УДК 621.372.061

Моделирование распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления в СКМ спектральным методом

В.В. Рыбин

Аннотация

В настоящее время для моделирования систем управления спектральным методом применяются различные системы компьютерной математики (СКМ) и пакеты их расширения. Современные технологии, связанные с фрактальным подходом в различных прикладных областях, в частности в теории динамических систем, порождают новую элементную базу, математические модели которой содержат дробные интегрирующие и дифференцирующие операторы.

В данной статье спектральный метод применяется для моделирования распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления. Для моделирования таких систем модифицирован пакет расширения MLSY_SM СКМ Mathcad. Применение этого пакета демонстрируется на примере решения уравнения аномальной диффузии и моделировании системы управления ядерной энергетической установкой с распределенными параметрами, которая содержит дробный ПИД регулятор.

Ключевые слова

нестационарные системы автоматического управления; спектральная форма математического описания; системы компьютерной математики; дробные интегрирующие и дифференцирующие звенья; аномальная диффузия; ядерная энергетическая установка.

1. Введение

В настоящее время теория дробных операторов находит все большее применение в теории управления и других предметных областях [1-4]. Микро- и нанотехнологии позволяют создавать технические элементы, которые физически реализуют дробные интегральные и дифференциальные операторы. Для систем автоматического управления предложена методика проектирования ПИД регуляторов дробного порядка [4]. В работе [5] спектральный метод [6-12] развить на нестационарные системы управления, содержащие дробные интегрирующие и дифференцирующие звенья, а для моделирования дробных систем управления летательными аппаратами модернизированы пакеты расширения MLSY_SM, Spektr_SM+Simulink+Matlab, Spektr_SM+VisSim+Mathcad СКМ [12-18] расчета нестационарных непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных систем управления летательными аппаратами с сосредоточенными параметрами.

Заметим также, что для решения современных энергоемких задач работы космических аппаратов требуется энергия, дать которую в настоящее время способны только ядерные энергетические установки (ЯЭУ). Модели ЯЭУ описываются диффузионными уравнениями, а системы управления могут содержать дробные ПИД регуляторы. Спектральный метод удобен для моделирования таких систем управления ЯЭУ. Поэтому для моделирования таких систем управления модифицирован пакет расширения MLSY_SM СКМ Mathcad.

В данной статье спектральный метод применяется для моделирования распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления с использованием пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad. Применение этого пакета демонстрируется на примере решения уравнения аномальной диффузии [20] и моделировании системы управления ядерной энергетической установкой с распределенными параметрами [21], которая содержит дробный ПИД регулятор.

2. Основные характеристики спектральной формы математического описания одномерных распределенных систем управления

Спектральные характеристики для представления функций времени и/или вектора состояния, а также линейных операторов определяются с использованием табличной формы представления многомерных матриц [9,10]. Рассмотрим здесь только некоторые спектральные характеристики описания одномерных распределенных процессов и систем, определенных относительно ортонормированных систем функций.

Пусть $(\theta, x) \in Q$, где $\theta \in T = [0, t]$ - конечный промежуток времени, $x \in \Omega = [a, b] \subseteq R$, а система функций $\{e(i_0, i_1, \theta, x)\}_{i_0, i_1 = 0}^{\infty}$ образует ортонормированный базис пространства $L_2(Q)$. Тогда гиперстолбец $H(2,0) = (h_{i_0 i_1})$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения функции $h(\theta, x) \in L_2(Q)$ в ряд по функциям базисной системы, называется *спектральной характеристикой функции времени и координаты состояния* $h(\theta, x)$, т.е.

$$S[h(\theta, x)] = H(2,0) \tag{1}$$

где

$$h_{i_0 i_1} = \left(e(i_0, i_1, \theta, x), h(\theta, x)\right)_{L_2(Q)}, \quad i_0, i_1 = 0,1,2,\ldots \tag{2}$$

Обратный переход от спектральной характеристики к соответствующей функции времени осуществляется по *формуле обращения*

$$h(\theta,x)=S^{-1}\left[H(2,0)\right]=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}h_{i_0 i_1}\cdot e(i_0,i_1,\theta,x),\quad (\theta,x)\in Q\,. \tag{3}$$

Заметим, что если система функций $\{\varphi(i,\theta)\}_{i=0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2(T)$, а система $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(\Omega)$ и $h(\theta,x)=h_0(\theta)\cdot h_1(x)$, где $h_0(\theta)\in L_2(T)$, $h_1(x)\in L_2(\Omega)$, то спектральную характеристику функции $h(\theta,x)$, определенную относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\theta,x)=\varphi(i_0,\theta)\cdot p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$,

можно представить в виде

$$H(2,0)=H_0(1,0)\otimes H_1(1,0)\,, \tag{4}$$

где $H_0(1,0)$ - спектральная характеристика функции $h_0(\theta)$, определенная относительно базисной системы $\{\varphi(i_0,\theta)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $H_1(1,0)$ - спектральная характеристика функции $h_1(x)$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$.

В дальнейшем, по мере необходимости, при описании систем управления в спектральной области, спектральные характеристики (1) будем называть гиперстолбцовыми матрицами нестационарных спектральных характеристик (**ГСМ НСХ**).

Линейные операторы. Пусть $\widetilde{\mathrm{M}}$ - линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(Q)$, а $\{e(i_0,i_1,\theta,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ - ортонормированный базис этого пространства, $Q=T\times\Omega$, $\theta\in T=\left[0,t\right]$, $x\in\Omega=[a,b]\subseteq R$.

Гиперквадратная матрица $M(2,2)=\left(m_{i_0 i_1 j_0 j_1}\right)$, элементы которой определяются формулой $m_{i_0 i_1 j_0 j_1}=\left(e(i_0,i_1,\theta,x),\widetilde{M}e(j_0,j_1,\theta,x)\right)_{L_2(Q)}$, $i_0,i_1,j_0,j_1=0,1,2,\ldots$,

называется *спектральной характеристикой оператора* $\widetilde{\mathrm{M}}$, т.е.

$$\mathrm{S}\left[\widetilde{M}\right]=M(2,2)\,. \tag{5}$$

Заметим, что

$$\mathrm{S}\left[\widetilde{M}h(\theta,x)\right]=M(2,2)\cdot H(2,0)\,, \tag{6}$$

т.е. спектральная характеристика образа функции $h(t,x)$ равна произведению спектральной характеристики оператора $\widetilde{\mathrm{M}}$ и спектральной характеристики функции $h(t,x)$.

