

## Момент вектора Пойнтинга не является спином

Р. И. Храпко

*Всеобщее мнение, что момент вектора Пойнтинга является спином, является всеобщим заблуждением, обусловленным серьезным дефектом общей теории поля. Это доказывается на примере Лагерр-Гауссова луча с круговой поляризацией без азимутальной фазовой структуры. Показано, что момент вектора Пойнтинга в этом луче представляет орбитальный момент импульса, а не спин. Между тем, рассматриваемый луч, как и плоская электромагнитная волна круговой поляризации, очевидно содержат спин. Однако стандартная электродинамика его не замечает. Тензор спина стандартной электродинамики равен нулю. Поэтому упомянутое заблуждение порождает массу конфликтов и парадоксов, касающихся момента импульса электромагнитного поля. Единственный способ разрешить конфликты и парадоксы – это использовать тензор спина, введенный нами в электродинамику и демонстрируемый в этой статье.*

Согласно всеобщему мнению, момент вектора Пойнтинга, то есть выражение

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \langle \mathbf{p} \rangle = \mathbf{r} \times \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle \quad (1)$$

представляет усредненную плотность полного момента импульса, то есть включает в себе и спиновый и орбитальный моменты импульса электромагнитного поля, когда они присутствуют в этом поле. (Здесь  $\mathbf{p} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  есть объемная плотность импульса или плотность потока массы-энергии, то есть вектор Пойнтинга, и мы положили  $\varepsilon_0 = 1$ ). Мы намерены опровергнуть это мнение на конкретном примере.

Лагерр-Гауссовый луч круговой поляризации без азимутальной фазовой структуры типа  $\mathbf{L}\mathbf{G}_{p=1}^{l=0}$  задается следующими формулами:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \exp[i(z-t)][\mathbf{x} + i\mathbf{y} + \mathbf{z}(i\partial_x - \partial_y)]\tilde{u}(\rho, z), \quad \tilde{\mathbf{B}} = -i\tilde{\mathbf{E}}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad (2)$$

$$\tilde{u}(\rho, z) = \frac{C}{w(z)} \left(1 - \frac{2\rho^2}{w^2}\right) \exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2}(1 - i2z) - itg^{-1}2z\right], \quad w^2 = (1 + 4z^2). \quad (3)$$

Для простоты записи мы положили:  $k = \omega = 1$ , релеевская длина  $z_R = 1/2$ , талия луча  $w(0) = w_0 = 1$ ;  $C$  есть нормировочная константа, символ ‘breve’ отмечает комплексные вектора и числа, за исключением  $i$ . Согласно всеобщему мнению, такой луч содержит только спиновую плотность (которая считается моментом угловой компоненты вектора Пойнтинга  $p^\phi$ )

$$s_z(\rho, z) = \rho p^\phi = -\rho \partial_\rho (u^2) / 2, \quad u = |\tilde{u}|, \quad p^\phi = \langle \mathbf{p} \rangle^\phi, \quad (4)$$

и не содержит орбитального момента импульса [1 – 6]. Формула (4) может быть легко получена из (1) и (2). Однако она многократно приведена в литературе. Например, это формула (10) из [1], (4) из [3], (1) из [6],

Мы намерены показать, что, вопреки всеобщему мнению,  $Z$  - компонента выражения (1), которая имеет вид  $\rho p^\phi$  (4), представляет орбитальный момент импульса, а не спин. Действительно, рассмотрим сечение луча (2), (3) при  $z = 0$ . Имеем:

$$u(\rho) = C(1 - 2\rho^2) \exp(-\rho^2) \quad (5)$$

Вычислим  $p^\phi$ , подставив (5) в (4):

$$p^\phi = -\partial_\rho(u^2)/2 = -C^2 \partial_\rho[(1 - 2\rho^2)^2 \exp(-2\rho^2)]/2 = 2C^2(2\rho^2 - 1)(2\rho^2 - 3)\rho \exp(-2\rho^2). \quad (6)$$

