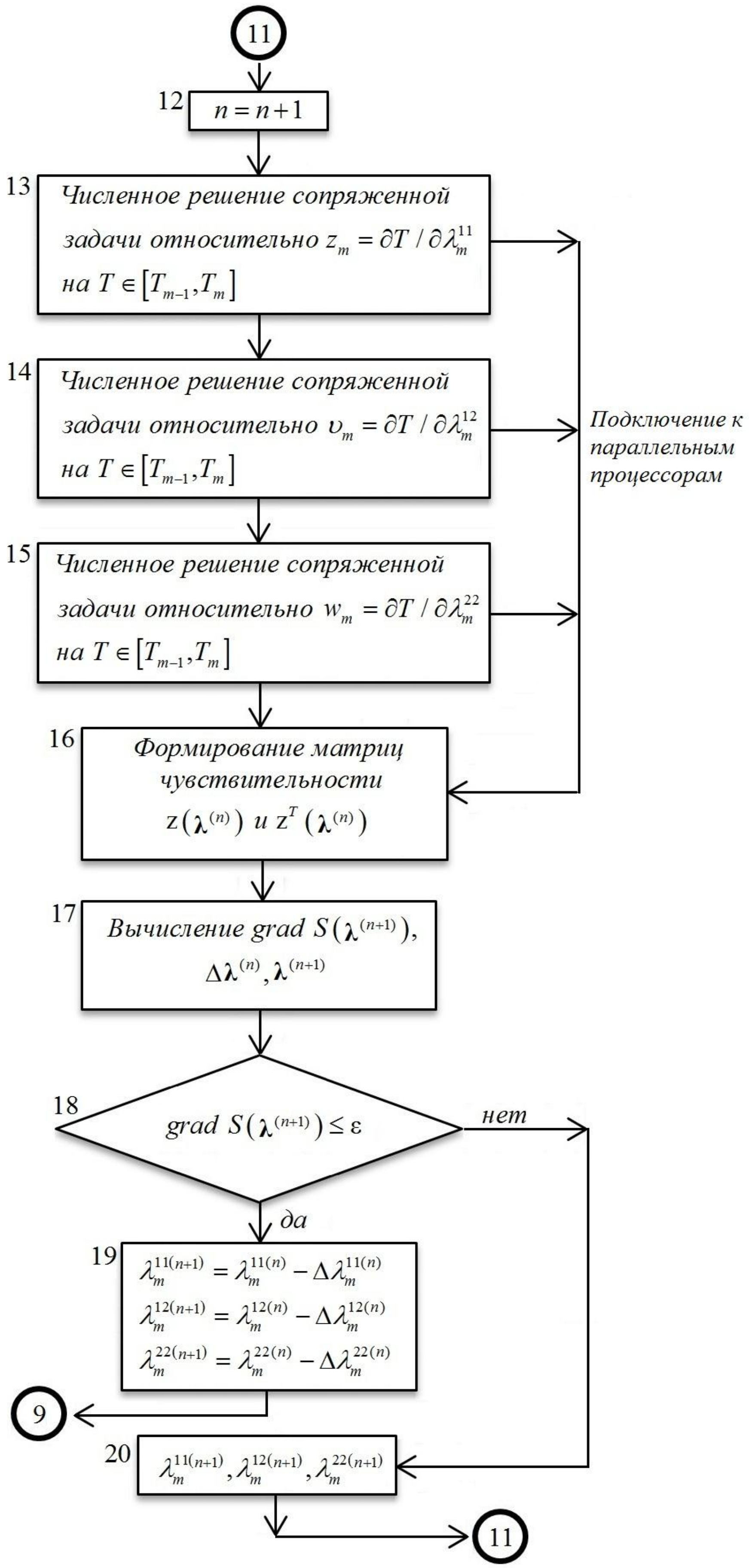

Рис.2.Продолжение

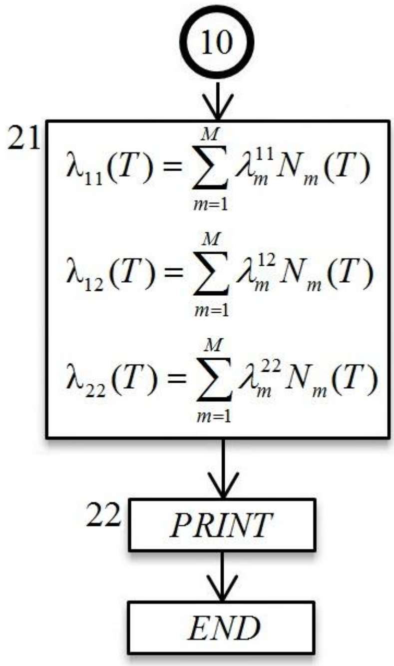

Рис. 2.Продолжение

$c\rho = 2,25\cdot 10^6$ Дж/м$^3\cdot K$, $l_1 = 0,1$м; $l_2 = 0,06$м. Экспериментальные значения температур вычи слялись по этим входным данным при решении задачи (1)–(6) в точках $x_i = \{0,01; 0,05; 0,09\}$, $y_j = \{0,0025; 0,0075; 0,01\}$ в моменты времени $t^k = 35$с, 40с, 45с, 50с. Таким образом, искомыми параметрами являются λ_{11}^1, λ_{11}^2, λ_{22}^1, λ_{22}^2, λ_{12}^1, λ_{12}^2.

В таблице 1 приведен итерационный процесс по восстановлению коэффициентов λ_{11}^1, λ_{22}^1, λ_{12}^1, λ_{11}^2, λ_{22}^2, λ_{12}^2 без погрешностей в экспериментальных данных $\tilde{u}_{i,j}^k$, а в таблице 2 – то же с абсолютной погрешностью в интервале $\Delta \in \left[-5^0; 5^0\right]$.

Таблица 1. Итерационный процесс без погрешностей в $\tilde{u}_{i,j}^k$

Номер итерации	S	λ_{11}^1	λ_{22}^1	λ_{12}^1	λ_{11}^2	λ_{22}^2	λ_{12}^2	α_n
0	1,12E+06	1	1	0	1	1	0	1
1	115443	3,23927	1,40083	0,967038	1,09177	1,69459	-0,1711	10
2	1106,93	2,74605	0,938084	0,744596	3,00184	2,05214	1,34424	10
3	21,9547	1,189	0,827484	0,439727	3,5639	2,10083	1,2009	10
4	0,154373	1,36677	0,824827	0,475127	3,5017	2,09957	1,21203	10
5	0,000167	1,37484	0,824989	0,476294	3,50002	2,09999	1,21243	10
6	5,05E-08	1,375	0,825	0,476314	3,5	2,1	1,21244	10

Таблица 2. Итерационный процесс с погрешностью в $\tilde{u}_{i,j}^{k}$.

Номер итерации	S	λ_{11}^{1}	λ_{22}^{1}	λ_{12}^{1}	λ_{11}^{2}	λ_{22}^{2}	λ_{12}^{2}	α_n
0	1,72E+06	1	1	0	1	1	0	1
1	151923	3,26393	1,35639	1,01665	1,08613	1,71674	-0,1307	10