Приведем *свойства спектрального преобразования линейных операторов, определенных на пространстве* $L_2(Q)$.

1. Спектральное преобразование тождественного оператора. Спектральная характеристика тождественного оператора I представляет собой единичную матрицу размерности 4: $\mathrm{S}[\mathrm{I}] = E(2,2)$.

2. Спектральное преобразование композиции операторов. Спектральная характеристика композиции линейных операторов $\tilde{\mathrm{M}}$ и $\tilde{\mathrm{N}}$ равна произведению их спектральных характеристик:

$$\mathrm{S}\left[\tilde{\mathrm{M}} \circ \tilde{\mathrm{N}}\right] = \mathrm{S}\left[\tilde{\mathrm{M}}\right] \cdot \mathrm{S}\left[\tilde{\mathrm{N}}\right] = M(2,2) \cdot N(2,2), \tag{7}$$

где $M(2,2) = \mathrm{S}\left[\tilde{M}\right]$, $N(2,2) = \mathrm{S}\left[\tilde{N}\right]$.

3. Спектральное преобразование обратного оператора. Предположим, что для линейного оператора $\tilde{\mathrm{M}}$ существует обратный оператор $\tilde{\mathrm{M}}^{-1}$. Тогда спектральная характеристика обратного оператора равна обратной спектральной характеристике оператора $\tilde{\mathrm{M}}$:

$$\mathrm{S}\left[\tilde{M}^{-1}\right] = M^{-1}(2,2), \tag{8}$$

где $M(2,2) = \mathrm{S}\left[\tilde{M}\right]$.

Примеры линейных операторов

1. Операторы умножения. Линейный оператор $\tilde{\mathrm{A}}$ называется *оператором умножения* на функцию $a(\theta, x)$, если для любой функции $h(\theta, x) \in L_2(Q)$ справедливо выражение $\tilde{A}h(\theta, x) = a(\theta, x)h(\theta, x)$, где $a(\theta, x)$ - локально интегрируемая функция на множестве $Q = T \times \Omega$, $\theta \in T = [0, t]$, $x \in \Omega = [a, b] \subseteq R$. Тогда гиперквадратная матрица $A(2,2) = \left(a_{i_0 i_1 j_0 j_1}\right)$, элементы которой определяются формулой $a_{i_0, i_1} = \left(e(i_0, i_1, \theta, x), a(\theta, x) \cdot e(i_0, i_1, \theta, x)\right)_{L_2(Q)}$; $i_0, i_1, j_0, j_1 = 0, 1, 2, \ldots$ называется *спектральной характеристикой оператора умножения* на функцию $a(\theta, x)$, т.е. $\mathrm{S}\left[\tilde{A}\right] = A(2,2)$.

Заметим, что если система функций $\{\varphi(i, \theta)\}_{i=0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2(T)$, а система $\{p(i_1, x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2(\Omega)$ и $a(\theta, x) = a_0(\theta) \cdot a_1(x)$, где $a_0(\theta) \in L_2(T)$, $a_1(x) \in L_2(\Omega)$, то спектральную характеристику оператора умножения $a(\theta, x)$, определенную относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \theta, x) = \varphi(i_0, \theta) \cdot p(i_1, x)\}_{i_0, i_1 = 0}^{\infty}$, можно представить в виде

$$A(2,2) = A_0(1,1) \otimes A_1(1,1) \tag{9}$$

где $A_0(1,1)$ - спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\mathrm{a}_0(\theta)$, определенная относительно базисной системы $\{\varphi(i, \theta)\}_{i=0}^{\infty}$; $\mathrm{A}_1(1,1)$ - спектральная характеристика оператора умножения на функции $a_1(x)$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$.

2. Операторы интегрирования. Рассмотрим операторы интегрирования, заданные на пространстве $L_2(Q)$. Будем рассматривать оператор дробного интегрирования по времени [1, 5]:

$$D_{0+|\theta}^{-\mu}h(\theta,x)=\int_0^{\theta}\frac{(\theta-\tau)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}h(\tau,x)d\tau\,, \tag{10}$$

а также оператор дробного интегрирования по координате состояния [1, 5]:

$$D_{a+|x}^{-\mu}h(\theta,x)=\int_a^{x}\frac{(x-\xi)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}h(\theta,\,\xi)d\xi\,. \tag{11}$$

Эти операторы при $\mu=1,2,\ldots,m$ превращаются в обычные интегралы m-го порядка [1].

Спектральные характеристики операторов дробного интегрирования $D_{0+|\theta}^{-\mu}$ и $D_{a+|x}^{-\mu}$, определенные относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\theta,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q)$, вычисляются по определению спектральных характеристик линейных операторов и обозначаются $P^{-\mu}(2,2)=\left(P_{i_0 i_1 j_0 j_1}^{-\mu}\right)$, $P_1^{-\mu}(2,2)=(P_{1 i_1 i_2 j_1 j_2}^{-\mu})$ соответственно:

$$P_{i_0,i_1 j_0,j_1}^{-\mu}=\left(e(i_0,i_1,\theta,x),\int_0^{\theta}\frac{(\theta-\tau)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}e(j_0,j_1,\theta,x)d\tau\right)_{L_2(Q)},$$

$$P_{1 i_0 i_1 j_0 j_1}^{-\mu}=\left(q(i_0,i_1,\theta,x),\int_a^{x}\frac{(x-\xi)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}p(j_0,j_1,\theta,\xi)d\xi\right)_{L_2(Q)},\quad i_0,i_1,j_0,j_1=0,1,2,\ldots.$$

В случае если функции базисной системы пространства $L_2(Q)$ представляются в виде $\{e(i_0,i_1,\theta,x)=\varphi(i_0,\theta)\cdot p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, т.е. в виде произведения функций базисных систем пространств $L_2(T)$ и $L_2(\Omega)$, то спектральные характеристики операторов дробного интегрирования представляются в виде

$$P^{-\mu}(2,2)=P^{-\mu}(1,1)\otimes E(1,1),\quad P_1^{-\mu}(2,2)=E(1,1)\otimes P_1^{-\mu}(1,1). \tag{12}$$

Здесь двумерная матрица $P^{-\mu}(1,1)=(P_{ij}^{-\mu})$, элементы которой определяются формулой

$$P_{ij}^{-\mu}=\left(\varphi(i,\theta),\int_0^{\theta}\frac{(\theta-\tau)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\varphi(j,\tau)d\tau\right)_{L_2(T)},\quad i,j=0,1,2,\ldots, \tag{13}$$

называется *спектральной характеристикой оператора интегрирования дробного порядка* $\mu > 0$ по времени, т.е. $\mathrm{S}\lfloor D_{0+|\theta}^{-\mu} \rfloor = P^{-\mu}(1,1)$ [5], а двумерная матрица $P_1^{-\mu}(1,1) = (P_{1ij}^{-\mu})$, элементы которой определяются формулой

$$P_{1ij}^{-\mu} = \left(p(i,x), \int_a^x \frac{(x-\xi)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} p(j,\xi) d\xi \right)_{L_2(\Omega)}, \quad i,j = 0,1,2,\dots, \tag{14}$$

называется *спектральной характеристикой оператора интегрирования дробного порядка* $\mu > 0$ по координате состояния, т.е. $\mathrm{S}\lfloor D_{a+|x}^{-\mu} \rfloor = P_1^{-\mu}(1,1)$.