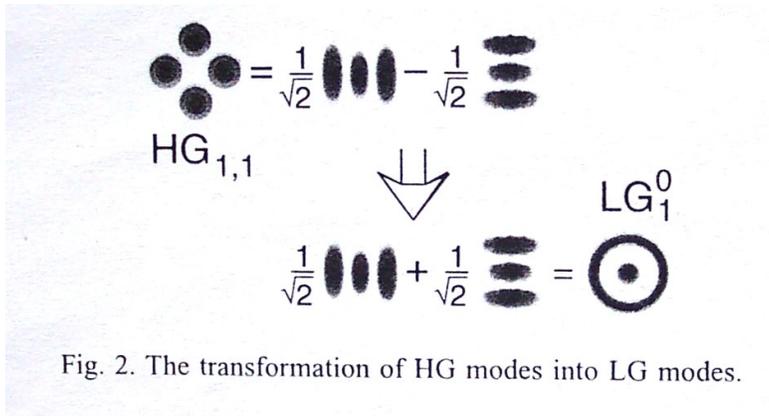


Fig. 2. The transformation of HG modes into LG modes.

Луч типа  $\text{LG}_1^0$  содержит темное кольцо радиуса  $\rho = 1/\sqrt{2} = \rho_1$  и светлое кольцо радиуса  $\rho = \sqrt{3/2} = \rho_2$ . Это можно видеть на негативном изображении, взятом из [2]. Между этими кольцами, из-за положительной производной  $\partial_\rho$ , электромагнитная масса-энергия вращается в противоположную сторону по сравнению с вращением векторов

$\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Мы имеем  $p^\phi > 0$  для  $\rho < \rho_1$  и для  $\rho > \rho_2 = \sqrt{3/2}$ , однако  $p^\phi < 0$  при  $\rho_1 < \rho < \rho_2$ . Такое поведение массы-энергии не совместимо с представлением о спине.

Замбрини и Барнетт [6] подсчитывают момент импульса части луча относительно оси луча

$$dJ_z = \int dz \int_{\phi_a}^{\phi_b} d\phi \int_{\rho_a}^{\rho_b} \rho p^\phi \rho d\rho = -\int dz \int_{\phi_a}^{\phi_b} d\phi \int_{\rho_a}^{\rho_b} d\rho \rho^2 \partial_\rho(u^2)/2, \quad (7)$$

однако перенос координатной системы очевидно изменяет этот момент. Это ясно показывает, что момент вектора Пойнтинга не является внутренним моментом импульса. Момент вектора Пойнтинга представляет собой орбитальный момент импульса, а не спин, и равенство (4) должно быть записано как

$$l_z(\rho, z) = \rho p^\phi, \quad (8)$$

Если наш луч поглощается мишенью, эта мишень испытывает плотность орбитальной силы

$\langle T^{\phi z} \rangle$ . Эта компонента тензора Максвелла может быть легко вычислена [7].

$$\langle T^{xz} \rangle = -\Re(\check{E}_x \bar{E}_z + \check{B}_x \bar{B}_z)/2 = -\Re(\check{E}_x \bar{E}_z) = \partial_y(u^2)/2, \quad \langle T^{yz} \rangle = -\partial_x(u^2)/2, \quad \langle T^{\phi z} \rangle = -\partial_\rho(u^2)/2. \quad (9)$$

(черточка отмечает комплексно сопряженные комплексные числа). Это означает, что элемент поверхности мишени  $da_z = \rho d\phi d\rho$  испытывает силу

$$dF^\phi = \langle T^{\phi z} \rangle da_z = -\partial_\rho(u^2)\rho d\phi d\rho/2. \quad (10)$$

Эта сила положительна,  $dF^\phi > 0$ , если интегрирование Замбрини производится в области центрального светлого пятна,  $\rho < \rho_1$  или снаружи от светлого кольца,  $\rho > \rho_2$ , однако эта сила направлена в противоположную сторону,  $dF^\phi < 0$ , в промежуточной области  $\rho_1 < \rho < \rho_2$ . Спин не может проявляться подобным образом. Заметьте, эта промежуточная область вдвое больше центрального светлого пятна.

