Труды МАИ. Выпуск № 108 https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1
УДК 539.3

Смешанные уравнения теории мягких оболочек

Коровайцева Е.А.

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова,

Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Россия

e-mail: katrell@mail.ru

Статья поступила 29.09.2019

Аннотация

В работе предложен модифицированный вариант разрешающих соотношений теории мягких оболочек, построенных в [1, 2], отличающийся большим удобством для численной реализации. Рассмотрены как уравнения теории больших деформаций, так и уравнения технической теории мягких оболочек. Методика построения разрешающих соотношений аналогична указанным работам. Введены функции обобщенных усилий, позволяющие сформулировать уравнения теории мягких оболочек в форме, применимой при формализации краевых задач. Построенные соотношения не претендуют на принципиальность изменений или уточнений, однако в отличие от известных могут быть приведены к нормальной форме Коши, удобной для применения численных методов непосредственного интегрирования и привлечения стандартных приемов решения плохообусловленных краевых задач.

Ключевые слова: мягкие оболочки, большие деформации, техническая теория мягких оболочек, уравнения в нормальной форме Коши.

Введение

Построению уравнений, описывающих поведение мягких оболочек, посвящено большое количество работ. Изложение теории мягких оболочек дано в работах С.А. Алексеева [3], А.С. Григорьева [4], В.Э. Магулы [5], Б.И. Друзя [6], В.В. Ермолова [7], В.И. Усюкина [1, 2, 8], Я.Ф. Каюка [9], А.Р. Ржаницына [10], Б.И. Сергеева [11], Ф. Отто, Р. Тростеля [12] и др. Разрешающие соотношения, описывающие динамическое деформирование мягких оболочек, приведены в работах [13-16].

В общем случае постановки геометрически и физически нелинейных задач деформирования мягких оболочек отличаются существенной сложностью. По-видимому, по этой причине в области больших деформаций и по настоящее время наиболее изученными остаются мягкие оболочки вращения при осесимметричном нагружении, причем большая часть исследований посвящена задачам статического деформирования. При этом в доступной литературе приведены решения либо конкретных прикладных задач, либо частных задач деформирования мягких оболочек простейшей геометрии. В подавляющем большинстве случаев рассматриваются лишь двухточечные краевые задачи, а разрабатываемые методы решения, как правило, применимы только к рассматриваемому узкому классу задач и не ориентированы на удобство, экономичность и универсальность для программной реализации.

В случае умеренных деформаций возможна линеаризация нелинейных соотношений и использование технической теории мягких оболочек [2]. Следует отметить, что работа [17], в которой используются соотношения технической теории, по-видимому, является первой, в которой получено решение многоточечной краевой задачи деформирования мягкооболочечной конструкции. В доступной литературе лишь в одной работе [18] приведено решение указанной многоточечной краевой задачи, построенное на основании общей теории мягких оболочек с использованием метода конечного элемента.

В целом в литературе при исследовании неосесимметричного деформирования мягких оболочек или мягких оболочек произвольной конфигурации как по общей теории, так и по технической теории, используются метод конечных разностей или метод конечных элементов [18-20]. При этом строгой математической постановки задачи деформирования разветвленной мягкооболочечной конструкции, по-видимому, нет и до сих пор, а существующие алгоритмы расчета, как правило, ориентированы на узкий круг конкретных прикладных задач [21-22].

В настоящей работе делается попытка постановки задач деформирования мягких оболочек более общая, чем известные, для чего в целях обобщения используется векторно-матричная формализация записи разрешающих соотношений и последующих преобразований векторных функций векторных переменных. При этом за основу взята система уравнений теории больших деформаций В.И. Усюкина [1] и соотношения технической теории мягких оболочек [23].