2. Операторы дифференцирования. Будем рассматривать оператор дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент [6-10]:

$$D_{0|\theta} h(\theta,x) = \frac{dh(\theta,x)}{d\theta} + \delta(\theta) h(\theta,x), \tag{15}$$

а также операторы дифференцирования первого и второго порядков по координате состояния:

$$D_{a+|x} h(\theta,x) = \frac{\partial h(\theta,x)}{\partial x}, \qquad D_{a+|x}^2 h(\theta,x) = \frac{\partial^2 h(\theta,x)}{\partial x^2} \tag{16}$$

где $h(\theta,x) \in L_2(Q), \quad Q = T \times \Omega,\ T = [0,t], \quad \Omega = [a,b] \subseteq R$.

Спектральные характеристики операторов дифференцирования $D_{0|\theta}$ и $D_{a+|x}$, определенные относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\theta,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(Q)$, вычисляются по определению спектральных характеристик линейных операторов и обозначаются $P(2,2) = \left(P_{i_0 i_1 j_0 j_1}\right),\ \Im_1(2,2) = (\Im_{1 i_1 i_2 j_1 j_2})$ соответственно:

$$P_{i_0,i_1,j_0,j_1} = \left(e(i_0,i_1,\theta,x), \frac{\partial e(j_0,j_1,\theta,x)}{\partial \theta} \right)_{L_2(Q)} + \left(e(i_0,i_1,\theta_0,x), e_v(j_0,j_1,\theta_0,x) \right)_{L_2(Q)},$$

$$\Im_{1 i_0,i_1,j_0,j_1} = \left(e(i_0,i_1,\theta,x), \frac{\partial e(j_0,j_1,\theta,x)}{\partial x} \right)_{L_2(Q)}, \ i_0,i_1,j_0,j_1 = 0,1,2,\dots.$$

Спектральная характеристика оператора дифференцирования $D_{a+|x}^2$ обозначается через $P_{11}(2,2)$ и определяется по свойству спектрального преобразования композиции линейных операторов:

$$\Im_{11}(2,2) = \mathrm{S}\lfloor D_{a+|x}^2 \rfloor = \mathrm{S}\lfloor D_{a+|x} \circ D_{a+|x} \rfloor = \mathrm{S}\lfloor D_{a+|x} \rfloor \cdot \mathrm{S}\lfloor D_{a+|x} \rfloor = \Im_1(2,2) \cdot \Im_1(2,2).$$

Если функции базисной системы пространства $L_2(Q)$ представляются в виде $\{e(i_0,i_1,\theta,x) = \varphi(i_0,\theta) \cdot p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, т.е. в виде произведения функций базисных систем пространств $L_2(T)$ и $L_2(\Omega)$, то

$$P(2,2)=P(1,1)\otimes E(1,1),\ \Im_1(2,2)=E(1,1)\otimes\Im_1(1,1),\ \Im_{11}(2,2)=E(1,1)\otimes\Im_{11}(1,1). \qquad (17)$$

В приведенных выражениях $P(1,1)$ - спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, определенная относительно базисной системы $\{\varphi(i,\theta)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T)$, а $\Im_1(2,2)$ и $\Im_{11}(1,1)$ - спектральные характеристики операторов дифференцирования первого и второго порядка по координате состояния, определенные относительно базиса $\{p(i_1,x))\}_{i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega)$ [5, 9, 10].

Композиция операторов дифференцирования (15)-(16) и дробного интегрирования (10)-(11) порождает операторы дробного дифференцирования [1, 5].

Приведем здесь только два свойства спектрального преобразования операторов дробного дифференцирования.

a) Свойство спектрального преобразования операторов дробного дифференцирования (модифицированного) γ- го порядка ($0<\gamma\le 1$) по времени при заданных начальных условиях:

$$S\left[D_{\theta_0|\theta}^{\gamma}h(\theta,x)\Big|_{h_{1-\lambda|\theta}(\theta_0,x)=h_{1-\lambda|\theta_0}(x)}\right]=$$
$$=P^{\gamma}(2,2)\cdot H(2,0)-\varphi(1,0;\theta_0)\otimes H_{1-\lambda|0}(1,0) \qquad (18)$$
$$\left(\begin{aligned}&\mathrm{S}\left[{}^{*}D_{\theta_0|\theta}^{\gamma}h(\theta,x)\Big|_{h(\theta_0,x)=h_0(x)}\right]=\\&\quad=P_*^{\lambda}(2,2)\cdot H(2,0)-\left(P^{-(1-\lambda)}(1,1)\cdot\varphi(1,0;\theta_0)\right)\otimes H_0(1,0)\end{aligned}\right),$$

где $P^{\gamma}(2,2)=P^{\gamma}(1,1)\otimes E(1,1)$ ($P_*^{\lambda}(2,2)=P_*^{\lambda}(1,1)\otimes E(1,1)$) – спектральная характеристика оператора (модифицированного оператора) дробного дифференцирования первого порядка по времени, определенная относительно базисной системы разложения $\{\varphi(i_0,\theta)\}_{i_0}^{\infty}$ пространства $L_2(T)$, а $H_{1-\mu|0}(1,0)$ $(H_0(1,0))$ - спектральная характеристика начального условия $h_{1-\mu|\theta_0}(x)$ $(h_0(x))$, определенная относительно базисной системы разложения $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega)$.