Вообразите, что наша мишень разделена на три концентрические части окружностями радиусов  $\rho_1 = 1/\sqrt{2}$  и  $\rho_2 = \sqrt{3}/2$ . Тогда внутренний диск ( $\rho < \rho_1$ ) и внешнее кольцо ( $\rho > \rho_2$ ) вращаются по часовой стрелке, а промежуточное кольцо ( $\rho_1 < \rho < \rho_2$ ) вращается в противоположную сторону. Рассуждая подобным образом, следует заключить, что микро частицы, захваченные лучом около окружности максимальной интенсивности на  $\rho_2$ , не вращаются вокруг оси луча, так как  $T^{\phi z}(\rho_2) = 0$ . Однако, частицы, диффундировавшие к оси ( $\rho < \rho_2$ ), вращаются против часовой стрелки, а частицы, диффундировавшие наружу ( $\rho > \rho_2$ ), вращаются по часовой стрелке. Это доказывает, что сила (10) не имеет отношения к спину.

Займемся теперь вычислением отношения потока энергии к потоку момента импульса в нашем луче, то есть отношением мощности к моменту силы. Для спина это отношение равно угловой частоте  $\omega = 1$ . Выражения (2) позволяют подсчитать  $z$ -компоненту вектора Пойнтинга луча.

$$\langle \mathbf{p} \rangle_z = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle_z = \Re(\check{E}_x \bar{B}_y - \check{E}_y \bar{B}_x) / 2 = \Re(\check{E}_x i \bar{E}_y) = u^2. \quad (11)$$

Рассмотрим интеграл от вектора Пойнтинга, то есть мощность  $P(\rho)$ , поставляемую лучом внутри окружности радиуса  $\rho$ , и момент силы  $\tau(\rho)$ , действующий внутри той же окружности:

$$P(\rho) = \int_0^\rho u^2 2\pi\rho d\rho, \quad \tau(\rho) = \int \rho dF^\phi = -\int_0^\rho \rho^2 \pi \partial_\rho(u^2) d\rho = P(\rho) - \rho^2 \pi u^2(\rho). \quad (12)$$

При интегрировании по всей площади поперечного сечения луча имеем  $P/\tau = 1 = \omega$ . Однако выражения (12) указывают на недостаток момента силы в центральной части мишени. Часть мишени вблизи оси луча почти не получает момент импульса, хотя поток энергии здесь максимальный. Используя два члена разложения Тейлора функции  $u(\rho)$ ,  $u(\rho) \approx C(1 - 3\rho^2)$ , получаем  $P(\rho) \approx \rho^2 \pi u^2$ , and  $\tau(\rho) \approx 0$ .

Дефицит момента импульса вблизи оси луча впервые был отмечен в работе [8]. Это обстоятельство еще раз доказывает, что момент импульса (1) является орбитальным, а не спиновым.

В то же время, если мы выделим и изолируем небольшую центральную часть мишени и осветим ее нашим лучом или плоской волной круговой поляризации, то эта часть будет получать  $j_z$ , согласно

(1), в единицу времени и испытывать момент силы, равный  $P / \omega$ , потому что  $-j_z$  в единицу времени будет уноситься *краем тени* этой части мишени. Это хорошо объясняется в [9]. Однако ни плоская волна, ни центральная часть нашего луча, сами по себе, то есть без взаимодействия с небольшой частью мишени, не несут момент импульса типа (1), который является орбитальным моментом импульса.

Между тем, спин очевидно присутствует в свете круговой поляризации. Но он не имеет отношения к формуле (1). Стандартная электродинамика не знает спина. Спин стандартной электродинамики равен нулю, вследствие серьезного дефекта классической теории поля. Это порождает много конфликтов и противоречий, связанных с моментом импульса электромагнитного поля. Я приведу несколько цитат, подтверждающих этот феномен.