Следует отметить, что недостатком систем уравнений, сформулированных в [23], является несоответствие порядка системы и числа дифференцируемых функций. Как следствие этого, при попытке приведения системы к нормальной форме Коши либо повышается порядок дифференцирования компонент вектора разрешающих переменных и ухудшается обусловленность системы, либо в левой части векторного дифференциального уравнения вектор производных искомых функций умножается на матрицу. Кроме того, в системе разрешающих соотношений указанных работ вектор разрешающих переменных содержит неравное число силовых и геометрических компонент. Отмеченные противоречия были преодолены только для системы уравнений технической теории мягких оболочек [2, 23] путем сведения ее к одному уравнению относительно вектора перемещений (в случае неосесимметричного деформирования) или одной его компоненты (прогиб или угол поворота нормали – в случае осесимметричного деформирования). Такой подход к формированию разрешающей системы уравнений позволяет удовлетворить всем граничным условиям задачи, с одной стороны, но не позволяет строить экономичные алгоритмы решения различных типов задач, с другой стороны. В данной работе предложена модификация систем уравнений теории больших деформаций и технической теории мягких оболочек, сформулированных в [1] и [23], позволяющая представить разрешающие соотношения в форме, удобной как для использования аппарата решения систем дифференциальных уравнений, так и для алгоритмизации решения различных типов задач теории мягких оболочек произвольной топологии.

Смешанные уравнения теории больших деформаций мягких оболочек

Введем для оболочки ортогональную криволинейную систему координат

α, β, z, совпадающих с линиями кривизны срединной поверхности оболочки и внешней нормалью. Пусть недеформированная форма срединной поверхности определяется коэффициентами Ляме A, B и радиусами кривизны R_1, R_2. В этих координатах выражения для компонентов конечной деформации имеют вид [24]

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1^* &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1^2 + \gamma_1^2 + \vartheta_1^2\right) \\
\varepsilon_2^* &= \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_2^2 + \gamma_2^2 + \vartheta_2^2\right) \\
\omega^* &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_1\varepsilon_2 + \gamma_2\varepsilon_1 + \vartheta_1\vartheta_2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $\varepsilon_i, \gamma_i, \vartheta_i \ (i = 1,2)$ - компоненты линейного тензора деформаций, связанные с перемещениями u, v, w вдоль координатных линий α, β, z известными зависимостями [24]

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{A\cdot B}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}\cdot v + \frac{1}{R_1}\cdot w; \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{A\cdot B}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot u + \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{R_2}\cdot w; \\
\gamma_1 &= -\frac{1}{A\cdot B}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}\cdot u + \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial v}{\partial\alpha}; \\
\gamma_2 &= \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{1}{A\cdot B}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot v; \\
\vartheta_1 &= \frac{1}{R_1}\cdot u - \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial w}{\partial\alpha}; \\
\vartheta_2 &= \frac{1}{R_2}\cdot v - \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Следуя работе [1], для вывода уравнений равновесия оболочки используем принцип возможных перемещений. Условия равновесия оболочки, соответствующие этому принципу, имеют вид

$$\delta W = \delta A, \tag{3}$$

где δW – работа внутренних усилий $T_1,\ T_2,\ S$, затрачиваемая на дополнительное деформирование оболочки из состояния равновесия, δA – работа поверхностных и краевых сил на соответствующих перемещениях из состояния равновесия.

Виртуальная работа внутренних усилий имеет вид

$$\delta W = \iint_S \left(T_1^* \delta\varepsilon_1^* + T_2^* \delta\varepsilon_2^* + S\delta\omega^* \right) ABd\alpha d\beta , \tag{4}$$

где $T_1^*,\ T_2^*$ - усилия, приведенные к метрике исходного состояния. Они связаны с истинными усилиями, действующими по граням деформированного элемента оболочки, соотношениями

$$T_1^* = T_1 \cdot \frac{1+e_2}{1+e_1}; \qquad T_2^* = T_2 \cdot \frac{1+e_1}{1+e_2}, \tag{5}$$