b) Свойство спектрального преобразования операторов дробного дифференцирования (модифицированного) α- го порядка ($1<\alpha\le 2$) по координате состояния при заданных краевых условиях первого рода:

$$
\begin{aligned}
&S\left[\left. D^{\alpha}_{a|x}h(\theta,x)\right|_{h_{2-\alpha|x}(\theta,a)=h_{2-\alpha|a}(\theta),\quad h_{2-\alpha|x}(\theta,b)=h_{2-\alpha|b}(\theta)}\right]= \\
&=\Im^{\alpha}_{11}(2,2)\cdot H(2,0)-\Im_{1}(2,2)\cdot\left[\psi_{2-\alpha|b}(1,0)\otimes p(1,0;b)-\psi_{2-\alpha|a}(1,0)\otimes p(1,0;a)\right]
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

$$
\left(
\begin{aligned}
&S\left[\left. {}^{*}D^{\alpha}_{a|x}h(\theta,x)\right|_{h(\theta,a)=h_a(\theta),\quad h(\theta,b)=h_b(\theta)}\right]= \\
&=\Im^{\alpha}_{11*}(2,2)\cdot H(2,0)-\Im^{\alpha}_{1*}(2,2)\cdot\left[\psi_{b}(1,0)\otimes p(1,0;b)-\psi_{a}(1,0)\otimes p(1,0;a)\right]
\end{aligned}
\right),
$$

где $\Im^{\alpha}_{11}(2,2)=E\otimes\left(-\Im_1(1,1)\Im_1^T(1,1)P_1^{-(2-\alpha)}(1,1)\right)$, $\Im^{\alpha}_{11*}(2,2)=E\otimes\left(-P_1^{-(2-\alpha)}(1,1)\Im_1(1,1)\Im_1^T(1,1)\right)$, $\Im_1(2,2)=E\otimes\Im_1(1,1)$, $\Im_{1*}(2,2)=E\otimes P_1^{-(2-\alpha)}(1,1)\Im_1(1,1)$ - спектральные характеристики операторов (модифицированных операторов) дробного дифференцирования второго и первого порядков по координате состояния, определенные относительно базисной системы разложения $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega)$, а $\psi_{2-\alpha|b}(1,0)$ и $\psi_{2-\alpha|a}(1,0)$ ($\psi_b(1,0)$ и $\psi_a(1,0)$) - спектральные характеристики краевых условий $h_{2-\alpha|b}(\theta)$ и $h_{2-\alpha|a}(\theta)$ ($h_b(\theta)$ и $h_a(\theta)$), определенные относительно базисной системы разложения $\{\varphi(i_0,\theta)\}_{i_0}^{\infty}$ пространства $L_2(T)$.

3. Гиперматричные передаточные функции ОРП и СРП и переходные блоки

В дальнейшем, по мере необходимости, при описании систем управления в спектральной области, спектральные характеристики любых линейных операторов (5) будем называть *гиперматричными передаточными функциями* (**ГМПФ**).

Как известно [22,23] одномерная ИПФ $G(\theta,\tau_0,x,\xi_0)$ ОРП является решением краевой задачи

$$
\begin{aligned}
&a_1(\theta,x)\frac{\partial^2 u(\theta,x)}{\partial\theta^2}+a_2(\theta,x)\frac{\partial u(\theta,x)}{\partial\theta}=b_1(\theta,x)\frac{\partial^2 u(\theta,x)}{\partial x^2}+b_2(\theta,x)\frac{\partial u(\theta,x)}{\partial x}+ \\
&+b_3(\theta,x)u(\theta,x)+\delta(\theta-\tau_0)\,\delta(x-\xi_0);\ a<x<b,\ \theta>0;
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

$$
u(0,x)=\frac{\partial u(0,x)}{\partial\theta}=0,\ \ x\in[a,b]; \qquad (21)
$$

$$
\alpha(\theta,a)u(\theta,a)+\beta(\theta,a)\frac{\partial u(\theta,a)}{\partial x}=0,\ \ \theta>0; \qquad (22)
$$

$$
\alpha(\theta,b)u(\theta,b)+\beta(\theta,b)\frac{\partial u(\theta,b)}{\partial x}=0,\ \ \theta>0 \qquad (23)
$$

и существенно зависит от краевых условий (22)-(23). Преобразование задачи (20)-(23) в спектральную область позволяет найти ГМПФ ОРП. Кроме того, формулы связи для ДНПФ последовательного, параллельного соединения и соединения с обратной связью в спектральной области для систем с сосредоточенными параметрами [6,7] остаются справедливыми и для ГМПФ последовательного, параллельного соединения и соединения с обратной связью систем с распределенными параметрами [11].

Пусть регулирование распределенной системы [22, 23] осуществляется с помощью сосредоточенного регулятора, который измеряет состояние распределенной системы в одной точке одномерной области определения выходного сигнала и производит регулирующее воздействие на распределенный блок также в одной точке области определения его входного сигнала.

Формирование математической модели такой системы управления в спектральной области связано с введением двух переходных блоков, у которых пространственная размерность входного сигнала не совпадает с пространственной размерностью выходного сигнала. Для одномерного случая эти переходные блоки описываются ИПФ $\delta(x-\alpha)$ и $\delta(\alpha-\xi)$, а их ГМПФ имеют вид

$$W_{\alpha}(2,2)=E\otimes D_{\alpha} \tag{24}$$

и

$$W_{\beta}(2,2)=E\otimes D^{\beta}, \tag{25}$$

где

$$\underset{pp}{D_{\alpha}}(j,i)=\int_{\Omega}\int_{\Omega}\delta(\alpha-\xi)p(j,x)p(i,\xi)d\xi dx=\int_{\Omega}p(j,x)dx\cdot p(i,\alpha), \tag{26}$$

$$\underset{pp}{D^{\beta}}(j,i)=\int_{\Omega}\int_{\Omega}\delta(x-\beta)p(j,x)p(i,\xi)d\xi dx=p(j,\beta)\int_{\Omega}p(i,\xi)d\xi\,. \tag{27}$$

Заметим, что более общие модели переходных блоков рассмотрены в работах [22, 23]. Для них также легко находятся их ГМПФ.

3. Моделирование диффузионных процессов с применением пакета расширения MLSY_SM+Mathcad

Пример 1. Моделирование процесса аномальной диффузии

Будем решать спектральным методом краевую задачу для уравнения аномальной диффузии [21]

$$D^{\gamma}_{0|\theta}h(\theta,x)=a(x)D^{\alpha}_{a+|x}h(\theta,x)+g(\theta,x), \tag{28}$$

которое получается из классического дифференциального уравнения диффузии

$$\frac{\partial h(\theta,x)}{\partial\theta}=a(x)\frac{\partial^2 h(\theta,x)}{\partial x^2}+g(\theta,x)$$

заменой производной второго порядка по пространственной координате на дробную производную Римана-Лиувилля порядка $1<\alpha\le 2$ и производной по времени первого порядка на дробную производную Римана-Лиувилля порядка $0<\gamma\le 1$.

