УДК 514.181.2:519.67

Применение сплайнов на равномерной сетке в задаче твердотельного моделирования

Битюков Ю.И., Денискин Ю.И., Мирошниченко П.В.

Аннотация. Статья посвящена развитию геометрической модели в рамках одного из важнейших методов получения изделий из композиционных материалов – намотки непрерывными волокнами в направлении действия силы и родственного ему процесса автоматизированной выкладки. В статье описываются единообразный способ задания поверхностей зависимых сечений с криволинейной образующей и способ твердотельного моделирования оболочки, получаемой методами намотки или выкладки.

Ключевые слова: сплайн, нормализованный сплайн, геометрическое моделирование, аппроксимация, твердотельное моделирование

Введение

Намотка является одним из важнейших методов получения изделий из композиционных материалов. В этом процессе, осуществляемом на станках с числовым программным управлением, на поверхность оправки укладывается с натяжением непрерывная лента, составленная из однонаправленных волокон, нитей, прядей или жгутов, пропитанных связующим. После получения необходимой толщины и структуры оболочки производится полимеризация, окончательное отверждение связующего.

В процессе намотки лента может не прилегать к поверхности или, например, сползать с заданной кривой, по которой она укладывается. Отследить все эти моменты можно в виртуальной модели данного процесса, для которого необходимо создание геометрической модели. Построение обобщенной геометрической модели укладки ленты на криволинейную поверхность было описано в статье [1]. В этой статье любая намотка («сухая» и «мокрая») моделируется единым образом – с помощью гладкого отображения прямоугольника в трехмерное Евклидово пространство. В статье [1] также были описаны методики анализа схемы укладки ленты на предмет равновесности нитей лены и их прилегания к поверхности.

Во всех построениях использовались поверхности класса C^2. Заметим, что в процессе укладки ленты на поверхность только ее первые слои укладываются на данную поверхность. Остальные слои укладываются на поверхность, образованную предыдущими слоями. Таким образом, формируемая поверхность непрерывно меняется. Эти изменения естественным образом влияют как на анализ схемы укладки ленты, так и на закон движения нитераскладывающего механизма станка, который был описан в статье [2]. Чтобы учесть этот факт, необходима методика модификации формы поверхности, в соответствии с толщиной ленты [3]. Отметим, что, представленная в статье [3] методика модификация поверхности применяется к классу дважды непрерывно дифференцируемых поверхностей зависимых сечений с переменной замкнутой криволинейной образующей, которая в процессе изменения остается инцидентной плоскости, параллельной координатной плоскости. Обозначим такой класс поверхностей $C^2_{\Pi_1}$. В данной статье предлагается единообразный метод описания поверхностей класса $C^2_{\Pi_1}$. Отметим, что поверхности технологических оправок часто состоят из нескольких частей – конструктивной (поверхность изделия) и технологической, служащей для разворота ленты. Такие поверхности могут задаваться различными параметрическими представлениями. Следовательно, для работы с такой поверхностью в виртуальной модели, возникает проблема гладкого соединения разных частей, согласования параметризаций на разных частях. При единообразном задании поверхностей класса $C^2_{\Pi_1}$ все указанные проблемы автоматически устраняются, так как вся поверхность технологической оправки (все ее части) будет описана одной дважды непрерывно дифференцируемой, явно заданной вектор-функцией. Это существенно упрощает компьютерное задание поверхностей рассматриваемого класса.

При расчете параметров оболочки, получающейся методом намотки или выкладки, возникают важные геометрические задачи построения промежуточных поверхностей деформируемых твердых тел многослойной структуры. В статье предлагается способ моделирования тела, получаемого методами намотки или выкладки.

Об одном методе аппроксимации функций

Пусть на отрезке [a;b] задана сетка $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Обозначим $\mathbf{S}_{m,\nu}(\Delta)$ линейное пространство сплайнов степени m дефекта ν с узлами на сетке Δ. Элементами этого пространства являются функции $s_{m,\nu}(x)$, удовлетворяющие условиям: $s_{m,\nu} \in C^{m-\nu}[a;b]$;

на каждом отрезке $[x_i; x_n]$, $i = 0,1,...,n-1$, функция $s_{m,\nu}(x)$ является многочленом степени m. Известно [4], что размерность пространства $\mathbf{S}_{m,\nu}(\Delta)$ равна m+1+ν(n-1). Далее будем рассматривать пространство $\mathbf{S}_{3,1}(\Delta)$, так как используемые поверхности должны быть дважды непрерывно дифференцируемые. В пространстве $\mathbf{S}_{m,1}(\Delta)$ существует базис, состоящий из финитных функций $N_{m+1,i}(x)$, называемых B–сплайнами [4]. Расширим сетку Δ, добавив дополнительно точки $x_{-m} < ... < x_{-1} < a$, $b < x_{n+1} < ... < x_{n+m}$. Тогда функции $N_{m,i}(x)$ можно определить следующим соотношением [4]:

$$N_{m,i}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-m+1}} N_{m-1,i}(x) + \frac{x - x_{i-m}}{x_{i-1} - x_{i-m}} N_{m-1,i-1}(x); \qquad N_{1,i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_{i-1}; x_i); \\ 0, & x \notin [x_{i-1}; x_i). \end{cases}$$

Итак, любую функцию $s_{3,1}(x)$ можно представить в виде линейной комбинации B–сплайнов $s_{3,1}(x) = \sum_{i=0}^{n+2} \eta_i \cdot N_{4,i+1}(x)$.

Пусть известны значения функции f в узлах сетки $f_i = f(x_i)$, $i = 0,1,...,n$. Тогда, как известно [4], в пространстве $\mathbf{S}_{3,1}(\Delta)$ можно найти единственную функцию $s_{3,1}(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$s_{3,1}(x_i) = f_i,\ i = 0,1,...,n; \quad (s_{3,1})'(x_0) = f'(x_0); \quad (s_{3,1})'(x_n) = f'(x_n). \tag{1}$$

Введем обозначения $\omega(f,\delta) = \max_{\substack{x, x+h \in [a;b], \\ |h| \le \delta}} |f(x+h) - f(x)|$, $\delta \in (0; b-a)$ модуль непрерывности функции f и $D^{(\alpha)} f$ - производная функции f порядка α. Тогда, если $f \in C^k[a;b]$, $k = 1,2$ и $\bar{h} = \max_i |x_{i+1} - x_i|$, то справедливы оценки [4]:

$$\left\| D^{(\beta)} s_{3,1} - D^{(\beta)} f \right\|_{C[a;b]} \le M_\beta^{(k)} \bar{h}^{k-\beta} \omega\left(D^{(k)} f, \bar{h}\right),\ 0 \le \beta \le k, \tag{2}$$

где $M_0^{(1)} = 9/8$; $M_1^{(1)} = 4$; $M_0^{(2)} = 19/96$; $M_1^{(2)} = 2/3$; $M_2^{(2)} = 4$.