2	6562,79	0,937527	0,905392	0,431408	4,00696	2,05979	1,55763	10
3	1550,78	1,30691	0,846076	0,455453	3,53964	2,09224	1,24731	10
4	1539,48	1,33133	0,846509	0,452776	3,53128	2,09431	1,25444	10
5	1539,47	1,33196	0,846568	0,452835	3,53114	2,09438	1,25444	10
6	1539,47	1,33197	0,846569	0,452836	3,53114	2,09438	1,25444	10
7	1539,47	1,33198	0,846569	0,452836	3,53114	2,09438	1,25444	10

Из таблиц 1, 2 видно, что если экспериментальные значения температур не возмущены погрешностью (таблица 1), то абсолютная погрешность в определении λ_{11}^{1}, λ_{22}^{1}, λ_{12}^{1}, λ_{12}^{2}, λ_{22}^{2}, λ_{12}^{2} при стационарном значении функционала S равна нулю, а наличие погрешности в $\tilde{u}_{i,j}^{k}$, с одной стороны, увеличивает количество итераций, а с другой – доставляет абсолютные погрешности метода при стационарном значении функционала S (таблица 2), а именно: $\Delta\lambda_{11}^{1} \approx 3{,}1\%$; $\Delta\lambda_{22}^{1} \approx 2{,}6\%$; $\Delta\lambda_{12}^{1} \approx 4{,}9\%$; $\Delta\lambda_{11}^{2} \approx 0{,}9\%$; $\Delta\lambda_{22}^{2} \approx 0{,}3\%$; $\Delta\lambda_{12}^{2} \approx 3{,}5\%$. *Начальные значения искомых параметров значительно (в 2–3 раза) отличаются от искомых, и тем не менее итерационный алгоритм сходится с приемлемой скоростью*.

На рисунке 3 приведены графики нелинейных коэффициентов тензора теплопроводности, восстановленные с учетом погрешностей в экспериментальных значениях температур $\tilde{u}_{i,j}^{k}$, а также приведены нелинейные коэффициенты, заложенные в экспериментальные значения $\tilde{u}_{i,j}^{k}$.