Здесь, как и в стандартном уравнении диффузии $h(\theta, x)$ - функция концентрации вещества на отрезке $a \le x \le b$; $g(\theta, x)$ - функция источника/стока на данном отрезке; $a(x)$ - коэффициент диффузии. Из физических соображений следуют условия $1 < \alpha \le 2$, $0 < \gamma \le 1$ и $a(x) \ge 0$. Также имеем $\mathrm{h}_{1-\gamma}(\theta, x)\big|_{\theta=0} = h_{1-\gamma}(0, x) = f_1(x)$ для $a \le x \le b$ и граничные условия первого рода $h_{2-\alpha}(\theta, x)\big|_{x=a} = h_{2-\alpha}(\theta, a) = f_a(\theta)$ и $h_{2-\alpha}(\theta, x)\big|_{x=b} = h_{2-\alpha}(\theta, b) = f_b(\theta)$ для всех $\theta \ge 0$, где $\mathrm{h}_{1-\gamma|\theta}(\theta, x) = I_{0|\theta}^{1-\gamma} h(\theta, x)$, $\mathrm{h}_{2-\alpha|x}(\theta, x) = I_{0|x}^{2-\alpha} h(\theta, x)$ [5].

В качестве примера рассмотрим начально-краевую задачу, которая заданна в виде:

$$\begin{cases} D_{0|\theta}^{0.7} h(\theta, x) = a(x) D_{0+|x}^{1.7} h(\theta, x) + g(\theta, x), \\ h_{1-\gamma}(0, x) = 0, \qquad 0 < x \le b, \\ h_{2-\alpha}(\theta, a) = 0, \qquad 0 < \theta \le \mathrm{t}, \\ h_{2-\alpha}(\theta, b) = 0.745 \cdot \theta^2, \quad 0 < \theta \le \mathrm{t}, \end{cases} \tag{29}$$

где $g(\theta, x) = \dfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.3)} \theta^{1.3} x^2 - \theta^2 x^2$ и $a(x) = \dfrac{\Gamma(1.3)}{\Gamma(3)} x^{1.7}$.

Точным решением начально-краевой задачи (29) является функция $h(\theta, x) = \theta^2 x^2$, что может быть проверено ее прямой подстановкой в (29) и использованием формулы дробного дифференцирования [1, 2, 5].

Будем решать эту задачу спектральным методом. Для этого преобразуем заданную краевую задачу в спектральную область. Для спектрального преобразования функций времени и состояния в качестве базиса пространства $L_2(Q)$, где $Q = T \times \Omega$, $T = [0, t]$, $Q = [0, b]$, выберем такую ортонормированную систему

$$\{e(i_0, i_1, \theta, x) = \varphi(i_0, \theta) \cdot p(i_1, x)\}_{i_0, i_1}^{\infty}, \tag{30}$$

что системы функций $\{\varphi(i_0, \theta)\}_{i_0}^{\infty}$, $\{p(i_1, x)\}_{i_1}^{\infty}$ являются базисными системами пространств $L_2(T)$, $L_2(\Omega)$ соответственно. Применим спектральное преобразование к начально-краевой задачи (29). Тогда

$$\begin{aligned} & S\left[D_{0|\theta}^{0.7} h(\theta, x)\Big|_{h_{0.3|\theta}(0,x)=0} \right] = \\ & \quad = S\left[a(x) \cdot D_{0|x}^{1.7} h(\theta, x)\Big|_{h_{0.3|x}(\theta,b)=0.745\theta^2, h_{0.3|x}(\theta,0)=0} \right] + S[g(\theta, x)]. \end{aligned} \tag{31}$$

Рассмотрим левую часть равенства (31). Используем свойство спектрального преобразования операторов дифференцирования по времени при заданных начальных условиях (18), левую часть (31) представим в виде:

$$S\left[D^{0.7}_{0|\theta} h(\theta,x)\Big|_{h_{0.3|\theta}(0,x)=0} \right] = P^{0.7}(2,2)H(2,0)\,, \tag{32}$$

где $P^{0.7}(2,2)$ спектральная характеристика оператора дробного дифференцирования по времени Римана-Лиувилля с учетом значения функции в начальный момент, определенная относительно базисной системы (30), для которой, согласно (17), справедливо представление

$$P^{0.7}(2,2) = P^{0.7}(1,1) \otimes E(1,1)\,,$$

где $P^{0.7}(1,1) = P(1,1)P^{-0.3}(1,1)$ - спектральные характеристики оператора дробного дифференцирования по времени Римана-Лиувилля с учетом значения функции в начальный момент времени, определенная относительно базисной системы $\{\varphi(i_0,\theta)\}_{i_0}^{\infty}$; $E(1,1)$ - двумерная единичная матрица. Через $H(2,0)$ обозначена спектральная характеристика функции $h(\theta,x)$, определенная относительно той же базисной системы (30).

Рассмотрим теперь правую часть равенства (31). Используем свойство спектрального преобразования операторов дробного дифференцирования по состоянию при заданных краевых условиях (19) и свойство композиции операторов (7), правую часть (31) представим в виде:

$$\begin{aligned} &S\left[a(x)\cdot D^{1.7}_{0|x} h(\theta,x)\Big|_{h_{0.3|x}(\theta,b)=0.745\theta^2,\, h_{0.3|x}(\theta,0)=0} \right] + S\left[g(\theta,x)\right] = B(2,2)H(2,0) + \\ &\quad + C(2,2)\left(\Psi_b(1,0)\otimes p(1,0;b)\right) + G(2,2). \end{aligned} \tag{33}$$

В (33) $B(2,2) = E(1,1)\otimes\left(-A(1,1)\cdot\Im_1(1,1)\cdot\Im_1^T(1,1)\cdot P_1^{-0.3}(1,1)\right)$ и $C(2,2) = E(1,1)\otimes\left(A(1,1)\cdot\Im_1(1,1)\right)$ - четырехмерные гиперквадратные матрицы, где $A(1,1)$ - спектральная характеристика оператора умножения, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1}^{\infty}$; $\Im_1(1,1)$ - спектральная характеристика оператора дифференцирования по координате состояния, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1}^{\infty}$; $E(1,1)$ - двумерная единичная матрица. $H(2,0)$ - спектральная характеристика функции $h(\theta,x)$, определенная относительно базисной системы $\{\varphi(i_0,\theta)\cdot p(i_1,x)\}_{i_0,i_1}^{\infty}$. $\Psi_b(1,0)$ - спектральная характеристика краевого условия $h_{0.3}(b,x) = \psi_b(x) = 0.745\theta^2$, определенная относительно базисной системы $\{\varphi(i_0,\theta)\}_{i_0}^{\infty}$. Через $p(1,0;b)$ обозначена матрица-столбец функций базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1}^{\infty}$ в точке $x=b$.