Как было показано в статье [5], если сетка Δ равномерная $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0,1,...,n$, $h = (b-a)/n$, то функцию $s_{3,1}(x)$ можно выписать в явном виде:

$$s_{3,1}(x) = \sum_{i=0}^{n+2} \eta_i \cdot N_{4,i+1}(x),$$

$$\eta_j = \begin{pmatrix} \dfrac{\Upsilon_{n+1}(j,1)}{\mathrm{E}(n+1)} & \dfrac{\Upsilon_{n+1}(j,2)}{\mathrm{E}(n+1)} & \cdots & \dfrac{\Upsilon_{n+1}(j,n+1)}{\mathrm{E}(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cdot f_0 + h \cdot f'(x_0) \\ 6 \cdot f_1 \\ \cdots \\ 6 \cdot f_{n-1} \\ 3 \cdot f_n - h \cdot f'(x_n) \end{pmatrix},\ j = 1,...,n+1,$$

$$\eta_0 = \eta_2 - 2h \cdot f'(x_0),\ \eta_{n+2} = \eta_n + 2h \cdot f'(x_n),$$

где

$\Upsilon_k(i,j) = (-1)^{i+j} \cdot \Lambda(\min(i,j)-1) \cdot \Lambda(k - \max(i,j)),\ i,j = 1,\dots,k$, $\mathrm{E}(k) = 2 \cdot \Lambda(k-1) - \Lambda(k-2)$, $k \ge 3$,

$\Lambda(k) = \dfrac{(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k}{\sqrt{3}} - \dfrac{(2+\sqrt{3})^{k-1} - (2-\sqrt{3})^{k-1}}{2\sqrt{3}}$, $k \ge 0$.

Следует заметить, что вектор $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1 \dots \eta_{n+1})^T$ является решением уравнения $A_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta} = (3f_0 + hf'(x_0),\ 6f_1,\dots,6f_{n-1}, 3f_n - hf'(x_n))^T$, где матрица

$$A_{n+1} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n+1} = \begin{pmatrix} 2100\dots000 \\ 1410\dots000 \\ 0141\dots000 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0000\dots141 \\ 0000\dots012 \end{pmatrix}$$

имеет строгое диагональное преобладание, причем $\min\limits_{1 \le i \le n+1} \left\{ |a_{ii}| - \sum\limits_{j \ne i} |a_{ij}| \right\} = 1$.

Пусть функция f определена на отрезке $[a-\varepsilon;\ b+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ и равномерная сетка

$\Delta:\ x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+3};$
$x_i = a + ih,\ i = -3,\dots,n+3;\ h = (b-a)/n$

выбрана так, что $x_{-1},\ x_{n+1} \in [a-\varepsilon; b+\varepsilon]$ и $f_i = f(x_i),\ i = -1,\dots,n+1$. Рассмотрим кубический сплайн $s_{3,1}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n+2} \eta_i \cdot N_{4,i+1}(x)$, удовлетворяющий условиям интерполяции

$s_{3,1}(x) = f_i,\ \ i = 0,1,\dots,n$ и граничным условиям

$(s_{3,1})'(x_0) = (f_1 - f_{-1})/(2h);\ \ (s_{3,1})'(x_n) = (f_{n+1} - f_{n-1})/(2h)$.

Лемма 1. Если функция $f \in C^k[a-\varepsilon; b+\varepsilon],\ k = 0,1,2$, то справедливы оценки: $\left\| D^{(\beta)} f - D^{(\beta)} s_{3,1} \right\|_{C[a;b]} \le Q_\beta^{(k)} h^{k-\beta} \omega(D^{(k)} f, h),\ 0 \le \beta \le k$,

где $Q_0^{(0)} = 6;\ Q_0^{(1)} = 33/8;\ Q_1^{(1)} = 10;\ Q_0^{(2)} = 163/96;\ Q_1^{(2)} = 11/3;\ Q_2^{(2)} = 10$.

Доказательство. Пусть $f \in C[a-\varepsilon; b+\varepsilon]$. Введем обозначение $\boldsymbol{\eta}_{i,j} = (\eta_i \dots \eta_j)^T$. Вектор $\boldsymbol{\eta}_{1,n+1} = (\eta_1 \dots \eta_{n+1})^T$ является решением уравнения

$A_{n+1} \cdot \boldsymbol{\eta} = (3f_0 + 0{,}5(f_1 - f_{-1}),\ 6f_1,\dots,6f_{n-1}, 3f_n - 0{,}5(f_{n+1} - f_{n-1}))^T$.

Введем следующие обозначения $\tilde{f}_0 = f_1, \tilde{f}_1 = f_0, ..., \tilde{f}_{n+1} = f_n$, $\tilde{f}_{n+2} = f_{n-1}$, $\tilde{\mathbf{f}}_{i,j} = \left(\tilde{f}_i, ..., \tilde{f}_j\right)^T$. Тогда, очевидно, имеет место равенство

$$A_{n+1} \cdot \left(\boldsymbol{\eta}_{1,n+1} - \tilde{\mathbf{f}}_{1,n+1}\right) = \left(\frac{f_0 - f_1}{2} + \frac{f_0 - f_{-1}}{2}, 2f_1 - f_0 - f_2, ..., 2f_{n-1} - f_{n-2} - f_n, \frac{f_n - f_{n+1}}{2} + \frac{f_n - f_{n-1}}{2}\right)^T.$$