где $e_1,\ e_2$ - относительные удлинения волокон оболочки вдоль линий $\alpha,\ \beta$ соответственно, связанные с компонентами деформаций следующим образом [24]:

$$e_1 + \frac{1}{2}e_1^2 = \varepsilon_1^*,\ 1 \leftrightarrow 2 . \tag{6}$$

Вариации деформаций (1) можно представить

$$\begin{gathered} \delta\varepsilon_1^* = \left(1+\varepsilon_1\right)\delta\varepsilon_1 + \gamma_1\delta\gamma_1 + \vartheta_1\delta\vartheta_1,\ \ 1 \leftrightarrow 2 \\ \delta\omega^* = \left(1+\varepsilon_2\right)\delta\gamma_1 + \gamma_1\delta\varepsilon_2 + \left(1+\varepsilon_1\right)\delta\gamma_2 + \gamma_2\delta\varepsilon_1 + \vartheta_1\delta\vartheta_2 + \vartheta_2\delta\vartheta_1. \end{gathered} \tag{7}$$

Работа внешних сил, действующих на оболочку, складывается из работы поверхностных и краевых сил. Пусть на краю оболочки $\alpha = const,\ \beta = const$ действуют краевые усилия $T_i^0,\ S_i^0,\ Q_i^0\ (i=1,2)$, а составляющие поверхностной нагрузки по осям криволинейной системы координат $\alpha,\ \beta,\ z$, отнесенные к площади недеформированного элемента оболочки, соответственно f_1^*, f_2^*, f_3^*. Совершаемая ими работа при малых виртуальных деформациях срединной поверхности определяется выражением [24]

$$\delta A = \iint\limits_S \left(f_1^* \cdot \delta u + f_2^* \cdot \delta v + f_3^* \cdot \delta w \right) AB \cdot d\alpha d\beta +$$
$$+ \int\limits_\beta \left(T_1^0 \cdot \delta u + S_1^0 \cdot \delta v + Q_1^0 \cdot \delta w \right) \left(1 + e_2 \right) Bd\beta + \int\limits_\alpha \left(T_2^0 \cdot \delta u + S_2^0 \cdot \delta v + Q_2^0 \cdot \delta w \right) \left(1 + e_1 \right) Ad\alpha.$$

В итоге вариационное уравнение принципа возможных перемещений имеет вид

$$\iint\limits_S \Big\{ \left[T_1^* \left(1 + \varepsilon_1 \right) + S\gamma_2 \right] \cdot \delta\varepsilon_1 + \left[T_2^* \left(1 + \varepsilon_2 \right) + S\gamma_1 \right] \cdot \delta\varepsilon_2 + \left[T_1^* \gamma_1 + S \left(1 + \varepsilon_2 \right) \right] \cdot \delta\gamma_1 +$$
$$+ \left[T_2^* \gamma_2 + S \left(1 + \varepsilon_1 \right) \right] \cdot \delta\gamma_2 + \left[T_1^* \vartheta_1 + S\vartheta_2 \right] \cdot \delta\vartheta_1 + \left[T_2^* \vartheta_2 + S\vartheta_1 \right] \cdot \delta\vartheta_2 \Big\} ABd\alpha d\beta =$$
$$= \iint\limits_S \left(f_1^* \cdot \delta u + f_2^* \cdot \delta v + f_3^* \cdot \delta w \right) AB \cdot d\alpha d\beta + \int\limits_\beta \left(T_1^0 \cdot \delta u + S_1^0 \cdot \delta v + Q_1^0 \cdot \delta w \right) \left(1 + e_2 \right) Bd\beta +$$
$$+ \int\limits_\alpha \left(T_2^0 \cdot \delta u + S_2^0 \cdot \delta v + Q_2^0 \cdot \delta w \right) \left(1 + e_1 \right) Ad\alpha.$$

Выразим вариации компонент тензора малых деформаций через вариации перемещений и их производные