С учетом введенных обозначений уравнение (31) можно переписать следующим образом

$$\left[P^{0.7}(2,2)-B(2,2)\right]H(2,0)=G(2,2)+C(2,2)\left(\Psi_b(1,0)\otimes p(1,0;b)\right). \qquad (34)$$

Выражая спектральную характеристику $H(2,0)$ из уравнения (34), получаем

$$H(2,0)=\left[P^{0.7}(2,2)-B(2,2)\right]^{-1}\left\{G(2,2)+C(2,2)\left(\Psi_b(1,0)\otimes p(1,0;b)\right)\right\}. \qquad (35)$$

Для получения решения задачи (29) в пространстве функции времени и состояния требуется применить формулу обращения:

$$h(\theta,x)=\sum_{j=0}^{L_1-1}\sum_{i=0}^{L_2-1}h_{j,i}\cdot\varphi(j,\theta)\cdot p(i,x), \qquad (36)$$

где $h_{j,i}$ – координаты спектральной характеристики $H(2,0)$, $\theta\in[0,t]$, $x\in[0,b]$.

Для решения этой задачи используем пакет расширения Spektr_SM СКМ Mathcad [5, 12]. В качестве базисных систем $\{\varphi(i_0,\theta)\}_{i_0}^{\infty}$, $\{p(i_1,x)\}_{i_1}^{\infty}$ будем использовать полиномы Лежандра.

***Решение задачи*:**

Листинг 1.

$N1 := 4$ <-порядок усечения матрицы ДНПФ по времени

$N2 := 4$ <-порядок усечения матрицы ДНПФ по состоянию

$t := 1 \quad b := 1 \quad L1 := 20 \quad L2 := 10$

$\psi_1(t) := 0.745 \cdot t^2$ <- краевое условие.

$a(x) := \dfrac{\Gamma(1.3)}{\Gamma(3)} \cdot x^{1.7} \quad g(\theta,x) := \left(\dfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.3)} \cdot x^2 \cdot \theta^{1.3}\right) - x^2 \cdot \theta^2$

$g1(\theta) := \left(\dfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.3)} \cdot \theta^{1.3}\right) - \theta^2 \quad g2(x) := x^2$

$G2 := SNXPP1(g2, N2, b) \quad G1 := SNXPP1(g1, N1, t)$

$FN := G1 \cdot G2^T$ <-ДНСХ входного распределенного воздействия.

$G := FC2(FN) \quad A := SYZPP1(a, N1, t) \quad A := SYZPP1(a, N2, b)$

$I\beta1 := SI\beta PP1(N1, t, 0.3) \quad I\beta2 := SI\beta PP1(N2, b, 0.3)$

$\Psi_1 := SNXPP1(\psi_1, N1, t)$ <- НСХ краевого условия.

$NBt := SNBPP1(L1, N1, t)$

$NBx := SNBPP1(L2, N2, b)$ <- БС полиномов Лежандра.

$E1 := identity(N1) \quad E2 := identity(N2)$

$P1 := SP1PP3(b, N2)$

$I1 := SI1PP1(t, N1)$ <- ДНПФ элементарных звеньев.

$WT := SP1PP1(t, N1) \cdot I\beta 1 \qquad WX := A \cdot \left(P1 \cdot P1^T \cdot I\beta 2\right)$

$i := 0..\,N1 - 1 \quad \Delta t_{i,0} := NBt_{0,i} \qquad j := 0..\,N2 - 1 \quad \Delta b_{j,0} := NBx_{L2,j}$

$W := (TP(WT, E2) + TP(E1, WX))^{-1}$

<- ГМПФ ДУ. Здесь TP(A,B) - программа вычисления тензорного произведения матриц A и B.

$KY := \Psi_1 \cdot \Delta b^T$ <- матрицы ДНСХ краевых значений.

$GK := [TP[E1, A \cdot (P1 \cdot 1)] \cdot FC2(KY)]$

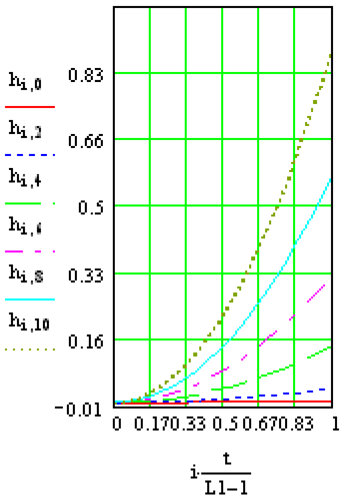
<- ГСМ ДНСХ краевых значений. Здесь FC2(A) - программа вычисления гиперстолбцовой матрицы по матрице A.

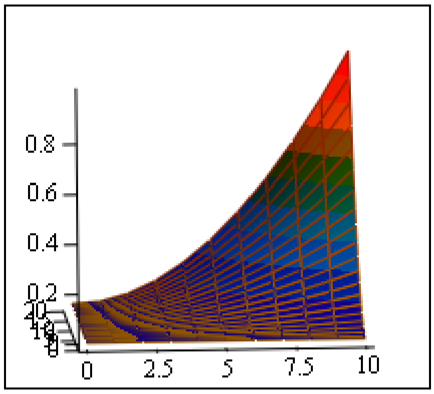
$H_{20} := W \cdot (GK + G)$ <- ГСМ ДНСХ выходного распределенного сигнала.

$H := FM2\left(H_{20}, N2\right)$ <- матрица ДНСХ выходного распределенного сигнала.

Визуализация решения начально-краевой задачи, найденного спектральным методом.