Так как матрица системы имеет строгое диагональное преобладание [6], то справедливы оценки $\left\|\boldsymbol{\eta}_{1,n+1} - \tilde{\mathbf{f}}_{1,n+1}\right\| \le 2\omega(f,h)$ (здесь и в дальнейшем для вектора $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)^T$ его норма $\|\mathbf{e}\| = \max\limits_i |e_i|$). Из равенств $\eta_0 = \eta_2 - f_1 + f_{-1}$, $\eta_{n+2} = \eta_n + f_{n+1} - f_{n-1}$, следует $\left\|\boldsymbol{\eta}_{0,n+2} - \tilde{\mathbf{f}}_{0,n+2}\right\| \le 4\omega(f,h)$. Так как кубические B-сплайны неотрицательны и образуют на отрезке $[a;b]$ разбиение единицы, то

$$\left|f(x) - s_{3,1}(x)\right| \le \sum_{i=0}^{n+2}\left|f(x) - \tilde{f}_i\right| \cdot N_{4,i+1}(x) + \sum_{i=0}^{n+2}\left|\eta_i - \tilde{f}_i\right| \cdot N_{4,i+1}(x) \le \sum_{i=0}^{n+2}\left|f(x) - \tilde{f}_i\right| \cdot N_{4,i+1}(x) + 4\omega(f,h).$$

Заметим, что для значений $x \in [x_j; x_{j+1}]$ выполняется

$$\sum_{i=0}^{n+2}\left|f(x) - \tilde{f}_i\right| \cdot N_{4,i+1}(x) = \left|f(x) - \tilde{f}_j\right| \cdot N_{4,j+1}(x) + \left|f(x) - \tilde{f}_{j+1}\right| \cdot N_{4,j+2}(x) +$$
$$+ \left|f(x) - \tilde{f}_{j+2}\right| \cdot N_{4,j+3}(x) + \left|f(x) - \tilde{f}_{j+3}\right| \cdot N_{4,j+4}(x) \le 2\omega(f,h).$$

Пусть теперь $f \in C^1[a-\varepsilon; b+\varepsilon]$. Рассмотрим сплайн $\sigma_{3,1}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n+2}\zeta_i \cdot N_{4,i+1}(x)$, удовлетворяющий условиям интерполяции $\sigma_{3,1}(x_i) = f_i$, $i = 0,1,...,n$ и граничным условиям $\sigma'_{3,1}(x_0) = f'(x_0)$, $\sigma'_{3,1}(x_n) = f'(x_n)$. Тогда для него будут справедливы оценки (2). Пусть $\boldsymbol{\zeta}_{i,j} = \left(\zeta_i, ..., \zeta_j\right)^T$. Тогда, очевидно, выполняются следующие равенства

$$A_{n+1} \cdot \left(\boldsymbol{\eta}_{1,n+1} - \boldsymbol{\zeta}_{1,n+1}\right) = \left(h\left(\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - f'(x_0)\right), 0, ..., 0, h\left(-\frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2h} + f'(x_0)\right)\right)^T;$$

$$\eta_0 - \zeta_0 = \eta_2 - \zeta_2 - 2h\left(\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - f'(x_0)\right); \quad \eta_{n+2} - \zeta_{n+2} = \eta_n - \zeta_n + 2h\left(\frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2h} - f'(x_0)\right).$$

В силу теоремы Лагранжа

$$h\left|f'(x_0) - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}\right| = h\left|f'(x_0) - \frac{(f_1 - f_0) + (f_0 - f_{-1})}{2h}\right| =$$
$$= \frac{h}{2}\left|\left(f'(x_0) - f'(x_0 + \theta_1 h)\right) + \left(f'(x_0) - f'(x_0 - \theta_2 h)\right)\right| \le h\omega(f',h), \ \theta_i \in (0;1), \ i = 1,2.$$

Аналогично получим неравенство $h\left|f'(x_n)-\dfrac{f_{n+1}-f_{n-1}}{2h}\right|\le h\omega(f',h)$. Итак, $\left\|\boldsymbol{\eta}_{0,n+2}-\boldsymbol{\zeta}_{0,n+2}\right\|\le 3h\omega(f',h)$. Следовательно, используя выражения для производных B-сплайна [4],

$$\left|s_{3,1}(x)-\sigma_{3,1}(x)\right|\le 3h\omega(f',h),\ \left|s'_{3,1}(x)-\sigma'_{3,1}(x)\right|\le 3\sum_{i=1}^{n+2}\left|\frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{3h}-\frac{\zeta_i-\zeta_{i-1}}{3h}\right|N_{3,i+1}(x)\le 6\omega(f',h).$$

на основании оценок (2), получаем

$$\left|f(x)-s_{3,1}(x)\right|\le\left|f(x)-\sigma_{3,1}(x)\right|+\left|\sigma_{3,1}(x)-s_{3,1}(x)\right|\le\frac{33}{8}h\omega(f',h);$$
$$\left|f'(x)-s'_{3,1}(x)\right|\le\left|f'(x)-\sigma'_{3,1}(x)\right|+\left|\sigma'_{3,1}(x)-s'_{3,1}(x)\right|\le 10\omega(f',h).$$

Пусть теперь $f\in C^2[a-\varepsilon;b+\varepsilon]$, тогда по формуле Тейлора

$$f_{\pm1}=f(x_0\pm h)=f(x_0)\pm hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(\xi_{\pm1});\ \ \xi_1\in(x_0;x_1),\ \ \xi_{-1}\in(x_{-1};x_0).$$

Следовательно, $h\left|f'(x_0)-\dfrac{f_1-f_{-1}}{2h}\right|\le\dfrac{h^2}{2}\omega(f'',h)$.

Аналогично получается неравенство $h\left|f'(x_n)-\dfrac{f_{n+1}-f_{n-1}}{2h}\right|\le\dfrac{h^2}{2}\omega(f'',h)$.

Поэтому $\left\|\boldsymbol{\eta}_{0,n+2}-\boldsymbol{\zeta}_{0,n+2}\right\|\le\dfrac{3}{2}h^2\omega(f'',h)$. Следовательно,

$$\left|s_{3,1}(x)-\sigma_{3,1}(x)\right|\le\frac{3h^2}{2}\omega(f'',h),\ \left|s'_{3,1}(x)-\sigma'_{3,1}(x)\right|\le 3h\omega(f'',h);\ \left|s''_{3,1}(x)-\sigma''_{3,1}(x)\right|\le 6\omega(f'',h).$$

Отсюда получаем оценки, представленные в лемме. **Лемма доказана**.