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_1 &= \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial\delta u}{\partial\alpha}+\frac{1}{A\cdot B}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}\cdot\delta v+\frac{1}{R_1}\cdot\delta w;\\
\delta\varepsilon_2 &= \frac{1}{A\cdot B}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot\delta u+\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial\delta v}{\partial\beta}+\frac{1}{R_2}\cdot\delta w;\\
\delta\gamma_1 &= -\frac{1}{A\cdot B}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}\cdot\delta u+\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial\delta v}{\partial\alpha};\\
\delta\gamma_2 &= \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial\delta u}{\partial\beta}-\frac{1}{A\cdot B}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot\delta v;\\
\delta\vartheta_1 &= \frac{1}{R_1}\cdot\delta u-\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial\delta w}{\partial\alpha};\\
\delta\vartheta_2 &= \frac{1}{R_2}\cdot\delta v-\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial\delta w}{\partial\beta}.
\end{aligned}\tag{8}$$

Пользуясь формулами Остроградского-Гаусса в криволинейных координатах, получаем вариационное уравнение в виде

$$\begin{aligned}
&\iint_S\left\{\left[L_1-f_1^*AB\right]\cdot\delta u+\left[L_2-f_2^*AB\right]\cdot\delta v+\left[L_3-f_3^*AB\right]\cdot\delta w\right\}d\alpha d\beta+\\
&+\int_\beta\left\{\left[T_{1x}-T_1^0(1+e_2)B\right]\cdot\delta u+\left[T_{1y}-S_1^0(1+e_2)B\right]\cdot\delta v+\left[T_{1z}-Q_1^0(1+e_2)B\right]\cdot\delta w\right\}d\beta+\\
&+\int_\alpha\left\{\left[T_{2x}-S_2^0(1+e_1)A\right]\cdot\delta u+\left[T_{2y}-T_2^0(1+e_1)A\right]\cdot\delta v+\left[T_{2z}-Q_2^0(1+e_1)A\right]\cdot\delta w\right\}d\alpha
\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь операторы L_i представляют соотношения

$$\begin{aligned}
L_1 &= -\left(\frac{\partial T_{1x}}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_{2x}}{\partial\beta}\right)-\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}\cdot T_{1y}+\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot T_{2y}+\frac{A}{R_1}\cdot T_{1z};\\
L_2 &= -\left(\frac{\partial T_{1y}}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_{2y}}{\partial\beta}\right)-\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot T_{2x}+\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}\cdot T_{1x}+\frac{B}{R_2}\cdot T_{2z};\\
L_3 &= \frac{\partial T_{1z}}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_{2z}}{\partial\beta}-\frac{A}{R_1}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot T_{1x}-\frac{B}{R_2}\cdot T_{2y},
\end{aligned}\tag{10}$$

где введены следующие обобщенные усилия:

$$
\begin{aligned}
&T_{1x}=\left[T_1^*\left(1+\varepsilon_1\right)+S\cdot\gamma_2\right]\cdot B; &&T_{2x}=\left[T_2^*\gamma_2+S\cdot\left(1+\varepsilon_1\right)\right]\cdot A;\\
&T_{1y}=\left[T_1^*\gamma_1+S\cdot\left(1+\varepsilon_2\right)\right]\cdot B; &&T_{2y}=\left[T_2^*\left(1+\varepsilon_2\right)+S\cdot\gamma_1\right]\cdot A;\\
&T_{1z}=\left(T_1^*\cdot\vartheta_1+S\cdot\vartheta_2\right)\cdot B; &&T_{2z}=\left(T_2^*\cdot\vartheta_2+S\cdot\vartheta_1\right)\cdot A.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