$i := 0..\,L1 \quad j := 0..\,L2 - 1 \quad h := SNBPP1(L1, N1, t) \cdot H \cdot SNBPP1(L2, N2, b)^T$



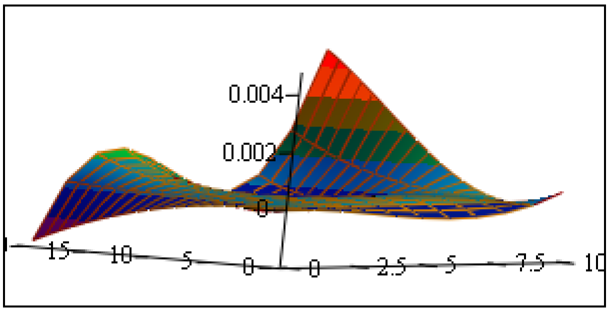


h^T

Аналитическое решение задачи.

$$h1(L1, L2, b, t) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..\,L1 \\ \quad \text{for } j \in 0..\,L2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} t1 \leftarrow i \cdot \dfrac{t}{L1} \\ x1 \leftarrow j \cdot \dfrac{b}{L2} \\ c_{i,j} \leftarrow t1^2 \cdot x1^2 \end{array} \right. \\ c \end{array} \right.$$

Сравнение аналитического решение задачи и решения найденного спектральным методом.



h1(L1,L2,b,t)^T - h^T

Коней листинга 1.

Заметим, что если в начально-краевой задачи (29) вместо дробных производных Римана-Лиувилля использовать модифицированные производные Римана-Лиувилля [1, 2, 5], то она примет вид:

$$\begin{cases} {}^{*}D^{0.7}_{0|\theta}h(\theta,x)-a(x)\cdot{}^{*}D^{1.7}_{0+|x}h(\theta,x)=g(\theta,x), \\ h(0,x)=0, \quad 0<x\le b, \\ h(\theta,a)=0, \quad 0<\theta\le \mathrm{t}, \\ h(\theta,b)=\theta^2, \quad 0<\theta\le \mathrm{t}, \end{cases} \tag{37}$$

где $g(\theta,x)=\dfrac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.3)}\theta^{1.3}x^2-\theta^2x^2$ и $a(x)=\dfrac{\Gamma(1.3)}{\Gamma(3)}x^{1.7}$.

Применяя спектральное преобразование к начально-краевой задачи (37), получим

$$\begin{aligned}&\left[P^{0.7}_{*}(2,2)-A(2,2)\Im^{1.7}_{11*}(2,2)\right]H(2,0)=G(2,0)+\\&+A(2,2)\Im^{1.7}_{1*}(2,2)\left(\psi_b(1,0)\otimes p(1,0,b)\right).\end{aligned} \tag{38}$$

Выражая спектральную характеристику $H(2,0)$ из уравнения (38), найдем

$$\begin{aligned}H(2,0)=&\left[P^{0.7}_{*}(2,2)-A(2,2)\Im^{1.7}_{11*}(2,2)\right]^{-1}\cdot\{G(2,0)+\\&+A(2,2)\Im^{1.7}_{1*}(2,2)\left(\psi_b(1,0)\otimes p(1,0,b)\right)\}.\end{aligned} \tag{39}$$

В (39) $\Im^{1.7}_{11*}(2,2)=E(1,1)\otimes\left(-\Im^{1.7}_{1*}(1,1)\cdot\Im^{T}_{1}(1,1)\right)=E(1,1)\otimes\left(-P^{-0.3}_{1}(1,1)\Im_1(1,1)\cdot\Im^{T}_{1}(1,1)\right)$ и $\Im_1(2,2)=E(1,1)\otimes\Im^{T}_{1}(1,1)$ - четырехмерные гиперквадратные матрицы, где $\Im_1(1,1)$ - спектральная характеристика оператора дифференцирования по координате состояния, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,x)\}^{\infty}_{i_1}$, а $E(1,1)$ - двумерная единичная матрица. $H(2,0)$ - спектральная характеристика функции $h(\theta,x)$, определенная относительно базисной системы $\{\varphi(i_0,\theta)\cdot p(i_1,x)\}^{\infty}_{i_0,i_1}$. $\Psi_b(1,0)$ - спектральная характеристика краевого условия первого рода $h(\theta,b)=\psi_b(\theta)=\theta^2$, определенная относительно базисной системы $\{\varphi(i_0,\theta)\}_{i_0}^{\infty}$. Через $p(1,0;b)$ обозначена матрица-столбц функций базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1}^{\infty}$ в точке $x=b$.

Точным решением этой задачи так же является функция $h(\theta,x)=\theta^2x^2$, которая является решением задачи (29). Результаты решения задачи (37) спектральным методом совпадают с результатами, приведенными в листинге 1. Это можно показать, используя формулу связи [5] между операторами дробного дифференцирования Римана-Лиувилля и модифицированными операторами дробного дифференцирования Римана-Лиувилля. Для нашей задачи имеем: $D_{0|\theta}^{\gamma}h(\theta,x)=\dfrac{h(0,x)}{\Gamma(1\text{-}\gamma)\cdot\theta^{\gamma}}+{}^{*}D_{0|\theta}^{\gamma}h(\theta,x),\quad 0<\gamma\le 1;$

$$D_{0+|x}^{\alpha}h(\theta,x)=\frac{h(\theta,x)}{\Gamma(1\text{-}\alpha)\cdot x^{\alpha}}+\frac{h_x^{(1)}(\theta,x)}{\Gamma(2\text{-}\alpha)\cdot x^{\alpha-1}}+{}^{*}D_{0+|x}^{\alpha}h(\theta,x),\quad 1<\alpha\le 2.$$

Пример 2. Моделирование нейтронной кинетики ядерного реактора в одногрупповом диффузионном приближении

Рассмотрим описание переноса нейтронов в одногрупповом диффузионном приближении, относящегося к случаю, когда коэффициент диффузии можно принять не зависящим от пространственных переменных [19, 21]:

$$\begin{gathered}\frac{1}{V}\frac{\partial\Phi(\theta,\vec r)}{\partial\theta}=D\nabla^2\Phi(\theta,\vec r)-\sum\nolimits_a(t,\vec r)\Phi(\theta,\vec r)+\\+\left(1-\beta_{\text{эфф}}\right)k_\infty(\theta,\vec r)\sum\nolimits_a(\theta,\vec r)\Phi(\theta,\vec r)+\sum_{i=1}^{M}\lambda_iC_i(\theta,\vec r).\end{gathered}\tag{40}$$

В уравнении (40): Φ - плотность потока нейтронов; C_i - концентрация ядер-предшественников запаздывающих нейтронов i-той группы; V - средняя скорость нейтронов; D - коэффициент диффузии; $\sum_a$ - сечение поглощения; $\beta_{\text{эфф}}$ - эффективная доля запаздывающих нейтронов; λ_{i}- постоянная распада ядер-предшественников i-ой группы; $k_\infty=\nu\sum_f/\sum_a$ - коэффициент размножения нейтронов для бесконечной среды, где $\sum_f$ - сечение деления, а ν - среднее число нейтронов.