Лемма 2. Пусть $|y_i-z_i|\le\delta,\ i=0,1,...,n$. Тогда, если $s_{3,1}(x),\sigma_{3,1}(x)$ - кубические сплайны, удовлетворяющие условиям интерполяции $s_{3,1}(x_i)=y_i,\ \sigma_{3,1}(x_i)=z_i,\ x_i=a+iH,\ H=\dfrac{b-a}{n}$, $i=0,1,...,n$ и граничным условиям $s'_{3,1}(x_0)=s'_0,\ s'_{3,1}(x_n)=s'_n,\ \sigma'_{3,1}(x_0)=\sigma'_0,\sigma'_{3,1}(x_n)=\sigma'_n$, причем $|s'_0-\sigma'_0|\le\delta',\ |s'_n-\sigma'_n|\le\delta'$, то справедливы оценки:

$$\left\|s_{3,1}-\sigma_{3,1}\right\|_{C[a;b]}\le 6\delta+3H\delta';\ \ \left\|s'_{3,1}-\sigma'_{3,1}\right\|_{C[a;b]}\le\frac{12\delta+6H\delta'}{H};\left\|s''_{3,1}-\sigma''_{3,1}\right\|_{C[a;b]}\le\frac{24\delta+12H\delta'}{H^2}.$$

Доказательство. Представим оба сплайна в виде

$$\sigma_{3,1}(x)=\sum_{i=0}^{n+2}\beta_i\cdot N_{4,i+1}(x),\ \ s_{3,1}(x)=\sum_{i=0}^{n+2}\alpha_i\cdot N_{4,i+1}(x).$$

Пусть $\boldsymbol{\alpha}_{i,j} = (\alpha_i,...,\alpha_j)^T$, $\boldsymbol{\beta}_{i,j} = (\beta_i,...,\beta_j)^T$, $\mathbf{y} = (y_0,...,y_n)^T$, $\mathbf{z} = (z_0,...,z_n)^T$.

Тогда

$$A_{n+1} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{1,n+1} = (3y_0 + Hs'_0,\, 6y_1,...,6y_{n-1}, 3y_n - Hs'_n)^T;$$

$$A_{n+1} \cdot \boldsymbol{\beta}_{1,n+1} = (3z_0 + H\sigma'_0,\, 6z_1,...,6z_{n-1}, 3z_n - H\sigma'_n)^T.$$

Следовательно,

$$A_{n+1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}_{1,n+1} - \boldsymbol{\beta}_{1,n+1}) = (3(y_0 - z_0) + H(s'_0 - \sigma'_0),\, 6(y_1 - z_1),...,6(y_{n-1} - z_{n-1}), 3(y_n - z_n) + H(\sigma'_n - s'_n))^T.$$

Заметим, что $\alpha_0 = \alpha_2 - 2Hs'_0$, $\alpha_{n+2} = \alpha_n + 2Hs'_n$, $\beta_0 = \beta_2 - 2H\sigma'_0$, $\beta_{n+2} = \beta_n + 2H\sigma'_n$.

Поэтому имеет место оценка $\|\boldsymbol{\alpha}_{0,n+2} - \boldsymbol{\beta}_{0,n+2}\| \le 6\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| + 3H\delta' \le 6\delta + 3H\delta'$. Отсюда, учитывая, что B-сплайны неотрицательны и образуют на отрезке разбиение единицы, получаем

$$\left| s_{3,1}(x) - \sigma_{3,1}(x) \right| = \left| \sum_{i=0}^{n+2} (\alpha_i - \beta_i) N_{4,i+1}(x) \right| \le 6\delta + 3H\delta';$$

$$\left| s'_{3,1}(x) - \sigma'_{3,1}(x) \right| = \frac{1}{H} \left| \sum_{i=0}^{n+2} ((\alpha_i - \beta_i) - (\alpha_{i-1} - \beta_{i-1})) N_{3,i}(x) \right| \le \frac{12\delta + 6H\delta'}{H};$$

$$\left| s''_{3,1}(x) - \sigma''_{3,1}(x) \right| = \frac{1}{H^2} \left| \sum_{i=0}^{n+2} ((\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}) - 2(\alpha_i - \beta_i) + (\alpha_{i-1} - \beta_{i-1})) N_{3,i}(x) \right| \le \frac{24\delta + 12H\delta'}{H^2}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим другой вид условий, накладываемых на сплайн $s_{3,1}(x)$, которые возникают при интерполяции периодических функций ($f_0 = f_n$). Это условия вида

$$s_{3,1}(x_i) = f_i,\ i = 0,1,...,n; \quad (s_{3,1})^{(q)}(x_0) = (s_{3,1})^{(q)}(x_n), \quad q = 0,1,2. \tag{3}$$

Как известно [4], существует единственная функция $s_{3,1}(x)$ из $\mathbf{S}_{3,1}(\Delta)$, удовлетворяющая условиям (3). Кроме того, если $f \in C^k[a;b]$, $k = 0,1,2$, то справедливы оценки (2), причем для $k = 0$ константа $M_0^{(0)} = 7/4$.

Как было показано в статье [4], если сетка Δ равномерная, то сплайн $s_{3,1}(x)$ можно выписать в явном виде:

$$s_{3,1}(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} \eta_i \cdot N_{4,i+2}(x), \qquad \eta_i = \frac{6}{\Phi(n)} \sum_{j=1}^{n} \Psi_n(i+1, j) \cdot f_{j-1}; \ \ \eta_0 = \eta_n;\ \eta_{-1} = \eta_{n-1};\ \ \eta_{n+1} = \eta_1,$$

где

$$\Phi(n) = 4 \cdot A(n-1) - 2 \cdot A(n-2) - 2 \cdot (-1)^n,\ n \ge 4; \qquad A(n) = \frac{(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}},\ n \ge -1;$$

$$\Psi_n(i,j)=\begin{cases}(-1)^{i+1}\left(A(n-i)+(-1)^n A(i-2)\right), \ j=1; & \\ (-1)^{i+j}\left(4\cdot A(j-2)\cdot A(n-i)-A(j-3)\cdot A(n-i)+\right. & i=1,2,\ldots,n. \\ \qquad \left.+(-1)^n A(i-j-1)-A(j-2)A(n-i-1)\right), \ 1<j\le i; & \end{cases}$$

Замечание 1. Так как B-сплайны образуют на отрезке $[a;b]$ разбиение единицы, то, в силу единственности интерполяционного сплайна, из условия $f_0=f_1=\ldots=f_{n-1}$ следует, что $\eta_{-1}=\eta_0=\ldots=\eta_{n+2}=f_0=\ldots=f_{n-1}$.