При независимых в области S вариациях $\delta u,\ \delta v,\ \delta w$ из вариационного уравнения (9) следуют уравнения равновесия в проекциях на оси криволинейной системы координат, связанной с недеформированной срединной поверхностью оболочки

$$
L_1-f_1^*AB=0;\quad L_2-f_2^*AB=0;\quad L_3-f_3^*AB=0 \tag{12}
$$

и силовые граничные условия

$$
\begin{aligned}
&\beta=const:\ T_{1x}-T_1^0\left(1+e_2\right)B=0;\ T_{1y}-S_1^0\left(1+e_2\right)B=0;\ T_{1z}-Q_1^0\left(1+e_2\right)B=0;\\
&\alpha=const:\ T_{2x}-S_2^0\left(1+e_1\right)A=0;\ T_{2y}-T_2^0\left(1+e_1\right)A=0;\ T_{2z}-Q_2^0\left(1+e_1\right)A=0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Таким образом, система уравнений, описывающих деформирование мягких оболочек, включает уравнения равновесия (12), дополнительные проекционные уравнения (11), зависимости, описывающие приведение истинных усилий к метрике исходного состояния (5), геометрические соотношения (8) и (6). Для замыкания системы уравнений используются физические соотношения, связывающие истинные усилия T_1, T_2, S с деформациями e_1, e_2, ω. Окончательно сформированная система содержит 23 уравнения с 23 неизвестными.

Смешанные уравнения технической теории мягких оболочек

При малых деформациях возможно упрощение разрешающей системы уравнений, характерное для технической теории мягких оболочек. В этом случае

$$
\begin{gathered}
e_1 = \varepsilon_1^*,\ 1 \rightleftarrows 2,\ \omega = \omega^*, \\
\varepsilon_1^* = \varepsilon_1,\ 1 \rightleftarrows 2,\ \omega^* = \gamma_1 + \gamma_2.
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Аналогично [2], представим усилия, действующие в деформированной оболочке, в виде суммы двух слагаемых, соответствующих основному и дополнительному напряженному состоянию:

$$
T_1 = T_{10} + \overline{T}_1 \quad (1 \rightleftarrows 2); \qquad S = S_0 + \overline{S}
\tag{15}
$$

Геометрия основного состояния считается известной. Усилия и перемещения, соответствующие дополнительному состоянию, определяются из системы уравнений, получаемой в результате линеаризации компонент вариационного уравнения относительно основного состояния. Тогда элементарная работа усилий $T_1^*,\ T_2^*,\ S$ с учетом соотношения (5), выражения для вариации конечных деформаций (7) и представления (15) определяется как

$$
\begin{gathered}
T_1^* \delta\varepsilon_1^* = T_{10}\delta\varepsilon_1 + T_{10}\varepsilon_2\delta\varepsilon_1 + T_{10}\gamma_1\delta\gamma_1 + T_{10}\vartheta_1\delta\vartheta_1 + \overline{T}_1\delta\varepsilon_1,\ 1 \rightleftarrows 2 \\
S\delta\omega^* = S_0\left(\delta\gamma_1 + \delta\gamma_2\right) + S_0\left(\varepsilon_2\delta\gamma_1 + \gamma_1\delta\varepsilon_2 + \varepsilon_1\delta\gamma_2 + \gamma_2\delta\varepsilon_1 + \vartheta_1\delta\vartheta_2 + \vartheta_2\delta\vartheta_1\right) + \\
+ \overline{S}\left(\delta\gamma_1 + \delta\gamma_2\right)
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Поверхностная нагрузка также представляется в виде суммы двух слагаемых, соответствующих основному и дополнительному напряженному состоянию. Введя вектор нагрузки $\vec{f}^{\,T} = \left\{ f_1 \quad f_2 \quad f_3 \right\}$, компонентами которого являются ее проекции на координатные оси деформированной поверхности оболочки, запишем указанное представление в виде

$$
\vec{f} = \vec{f}_0 + \vec{\overline{f}}\,.
\tag{17}
$$

Вектор поверхностной нагрузки, приведенной к метрике исходного состояния, в случае больших деформаций связан с вектором $\vec{f}$ соотношением [23]

$$\vec{f}^{\,*} = (1+e_1)(1+e_2)\sqrt{1-\omega^2}\,\vec{f}\,. \tag{18}$$

Для случая малых деформаций с учетом (14) и (17) соотношение (18) приобретает вид

$$\vec{f}^{\,*} = \vec{\bar{f}} + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\vec{f}_0 + \vec{f}_0\,. \tag{19}$$