«Экспериментальные результаты оказываются в конфликте с теоретическим рассмотрением»<sup>1</sup> [6].

«Если выражение (1) действительно является плотностью потока момента импульса, то момент импульса плоской волны круговой поляризации должен быть равен нулю. Так как классическая плотность момента импульса должна быть в согласии с классическим пределом плотности момента импульса квантовой механики, оно не должно быть верным»<sup>2</sup> [10].

«Предсказывается, что момент импульса классической электромагнитной плоской волны равен нулю точно. Однако экспериментально было найдено, что конечная часть такой волны несет момент импульса»<sup>3</sup> [11].

«Плоская волна круговой поляризации имеет плотность импульса только в направлении распространения. Поэтому векторное произведение с радиус-вектором, которое дает плотность момента импульса, не имеет составляющей в направлении распространения. Значит, такой луч не может передать момент импульса мишени. Однако Бет смог осуществить такую передачу – парадокс»<sup>4</sup> [3].

Отметим, что, как показывает опыт, упомянутые выше микро частицы, которые вращаются в ту или другую сторону вокруг оси луча за счет орбитального момента импульса, все вращаются вокруг собственных осей в направлении вращения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  полей. Единственный способ объяснить это явление и разрешить конфликты – это использовать тензор спина электродинамики [12 – 18]

$$Y_{\alpha\beta\gamma} = A_{[\alpha} \partial_{|\gamma|} A_{\beta]} + \Pi_{[\alpha} \partial_{|\gamma|} \Pi_{\beta]}, \quad 2\partial_{[\alpha} A_{\beta]} = F_{\alpha\beta}, \quad 2\partial_{[\alpha} \Pi_{\beta]} = -F_{\alpha\beta}^*, \quad (13)$$

<sup>1</sup> Experimental observations appear to be in conflict with theoretical considerations

<sup>2</sup> If the above expression (1) was in fact the correct angular momentum flux density, then the angular momentum of a circularly polarized plane would be zero. Since the correct classical angular momentum density must agree with the classical limit of the quantum angular momentum density, this must be incorrect.

<sup>3</sup> The angular momentum of a classical electromagnetic plane wave of arbitrary extent is predicted to be exactly zero. However, finite sections of circularly polarized plane waves are found experimentally to carry angular momentum.

<sup>4</sup> A circularly polarised plane wave has a linear momentum density only in the z-direction. When this is crossed with  $r$  to give the angular momentum density, there is no contribution in the z-direction. Thus, such a beam has no angular momentum to transfer to a waveplate. Yet, Beth was able to make such a transfer – a paradox.

где  $A_\alpha$ ,  $\Pi_\alpha$  — магнитный и электрический векторные потенциалы,  $F_{\alpha\beta}$ ,  $F_{\alpha\beta}^* = e_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu}$  — электромагнитный тензор и дуальный электромагнитный тензор. Таким образом, уравнение (1) должно быть заменено на

$$j_z = \rho p^\phi + Y^{\rho\phi t} \quad (14)$$

Уравнение (14) объясняет [16, 17] результат эксперимента Бета [19]. Тензор спина (13) используется в работах, представленных на сайте [www.sciprint.org](http://www.sciprint.org).

Результат (13), (14) был направлен в ЖЭТФ 27 января 1999 г. Статья была отклонена, потому что ее публикация была признана нецелесообразной. Результат (13) был отклонен более 350 раз научными журналами. Например (я указываю примерное число отклонений в скобках): Письма в ЖЭТФ (8), ЖЭТФ (13), ТМФ (10), УФН (9), Физика (70), АЖП (14), ЕЖП (4), ЕПЛ (5), ПРА (4), ПРД (4), ПРЕ (2), АПП (5), ФП (6), ПЛА (9), ОС (2), ЖРА (6), ЖРВ (1), ЖМР (5), ЖОРА (3), ЖОСАВ (1), ЖМО (3), ЖСР (1), ОЛ (3), ЖНП (2), МРЕЖ (3), arXiv (70).