Пусть $f\in C^m([a;b]\times[c-\varepsilon;d+\varepsilon])$, $\varepsilon>0$, $0\le m\le 2$ и удовлетворяет условию: $D^{(s,0)}f(a+0,v)=D^{(s,0)}f(b-0,v)$, $0\le s\le m$

для любого значения $v\in[c;d]$ (здесь $D^{(\alpha,\beta)}f=\partial^{\alpha+\beta}f/\partial^{\alpha}u\partial^{\beta}v$). Выберем равномерные сетки

$\Delta_u: u_{-3}<\ldots<u_{n+3}$, $u_i=a+i\cdot h_u$, $i=-3,\ldots,n+3$, $h_u=(b-a)/n$;

$\Delta_v: v_{-3}<\ldots<v_{k+3}$, $v_j=c+j\cdot h_v$, $j=-3,\ldots,k+3$, $h_v=(d-c)/k<\varepsilon$;

и, положим $f_{ij}=f(u_i;v_j)$, $i=0,1\ldots,n$; $j=-1,0,\ldots,k+1$; $\mathbf{F}_j=(f_{0j},f_{1j},\ldots,f_{n-1,j})^T$.

Определим функции

$$g_j(u)=\sum_{i=-1}^{n+1}\eta_{ij}\cdot N_{4,i+2}(u), \ j=-1,0,1,\ldots,k+1, \ u\in[a;b],$$

где $\eta_{n,j}=\eta_{0,j}$, $\eta_{-1,j}=\eta_{n-1,j}$, $\eta_{n+1,j}=\eta_{1,j}$, $\eta_{ij}=\dfrac{6}{\Phi(n)}\sum_{s=1}^{n}\Psi_n(i+1,s)\cdot f_{s-1,j}$.

Рассмотрим функцию

$$g(u,v)=\sum_{j=0}^{k+2}\varphi_j(u)N_{4,j+1}(v), \quad (u,v)\in[a;b]\times[c;d],$$

$$\varphi_j(u)=\begin{pmatrix}\dfrac{\Upsilon_{k+1}(j,1)}{\mathrm{E}(k+1)} & \dfrac{\Upsilon_{k+1}(j,2)}{\mathrm{E}(k+1)} & \cdots & \dfrac{\Upsilon_{k+1}(j,k+1)}{\mathrm{E}(k+1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\cdot g_0(u)+0.5\cdot(g_1(u)-g_{-1}(u))\\ 6\cdot g_1(u)\\ \ldots\\ 6\cdot g_{k-1}(u)\\ 3\cdot g_k(u)-0.5\cdot(g_{k+1}(u)-g_{k-1}(u))\end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Имеют место следующие оценки

$$\left\|D^{(0,\beta)}f-D^{(0,\beta)}g\right\|_{C([a;b]\times[c;d])}\le Q_{\beta}^{(m)}h_v^{m-\beta}\omega\left(D^{(0,m)}f,h_v\right)+9\cdot 2^{\beta}\cdot M_0^{(m)}\frac{h_u^m}{h_v^{\beta}}\omega\left(D^{(m,0)}f,h_u\right),$$

$$\left\|D^{(\beta,0)}f-D^{(\beta,0)}g\right\|_{C([a;b]\times[c;d])}\le Q_0^{(m-\beta)}h_v^{m-\beta}\omega\left(D^{(m-\beta,0)}f,h_v\right)+9M_{\beta}^{(m)}h_u^{m-\beta}\omega\left(D^{(m,0)}f,h_u\right); \ 0\le\beta\le m.$$

Для m=2 имеет место неравенство:

$$\left\|D^{(1,1)}f-D^{(1,1)}g\right\|_{C([a;b]\times[c;d])}\le Q_1^{(1)}\omega\left(D^{(1,1)}f,h_v\right)+18M_1^{(2)}\frac{h_u}{h_v}\omega\left(D^{(2,0)}f,h_u\right).$$

Доказательство. При каждом фиксированном значении $u \in [a;b]$ обозначим $w_u^{(\alpha)}(v)$ кубический интерполяционный сплайн, удовлетворяющий условиям интерполяции $w_u^{(\alpha)}(v_j) = D^{(\alpha,0)} f(u, v_j)$, $j = 0,1,...,k$, и граничным условиям

$$\left(w_u^{(\alpha)}\right)'(v_0) = \frac{D^{(\alpha,0)} f(u, v_1) - D^{(\alpha,0)} f(u, v_{-1})}{2h_v},\ \left(w_u^{(\alpha)}\right)'(v_k) = \frac{D^{(\alpha,0)} f(u, v_{k+1}) - D^{(\alpha,0)} f(u, v_{k-1})}{2h_v}.$$

Имеем $\left|D^{(0,\beta)} f(u,v) - D^{(0,\beta)} g(u,v)\right| \le \left|D^{(0,\beta)} f(u,v) - D^{(\beta)} w_u^{(0)}(v)\right| + \left|D^{(0,\beta)} g(u,v) - D^{(\beta)} w_u^{(0)}(v)\right|$.

В силу леммы 1 справедлива оценка $\left|D^{(0,\beta)} f(u,v) - D^{(\beta)} w_u^{(0)}(v)\right| \le Q_\beta^{(m)} h_v^{m-\beta} \omega\left(D^{(0,m)} f, h_v\right)$, $0 \le \beta \le m$. Заметим, что при фиксированном значении $u \in [a;b]$, функция $g(u,v)$ представляет собой кубический сплайн, удовлетворяющий условиям интерполяции $g(u, v_j) = g_j(u)$, $j = 0,...,k$ и граничным условиям $D^{(0,1)} g(u, v_0) = \dfrac{g_1(u) - g_{-1}(u)}{2h_v}$; $D^{(0,1)} g(u, v_k) = \dfrac{g_{k+1}(u) - g_{k-1}(u)}{2h_v}$. Так как $g_j(u)$ интерполяционный сплайн, удовлетворяющий условиям интерполяции $g_j(u_i) = f(u_i, v_j)$, $i = 0,1,...,n$ и граничным условиям вида (3), то, в силу оценок (2), имеем

$$\left\|D^{(\beta)} g_j - D^{(\beta,0)} f(\,\cdot\,, v_j)\right\|_{C[a;b]} \le M_\beta^{(m)} h_u^{m-\beta} \omega\left(D^{(m,0)} f, h_u\right),\ 0 \le \beta \le m. \qquad (4)$$

Следовательно, $\left|g(u, v_j) - w_u^{(0)}(v_j)\right| \le M_0^{(m)} h_u^m \omega\left(D^{(m,0)} f, h_u\right)$, $j = 0,...,k$. Кроме того, имеет место неравенство $\left|\left(w_u^{(0)}\right)'(v_i) - D^{(0,1)} g(u, v_i)\right| \le M_0^{(m)} \dfrac{h_u^m}{h_v} \omega\left(D^{(m,0)} f, h_u\right)$, $i = 0, k$.