Тогда элементарная работа поверхностных сил на приращении вектора полного перемещения $\vec{u}^{\,T} = \{u \quad v \quad w\}$

$$\vec{f}^{\,*T}\cdot\delta\vec{u} = \vec{f}_0^{\,T}\cdot\delta\vec{u} + \vec{\bar{f}}^{\,T}\cdot\delta\vec{u} + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\vec{f}_0\cdot\delta\vec{u}\,. \tag{20}$$

Используя вариационное уравнение принципа возможных перемещений, соотношения (16), (20) и (8), получаем системы дифференциальных уравнений равновесия для основного и дополнительного состояний.

Для основного состояния уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T_{10}B}{\partial\alpha} = \frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot T_{20} - \frac{\partial S_0 A}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}\cdot S_0 - A\cdot B\cdot f_{10};\\
\frac{\partial S_0 B}{\partial\alpha} = \frac{\partial A}{\partial\beta}\cdot T_{10} - \frac{\partial T_{20}A}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot S_0 - A\cdot B\cdot f_{20};\\
\frac{T_{10}}{R_1} + \frac{T_{20}}{R_2} = f_{30}.
\end{gathered} \tag{21}$$

Для дополнительного состояния введем следующие обобщенные усилия:

$$\begin{aligned}
T_{1x} &= \left(\bar{T}_1 + T_{10}\cdot\varepsilon_2 + S_0\cdot\gamma_2\right)\cdot B; & T_{2x} &= \left(T_{20}\cdot\gamma_2 + S_0\cdot\varepsilon_1 + \bar{S}\right)\cdot A;\\
T_{1y} &= \left(\bar{S} + T_{10}\cdot\gamma_1 + S_0\cdot\varepsilon_2\right)\cdot B; & T_{2y} &= \left(\bar{T}_2 + T_{20}\cdot\varepsilon_1 + S_0\cdot\gamma_1\right)\cdot A;\\
T_{1z} &= \left(T_{10}\cdot\vartheta_1 + S_0\cdot\vartheta_2\right)\cdot B; & T_{2z} &= \left(T_{20}\cdot\vartheta_2 + S_0\cdot\vartheta_1\right)\cdot A.
\end{aligned} \tag{22}$$

Уравнения равновесия для дополнительного состояния запишем в обобщенных усилиях:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T_{1x}}{\partial\alpha}=-\frac{\partial T_{2x}}{\partial\beta}-\left[\bar{f}_1+f_{10}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]\cdot A\cdot B-\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}\cdot T_{1y}+\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot T_{2y}+\frac{A}{R_1}\cdot T_{1z};\\
\frac{\partial T_{1y}}{\partial\alpha}=-\frac{\partial T_{2y}}{\partial\beta}-\left[\bar{f}_2+f_{20}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]\cdot A\cdot B-\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot T_{2x}+\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}\cdot T_{1x}+\frac{B}{R_2}\cdot T_{2z};\\
\frac{\partial T_{1z}}{\partial\alpha}=-\frac{\partial T_{2z}}{\partial\beta}+\left[\bar{f}_3+f_{30}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right]\cdot A\cdot B-\frac{A}{R_1}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\cdot T_{1x}-\frac{B}{R_2}\cdot T_{2y}.
\end{gathered}\tag{23}$$

Следующие из принципа возможных перемещений силовые граничные условия для системы (23) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\beta=const:\ \frac{T_{1x}}{B}+T_{10}=T_1^0;\qquad \frac{T_{1y}}{B}+S_0=S_1^0;\quad \frac{T_{1z}}{B}=-Q_1^0\\
&\alpha=const:\ \frac{T_{2x}}{A}+S_0=T_2^0;\qquad \frac{T_{2y}}{A}+T_{20}=S_2^0;\quad \frac{T_{2z}}{A}=-Q_2^0
\end{aligned}$$