Исключением в мире научных журналов оказался журнал «Измерительная техника», свободный от номенклатурных теоретиков [16, 17].

Я глубоко благодарен профессору Роберту Ромеру за публикацию моего вопроса [8], а также профессору Тимо Ниеминену за плодотворную дискуссию в интернете (Newsgroups: sci.physics.electromag).

### *Список литературы*

1. Allen L., Beijersbergen M. W., Spreeuw R. J. C., and Woerdman J. P. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. // Phys. Rev. A. – 1992, **45**.- p.8185-8189
2. Allen L., Padgett M. J., Babiker M. Progress in Optics XXXIX. – Amsterdam: Elsevier, 1999.-564 p.
3. Allen L., Padgett M. J. The Poynting vector in Laguerre-Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density. // Optics Commun. – 2000, **184**.- p.76-71.
4. O’Neil A. T. et al., Intrinsic and Extrinsic Nature of the Orbital Angular Momentum of a light beam. //Phys. Rev. Lett. – 2002, **88**, 053601
5. Loudon R. Theory of the forces by Laguerre-Gaussian light beams on dielectrics. // Phys. Rev. A. – 2003 **68**, 013806
6. Zambrini R., Barnett S. M. Local transfer of optical angular momentum to matter. // J. Mod. Optics. – 2005, **52**.- p.1045-1052
7. Jackson J. D. Classical Electrodynamics. - Wiley, 1999.- 808 p.

8. Khrapko R.I. Does plane wave not carry a spin? //Amer. J. of Physics. – 2001, **69**.- p.405.
9. Simmons J. W., Guttman M. J. States, Waves and Photons. - Addison-Wesley, Reading, MA, 1970.- 520 p.
10. T. A. Nieminen et al. Angular momentum of a strongly focused Gaussian beam. -  
<http://arXiv.org/abs/physics/0408080> (18.08.2004)
11. Stewart A.M. Angular momentum of the electromagnetic field: the plane wave paradox resolved. //Eur. J. Phys. – 2005, **26**.- p.635-641
12. R.I. Khrapko. Violation of the gauge equivalence. - <http://arXiv.org/abs/physics/0105031> (11.12.2001)
13. Храпко Р.И. Спин классической электродинамики. //Вестник Российского университета дружбы народов, Серия Физика. – 2002, № 10(1).- с.40-48
14. Храпко Р.И. Локализация энергии-импульса и спин.// Вестник Российского университета дружбы народов, Серия Физика. – 2002, № 10(1).- с.35-39.
15. Khrapko R.I. Classical spin in space with and without torsion. // Gravitation & Cosmology – 2004, **10**, No. 1-2.- p.91.
16. Храпко Р.И. Экспериментальная проверка электродинамики Максвелла.// Измерительная техника. – 2003, № 4.- с.3-5.
17. Khrapko R.I. Experimental verification of Maxwellian electrodynamics. // Measurement Techniques – 2003, **46**, No. 4.- p.317.
18. R. I. Khrapko. A circularly polarized beam carries the double angular momentum. -  
[mp\\_arc@mail.ma.utexas.edu](mailto:mp_arc@mail.ma.utexas.edu) REQUEST: send papers NUMBER: 03-311
19. Beth R.A. Direct Detection of the Angular Momentum of Light. //Phys. Rev. – 1935, **48**.- p.471

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

*Храпко Радий Игоревич, доцент кафедры физики Московского авиационного института  
(Государственного технического университета), к.ф.-м.н. E-mail: [khrapko\\_ri@hotmail.com](mailto:khrapko_ri@hotmail.com)*

121433, Москва, Б. Филевская, 43 – 92, т. 1446312