Отсюда, на основании леммы 2, можно заключить, что

$$\left|D^{(0,\beta)} g(u,v) - D^{(\beta)} w_u^{(0)}(v)\right| \le 9 \cdot 2^\beta \cdot M_0^{(m)} \frac{h_u^m}{h_v^\beta} \omega\left(D^{(m,0)} f, h_u\right),\ 0 \le \beta \le m.$$

Итак, приходим к следующей оценке

$$\left|D^{(0,\beta)} f(u,v) - D^{(0,\beta)} g(u,v)\right| \le Q_\beta^{(m)} h_v^{m-\beta} \omega\left(D^{(0,m)} f, h_v\right) + 9 \cdot 2^\beta \cdot M_0^{(m)} \frac{h_u^m}{h_v^\beta} \omega\left(D^{(m,0)} f, h_u\right).$$

Заметим, что $\sigma_u(v) = D^{(\beta,0)} g(u,v)$ при фиксированном значении $u \in [a;b]$ представляет собой кубический сплайн, удовлетворяющий условиям интерполяции $\sigma_u(v_j) = D^{(\beta)} g_j(u)$, $j = 0,...,k$ и граничным условиям

$$(\sigma_u)'(v_0) = \frac{D^{(\beta)} g_1(u) - D^{(\beta)} g_{-1}(u)}{2h_v};\ (\sigma_u)'(v_k) = \frac{D^{(\beta)} g_{k+1}(u) - D^{(\beta)} g_{k-1}(u)}{2h_v}.$$

В силу неравенства (4) имеем $\left|\sigma_u\left(v_j\right)-w_u^{(\beta)}\left(v_j\right)\right| \le M_\beta^{(m)} h_u^{m-\beta}\omega\left(D^{(m,0)}f,h_u\right),\ j=0,\ldots,k$. Кроме того, $\left|\left(\sigma_u\right)'\left(v_i\right)-\left(w_u^{(\beta)}\right)'\left(v_i\right)\right| \le M_\beta^{(m)}\dfrac{h_u^{m-\beta}}{h_v}\omega\left(D^{(m,0)}f,h_u\right),\ i=\overline{0,k}$. На основании леммы 2, заключаем, что $\left|\sigma_u(v)-w_u^{(\beta)}(v)\right| \le 9M_\beta^{(m)} h_u^{m-\beta}\omega\left(D^{(m,0)}f,h_u\right)$. В силу леммы 1, имеет место неравенство $\left|D^{(\beta,0)}f(u,v)-w_u^{(\beta)}(v)\right| \le Q_0^{(m-\beta)} h_v^{m-\beta}\omega\left(D^{(m-\beta,0)}f,h_v\right)$.

Итак, получаем

$$\left\|D^{(\beta,0)}f-D^{(\beta,0)}g\right\|_{C([a;b]\times[c;d])} \le Q_0^{(m-\beta)} h_v^{m-\beta}\omega\left(D^{(m-\beta,0)}f,h_v\right)+9M_\beta^{(m)} h_u^{m-\beta}\omega\left(D^{(m,0)}f,h_u\right).$$

Рассмотрим отдельно случай $m=2$. В силу леммы 1, справедливо неравенство $\left|D^{(1,1)}f(u,v)-D^{(1)}w_u^{(1)}(v)\right| \le Q_1^{(1)}\omega\left(D^{(1,1)}f,h_v\right)$. В силу второго неравенства леммы 2, имеем $\left|D^{(1,1)}g(u,v)-D^{(1)}w_u^{(1)}(v)\right| \le 18M_1^{(2)}\dfrac{h_u}{h_v}\omega\left(D^{(2,0)}f,h_u\right)$. Таким образом,

$$\left|D^{(1,1)}f(u,v)-D^{(1,1)}g(u,v)\right| \le Q_1^{(1)}\omega\left(D^{(1,1)}f,h_v\right)+18M_1^{(2)}\frac{h_u}{h_v}\omega\left(D^{(2,0)}f,h_u\right).$$

Теорема доказана.

Следствие. При соблюдении определенных соотношений между шагами h_u, h_v сеток, например, $h_u \le h_v$ можно выбрать последовательность сеток и получить последовательность функций $g_p(u,v)$, $p=1,2,\ldots$, такую, что $\lim\limits_{p\to\infty}\left\|g_p-f\right\|_{C^m([a;b]\times[c;d])}=0$.

Некоторые приложения полученных результатов

Доказанная в предыдущем разделе теорема позволяет единым образом задавать поверхности зависимых сечений с криволинейной образующей (класс $C_{\Pi_1}^m, 0\le m\le 2$), которая при своем движении и изменении остается инцидентной плоскости параллельной заданной координатной плоскости Π_1. Пусть $\vec{r}(u,v),\ (u,v)\in[a;b]\times[c-\varepsilon;d+\varepsilon],\ \varepsilon>0$ - параметрическое представление такой поверхности Σ. Каждая u-линия такой поверхности представляет собой криволинейную образующую поверхности, инцидентную плоскости, параллельной координатной плоскости. Выберем равномерную сетку $\Delta_u\times\Delta_v$ на прямоугольнике $[a;b]\times[c;d]$:

$\Delta_u: u_{-3}<\ldots<u_0=a<\ldots<u_n=b<\ldots<u_{n+3}$; $u_i=a+ih_u,\ i=-3,\ldots,n+3$; $h_u=\dfrac{b-a}{n}$;

$\Delta_v : v_{-3} < \ldots < v_0 = a < \ldots < v_k = b < \ldots < v_{k+3}$; $v_i = c + jh_v$, $j = -3,\ldots,k+3$; $h_v = \dfrac{d-c}{k} \le \min(h_u, \varepsilon)$.