Замкнутая система уравнений для дополнительного состояния содержит 18 уравнений и включает в себя уравнения равновесия (23), дополнительные проекционные соотношения (22), геометрические соотношения (2) и физические соотношения, например, для анизотропной оболочки имеющие вид [23]

$$\begin{gathered}
\bar{T}_1=\left(C_{11}+T_{10}\right)\cdot\varepsilon_1+\left(C_{12}-T_{10}\right)\cdot\varepsilon_2+C_{13}\cdot\left(\gamma_1+\gamma_2\right)-T_{10};\\
\bar{T}_2=\left(C_{12}-T_{20}\right)\cdot\varepsilon_1+\left(C_{22}+T_{20}\right)\cdot\varepsilon_2+C_{23}\cdot\left(\gamma_1+\gamma_2\right)-T_{20};\\
S=C_{13}\cdot\varepsilon_1+C_{23}\cdot\varepsilon_2+C_{33}\cdot\left(\gamma_1+\gamma_2\right)-S_0.
\end{gathered}\tag{24}$$

Здесь $C_{ij},\ \ i,j\in[1;3]$ - физические константы материала оболочки.

Смешанные уравнения осесимметричного деформирования технической теории мягких оболочек

В случае осесимметричного деформирования усилия основного состояния определяются из соотношений

$$\frac{dT_{10}B}{d\alpha} = \frac{dB}{d\alpha} \cdot T_{20} - A \cdot B \cdot f_{10};$$
$$\frac{T_{10}}{R_1} + \frac{T_{20}}{R_2} = f_{30}. \tag{25}$$

Система уравнений для определения компонент дополнительного состояния включает уравнения равновесия

$$\frac{dT_{1x}}{d\alpha} = +\frac{1}{A} \cdot \frac{dB}{d\alpha} \cdot T_{2y} + \frac{A}{R_1} \cdot T_{1z} - \left[\bar{f}_1 + f_{10}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right] \cdot A \cdot B;$$
$$\frac{dT_{1z}}{d\alpha} = -\frac{A}{R_1} \cdot T_{1x} - \frac{B}{R_2} \cdot T_{2y} + \left[\bar{f}_3 + f_{30}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right] \cdot A \cdot B, \tag{26}$$

дополнительные проекционные соотношения

$$T_{1x} = \left(\bar{T}_1 + T_{10} \cdot \varepsilon_2 \right) \cdot B;$$
$$T_{2y} = \left(\bar{T}_2 + T_{20} \cdot \varepsilon_1 \right) \cdot A; \tag{27}$$
$$T_{1z} = T_{10} \cdot \vartheta_1 \cdot B,$$

геометрические соотношения

$$\frac{du}{d\alpha} = A \cdot \varepsilon_1 - \frac{A}{R_1} \cdot w;$$
$$\frac{dw}{d\alpha} = -A \cdot \vartheta_1 + \frac{A}{R_1} \cdot u; \tag{28}$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{AB} \cdot \frac{dB}{d\alpha} \cdot u + \frac{1}{R_2} \cdot w,$$

и физические соотношения

$$\bar{T}_1 = \left(C_{11} + T_{10} \right) \cdot \varepsilon_1 + \left(C_{12} - T_{10} \right) \cdot \varepsilon_2 - T_{10};$$
$$\bar{T}_2 = \left(C_{12} - T_{20} \right) \cdot \varepsilon_1 + \left(C_{22} + T_{20} \right) \cdot \varepsilon_2 - T_{20}. \tag{29}$$

Система дополняется кинематическими граничными условиями вида

$$u = u_0; \quad w = w_0$$

и силовыми граничными условиями

$$\frac{T_{1x}}{B} + T_{10} = T_1^0; \quad \frac{T_{1z}}{B} = -Q_1^0.$$

Заключение

В работе получены системы смешанных уравнений теории мягких оболочек для случаев больших и малых деформаций, удобные для расчета составных оболочек. При этом компоненты основного состояния, а также распределенная по поверхности нормальная и касательная к меридиану нагрузки могут меняться по длине оболочек произвольно. Система уравнений осесимметричного деформирования технической теории мягких оболочек может быть приведена к нормальной форме Коши, удобной для применения численных методов непосредственного интегрирования и привлечения стандартных приемов решения плохообусловленных краевых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Москвы (проект 19-38-70005 мол_а_мос).