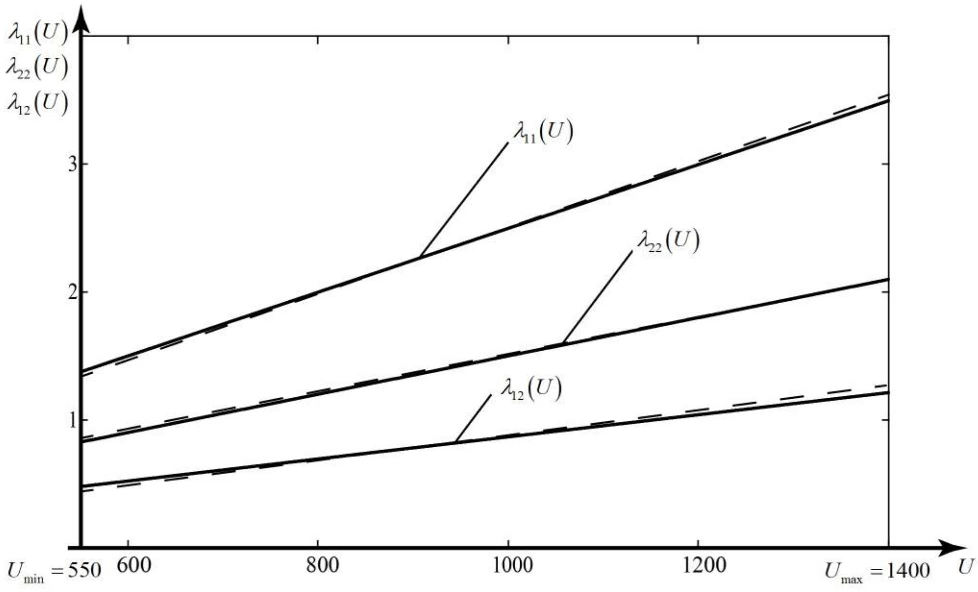

Рис. 3. Восстановленные нелинейные компоненты тензора теплопроводности при наличии погрешности $\Delta \in \left[-5^0; 5^0\right]$ в определении экспериментальных значений $\tilde{u}_{i,j}^k$ (сплошные линии – восстановленные, пунктирные – заложенные в $\tilde{u}_{i,j}^k$).

Выводы

1. Разработана методология численного решения обратных задач нелинейного теплопереноса в анизотропных материалах, используемых в качестве теплозащитных для гиперзвуковых летательных аппаратов. Методология основана на методе параметрической идентификации, неявного метода градиентного спуска и на новом экономичном абсолютно устойчивом методе переменных направлений с экстраполяцией численного решения задач теплопереноса, содержащих смешанные производные.

2. Разработан программный комплекс *OZTNT*, позволяющий восстанавливать нелинейные компоненты тензора теплопроводности, заложенные в экспериментальные значения температур и подключать параллельно процессоры в количестве неизвестных параметров.

3. Впервые полученные результаты численных экспериментов по восстановлению компонентов тензора теплопроводности углерод-углеродных композиционных теплозащитных материалов, зависящих от температуры, показали быструю сходимость итерационного процесса к точным значениям нелинейных компонентов тензора теплопроводности, заложенным в экспериментальные значения температур, включая и случаи наличия погрешностей в этих температурах.

Библиографический список

1. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов (введение в теорию обратных задач теплообмена). – М.: Машиностроение. 1979. 216с.

2. Beck J.V., Blachwell B., St. Clar C.R. Inverse Heat Conduction. Ill–posed Problems. – N-Y: A. Wiley – Interscince Publication. 1985. 308p.

3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Изд-во ЛКИ. 2009. 480с.

4. Кузнецова Е.Л. Восстановление характеристик тензора теплопроводности на основе аналитического решения задачи теплопереноса в анизотропном полупространстве // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49. № 6. с. 1–8.

5. Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л. Тепломассоперенос в анизотропных телах при аэрогазодинамическом нагреве. – М.: МАИ-ПРИНТ. 2011. 300с.

6. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: Физматлит. 2004. 400с.

7. Падерин Л.Я., Прусов Б.В. и др. Метод исследования теплопроводности углеродных композиционных материалов // В тр. 5-й Российской национальной конференции по теплообмену. 2010. Т. 7. С. 150–152.

Сведения об авторах

Формалев Владимир Федорович, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.ф.-м.н., тел. 8(495)-496-39-71,.8-905-569-44-74

Кузнецова Екатерина Львовна, доцент, Московского авиационного института (национального исследовательского университета), к.ф.-м.н, тел. 8-903-719-48-72, e-mail : lareyna@mail.ru