Рассмотрим поверхность $\Sigma_{n,k}$, с параметрическим представлением

$$\vec{R}_{n,k}(u,v) = \sum_{j=0}^{k+2} \vec{B}_j(u) N_{4,j+1}(v), \quad (u,v) \in [a;b] \times [c;d], \tag{5}$$

$$\vec{B}_j(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\Upsilon_{k+1}(j,1)}{\mathrm{E}(k+1)} & \dfrac{\Upsilon_{k+1}(j,2)}{\mathrm{E}(k+1)} & \ldots & \dfrac{\Upsilon_{k+1}(j,k+1)}{\mathrm{E}(k+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cdot \vec{G}_0(u) + 0.5 \cdot \left(\vec{G}_1(u) - \vec{G}_{-1}(u)\right) \\ 6 \cdot \vec{G}_1(u) \\ \ldots \\ 6 \cdot \vec{G}_{k-1}(u) \\ 3 \cdot \vec{G}_k(u) - 0.5 \cdot \left(\vec{G}_{k+1}(u) - \vec{G}_{k-1}(u)\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{G}_j(u) = \sum_{i=-1}^{n+1} \vec{M}_{i,j} \cdot N_{4,i+2}(u), \quad j = -1,0,1,\ldots,k+1, \quad u \in [a;b],$$

где $\vec{M}_{n,j} = \vec{M}_{0,j}$, $\vec{M}_{-1,j} = \vec{M}_{n-1,j}$, $\vec{M}_{n+1,j} = \vec{M}_{1,j}$, $\vec{M}_{i\,j} = \dfrac{6}{\Phi(n)} \sum_{s=1}^{n} \Psi_n(i+1,s) \cdot \vec{r}\left(u_{s-1}, v_j\right)$.

Теорема 2. Поверхность $\Sigma_{n,k}$ принадлежит классу $C^2_{\Pi_1}$.

Доказательство. Как уже было отмечено, каждая u-линия поверхности Σ представляет собой криволинейную образующую поверхности, инцидентную плоскости, параллельной координатной плоскости. Следовательно, одна из координат вектора $\vec{r}(u,v_j) = x(u,v_j)\vec{i} + y(u,v_j)\vec{j} + z(u,v_j)\vec{k}$ не зависит от переменной u. Пусть для определенности такой координатой будет аппликата. Тогда $z(u_{s-1}, v_j) = z_j$, $s = 1,2,\ldots,n$. В силу замечания 1, $(\vec{M}_{i\,j}, \vec{k}) = z_j$, для всех i. В результате $(\vec{G}_j(u), \vec{k}) = z_j$. Следовательно, $(\vec{B}_j(u), \vec{k}) = const$. А, значит, $(\vec{R}_{n,k}(u,v), \vec{k})$ не зависит от u. Таким образом, любая u-линия поверхности $\Sigma_{n,k}$ инцидентна плоскости, параллельной координатной плоскости *Oxy*.

Теорема доказана.

По теореме 1, для последовательности вектор-функций $\vec{R}_{n,k}(u,v)$, определяющих поверхности зависимых сечений класса $C^2_{\Pi_1}$, будет выполнено $\lim\limits_{h_u \to 0} \left\| \vec{R}_{n,k} - \vec{r} \right\|_{C^m([a;b]\times[c;d])} = 0$. Таким образом, геометрическая часть определителя поверхности [7] класса $C^2_{\Pi_1}$ состоит из точечного каркаса сечений такой поверхности, а алгоритмическая часть определителя задается вектор-функцией (5).

Результаты предыдущего раздела можно применить к построению вектор-функции, определяющей тело намотки по некоторым ее промежуточным слоям. Причем, такая вектор-функция может быть выписана в явном виде.

Итак, пусть $\vec{r}(u,v,j)$, $(u,v)\in[a_1;b_1]\times[a_2;b_2]$, $j=0,1,...,s$ промежуточные слои тела (поверхности класса C^{m}). Выбрав равномерную сетку $w_0=a_3<...<w_s=b_3$, $h=(b_3-a_3)/s$, само тело зададим вектор-функцией:

$$\vec{R}(u,v,w)=\sum_{i=0}^{n+2}\vec{B}_i(u,v)\cdot N_{4,i+1}(w),\ \ (u,v,w)\in[a_1;b_1]\times[a_2;b_2]\times[a_3;b_3]\ ,$$

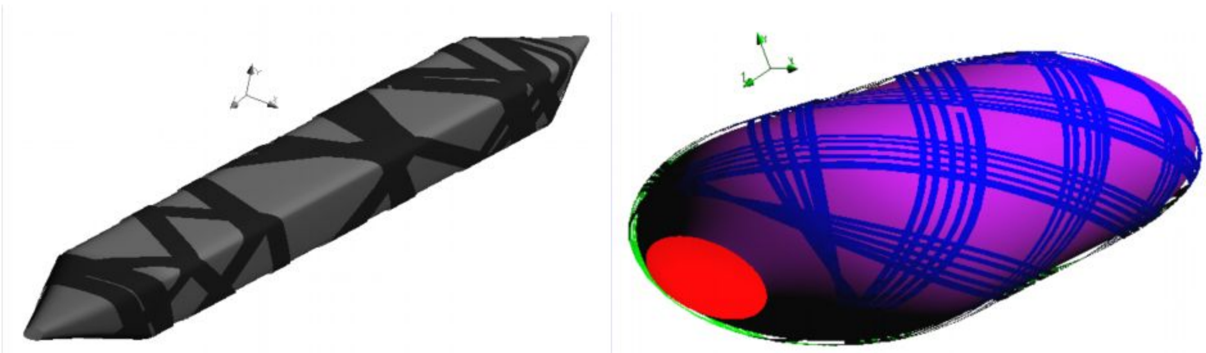
$$\vec{B}_j(u,v)=\left(\frac{\mathrm{Y}_{s+1}(j,1)}{\mathrm{E}(s+1)}\ \frac{\mathrm{Y}_{s+1}(j,2)}{\mathrm{E}(s+1)}\ \cdots\ \frac{\mathrm{Y}_{s+1}(j,s+1)}{\mathrm{E}(s+1)}\right)\begin{pmatrix}3\cdot\vec{r}(u,v,0)+h_w\cdot\vec{R}'_w(u,v,w_0)\\ 6\cdot\vec{r}(u,v,1)\\ \cdots\\ 6\cdot\vec{r}(u,v,s-1)\\ 3\cdot\vec{r}(u,v,s)-h_w\cdot\vec{R}'_w(u,v,w_s)\end{pmatrix},\ j=1,...,s+1\,,$$

$$\vec{B}_0(u,v)=\vec{B}_2(u,v)-2h_w\cdot\vec{R}'_w(u,v,w_0),\ \vec{B}_{s+2}(u,v)=\vec{B}_s(u,v)+2h_w\cdot\vec{R}'_w(u,v,w_s)\,.$$

Здесь $\vec{R}'_w(u,v,w_i),\, i=0,s$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые вектор-функции, удовлетворяющие условию