Библиографический список

1. Усюкин В.И. Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 1. С. 70 – 75.

2. Усюкин В.И. Техническая теория мягких оболочек: Дисс. … д.техн.наук. – М., 1971. – 361 с.

3. Алексеев С.А. Основы общей теории мягких оболочек // В кн.: Расчет пространственных конструкций. – М.: Стройиздат, 1966. – С. 31 – 52.

4. Григорьев А.С. О теории и задачах равновесия оболочек при больших деформациях // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 1. С. 163 – 168.

5. Магула В.Э. Основные зависимости теории мягких оболочек // Труды Николаевского кораблестроительного института. 1973. № 78. С. 3 – 15.

6. Друзь И.Б., Друзь Б.И. Статика мягких оболочек и емкостей при осесимметричной нагрузке. – Владивосток: Морской государственный университет им. Г.И. Невельского, 2012. – 122 с.

7. Ермолов В.В. и др. Пневматические конструкции воздухоопорного типа. – М.: Стройиздат, 1973. – 287 с.

8. Балабух Л.И., Усюкин В.И. Приближенная теория мягких оболочек вращения // Труды XIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин (Ростов-на-Дону, 1971). – М.: Наука, 1973. С. 230 – 235.

9. Каюк Я.Ф., Ващенко Л.Ф. Основные соотношения геометрически нелинейной теории мягких оболочек вращения // Доклады АН УССР. Сер. А. 1976. № 8. С. 715 – 719.

10. Ржаницын А.Р. Расчет упругих оболочек произвольного очертания в прямоугольных координатах // Строительная механика и расчет сооружений. 1977.

№ 1. С. 21 – 28.

11. Сергеев Б.И. Расчет мягких конструкций гидротехнических сооружений. – Новочеркасск: Изд-во НИМИ, 1973. – 176 с.

12. Отто Ф., Тростель Р. Пневматические строительные конструкции. – М.: Стройиздат, 1967. – 320 с.

13. Ридель В.В., Гулин Б.В. Динамика мягких оболочек. – М.: Наука, 1990. – 205 с.

14. Гимадиев Р.Ш. Динамика мягких оболочек парашютного типа. – Казань: Казанский энергетический государственный университет, 2006. – 208 с.

15. Гимадиев Р.Ш., Гимадиева Т.З., Паймушин В.Н. О динамическом процессе раздувания тонких оболочек из эластомеров под действием избыточного давления // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. Вып. 2. С. 236 – 248.

16. Друзь Б.И. Нелинейные уравнения теории колебаний мягких оболочек // Сообщения ДВВИМУ по судовым мягким оболочкам. 1973. № 24. С. 34 – 50.

17. Усюкин В. И., Терещенко В. А., Сдобников А. Н., Панов С. В., Борсов Р.Г. Расчет пневматических строительных конструкций с использованием ЭВМ // Доклады Международной конференции по облегченным пространственным конструкциям для строительства в обычных и сейсмических районах. 1977. С. 146 – 151.

18. Цыхановский В.К. Исследование напряженно-деформированного состояния пневмонапряженных мягких оболочек методом конечных элементов: Дисс. … канд.техн.наук. – Киев, 1982. – 223 с.

19. Кислоокий В.Н. Исследование статики и динамики висячих,

пневмонапряженных и комбинированных систем методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. 1977. № 4. С. 18 – 20.

20. Сдобников А.Н. Применение метода конечных элементов к расчету мягких оболочек вращения // Сообщения Дальневосточного высшего инженерно-морского училища. 1976. № 34. С. 15 – 20.

21. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=104174

22. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=98866

23. Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники. – М.: Машиностроение, 1988. – 392 с.

24. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1948. – 212 с.