$D^{(\alpha,0,0)}\vec{R}'_w(a_1+0,v,w_i)=D^{(\alpha,0,0)}\vec{R}'_w(b_1-0,v,w_i),\ 0\le\alpha\le m,\ i=0,s\,.$

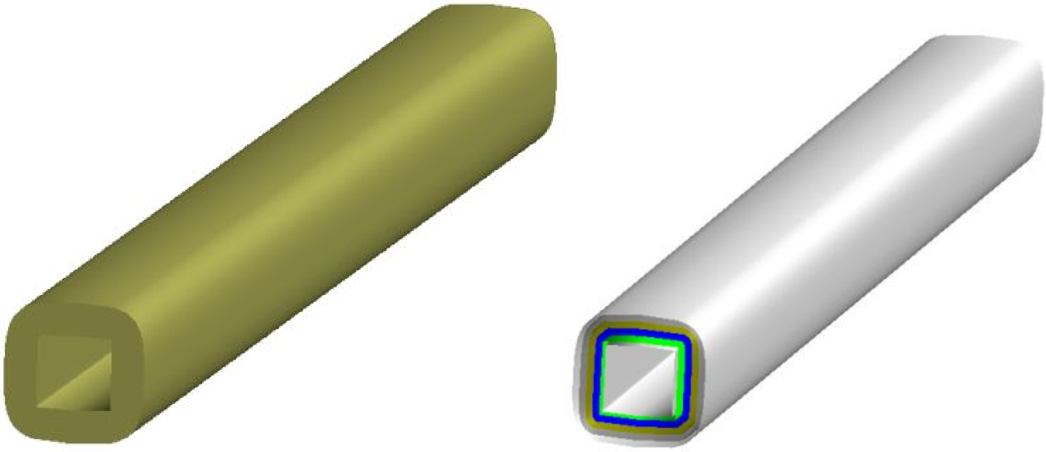
На рисунке 1 показано моделирование намотки поверхности прямоугольного профиля и поверхности вращения. На рисунке 2 показаны результаты твердотельного моделирования.



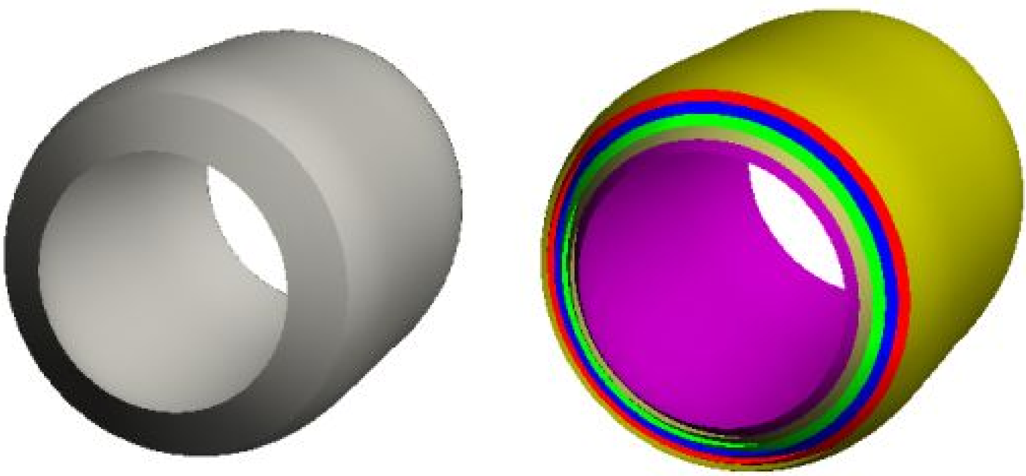
а) б)

Рис.1. Моделирование намотки

а) поверхности прямоугольного профиля, б)поверхности вращения



а) тело б) слои тела



в) тело г) слои тела

Рис. 2. Моделирование твердого тела

Заключение

В статье описан метод аппроксимации функций двух аргументов, найдена погрешность аппроксимации. Основным преимуществом разработанного метода является то, что аппроксимирующая функция выписывается в явном виде. Предложенный метод применен к построению определителя поверхности зависимых сечений с переменной образующей. В статье также представлен метод моделирования тела по его слоям (допускается даже задание только точек сечений слоев!) с помощью явно заданной вектор-функции. Метод применен к моделированию тел, получаемых с помощью намотки.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы по лоту «Развитие теории геометрического моделирования технологических процессов намотки и выкладки конструкций из волокнистых композиционных материалов» госконтракт № 14.740.11.0279 от 17 мая 2010 года и при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых и по государственной поддержке ведущих научных школ код проекта НШ-64683.2010.8.

Библиографический список

1. Битюков Ю.И., Калинин В.А. Численный анализ схемы укладки ленты переменной ширины на технологическую оправку в процессе намотки конструкций из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций.–2010.–Т.16.-№2.-С. 276-290.
2. Битюков Ю.И. Определение закона движения раскладывающей головки намоточного станка по заданному рисунку укладки ленты на технологическую оправку в процессе намотки конструкций из композиционных материалов // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. - 2010. - №3 (40). - С. 51-59.
3. Битюков Ю.И., Денискин Ю.И. Геометрическое моделирование многослойной намотки // Электронный журнал «Труды МАИ» (раздел «Машиноведение. Машиностроение»). - 2010. – Выпуск № 37. – Режим доступа в журн.: www.mai.ru/science/trudy/.
4. Завьялов Ю.С. Методы сплайн–функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.П Мирошниченко–М.: Наука, 1980 – 352 с.
5. Битюков Ю.И. Представление кубического сплайна в виде разложения по B-сплайнам на равномерной сетке с явно выписанными коэффициентами разложения // Естественные и технические науки. – 2010. - №3. - С. 304-308.
6. Стечкин С. Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. – М. Наука, 1976. – 248 с.
7. Иванов Г. С. Начертательная геометрия: Учебник для вузов / Г.С. Иванов. - М.: Машиностроение, 1995. - 224 с.

Сведения об авторах

Битюков Юрий Иванович, доцент Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н.

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, тел.: (499) 1584560 E-mail: yib72@mail.ru

Денискин Юрий Иванович, профессор, Московского авиационного института (государственного технического университета),д.т.н;

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, тел.: (499) 1580000, E-mail: qi@mai.ru

Мирошниченко Павел Владимирович, аспирант Московского авиационного института (государственного технического университета),

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, тел.: (499) 1584839 E-mail: ouk@mai.ru