Перепишем это уравнение для плотности нейтронов N (с учетом того, что $\Phi=N\cdot V,\ V$ - скорость нейтрона) совместно с уравнением для концентрации предшественников запаздывающих нейтронов. Получим:

$$\frac{\partial N}{\partial\theta}=\frac{L^2}{l\cdot k_{\text{эфф}}\cdot(1+L^2B^2)}\nabla^2N+\left(\frac{\rho-\beta_{\text{эфф}}}{l}+\frac{L^2B^2}{l\cdot k_{\text{эфф}}\cdot(1+L^2B^2)}\right)N+\sum_{i=1}^{M}\lambda_iC_i\,,\tag{41}$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial\theta}=-\lambda_iC_i+\frac{\beta_{\text{i}}^{\text{эфф}}}{l}N\,.\tag{42}$$

В уравнениях (41) и (42): N - плотность тепловых нейтронов (мощность); $L^2=D/\sum_a$ - квадрат длины диффузии тепловых нейтронов; B^2 - материальный лапласиан; $\beta_i^{\text{эфф}}$ - эффективная доля запаздывающих нейтронов i-ой группы; $k_{\text{эфф}} = k_\infty/(1+L^2\mathrm{B}^2)$ - эффективный коэффициент размножения нейтронов; $l = l_0 / k_{\text{эфф}}$ - среднее время жизни нейтронов, где $l_0 = l_\infty/(1+L^2\mathrm{B}^2)$ - время жизни нейтронов в среде конечных размеров, а $l_\infty = 1/\mathrm{V}\cdot\sum_a$ - среднее время жизни нейтрона в бесконечной среде; $\rho = (k_{\text{эфф}} - 1)/k_{\text{эфф}}$ - реактивность.

Линеаризуем диффузионные уравнения (41), (42). Для этого представим значения каждой из функций $N(\theta,\vec{r}), C_i(\theta,\vec{r})$ в отклонениях от соответствующих величин в стационарном состоянии, т.е.

$$N(\theta,\vec{r}) = N(0,\vec{r}) + \delta N(\theta,\vec{r}) = N_0 + \delta N;\ C_i(\theta,\vec{r}) = C_i(0,\vec{r}) + \delta C_i(\theta,\vec{r}) = C_{i0} + \delta C_i$$

и учтем, что в стационарном состоянии $\nabla^2 N(\vec{r}) + B^2 N(\vec{r}) = 0$. Тогда для плоского реактора (одномерный случай) в отклонениях от стационарного состояния их можно записать, с учетом начальных и краевых условий, в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{n}(\theta,x)}{\partial\theta} - \dfrac{L^2}{l\cdot(1+L^2B^2)}\left[\dfrac{\partial^2\tilde{n}(\theta,x)}{\partial x^2} + B^2\tilde{n}(\theta,x)\right] + \dfrac{\beta_{\text{эфф}}}{l}\tilde{n}(\theta,x) - \\ \qquad -\dfrac{1}{l}\sum_{i=1}^{6}\beta_i^{\text{эфф}}\tilde{c}_i(\theta,x) = \dfrac{N_0(x)}{l\cdot N_0^{\max}}\delta\rho(\theta,x); \\ \dfrac{\partial\tilde{c}_i(\theta,x)}{\partial\theta} + \lambda_i\tilde{c}_i(\theta,x) = \dfrac{\beta_{\mathrm{i}}^{\text{эфф}} N_0^{\max}}{l\cdot C_0^{\max}}\ \tilde{n}(\theta,x); \\ i = 0,1,\ldots 6;\ 0 < x < b;\ \theta > 0; \\ \tilde{n}(0,x) = \tilde{n}_0(x) = 0,\ \tilde{c}_i(0,x) = \tilde{c}_{i0}(x) = 0; \\ \tilde{n}(\theta,0) = \tilde{n}(\theta,b) = 0, \end{cases} \qquad (43)$$

где $\tilde{n}(\theta,x) = \delta N(\theta,x)/N_0^{\max}$ - безразмерная нормированная плотность потока нейтронов, $\tilde{c}(\theta,x) = \delta C(\theta,x)/C_0^{\max}$ - нормированное отклонение концентрации ядер-предшественников запаздывающих нейтронов i – ой группы.

Решение начально-краевой задачи (43) выполним с использованием спектральной формы математического описания [9-12]. Для спектрального преобразования функций времени и состояния в качестве базиса пространства $L_2(Q)$, где $Q = T\times\Omega$, $T = [0,t_1]$, $\Omega = [0,b]$, выберем такую ортонормированную систему $\{e(i_0,i_1,\theta,x) = \varphi(i_0,\theta)\cdot p(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, что системы функций $\{\varphi(i_0,\theta)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ являются базисными системами пространств $L_2(T)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно.

Применим спектральное преобразование к системе уравнений (43). Так как ГСМ НСХ частных производных, входящих в систему уравнений (43), с учетом начальных и краевых условий, вычисляются по правилам: $S\left[\dfrac{\partial\tilde{n}(\theta,x)}{\partial\theta}\right] = P(2,2)\tilde{N}(2,0)$,

$S\left[\dfrac{\partial \tilde{c}_i(\theta,x)}{\partial\theta}\right]=P(2,2)\tilde{C}_i(2,0)$, $S\left[\dfrac{\partial^2 \tilde{n}(\theta,x)}{\partial x^2}\right]=\Im_{11}(2,2)\tilde{N}(2,0)$, а ГСМ НСХ $S\left[\dfrac{N_0(x)}{N_0^{\max}}\delta\rho(\theta,x)\right]=A(2,2)G(2,0)$, где $P(2,2)=P(1,1)\otimes E(1,1)$, $\Im_{11}(2,2)=E(1,1)\otimes(-\Im_1(1,1)\,\Im_1^T(1,1))$, $A(2,2)=E(1,1)\otimes A(1,1)$, то краевая задача (43) в спектральной области записывается в виде

$$\begin{cases} P(2,2)\tilde{N}(2,0)-\dfrac{L^2}{l\cdot(1+L^2B^2)}\left[\Im_{11}(2,2)\tilde{N}(2,0)+B^2\tilde{N}(2,0)\right]+\dfrac{\beta_{\text{эфф}}}{l}\tilde{N}(2,0)- \\ \qquad -\dfrac{1}{l}\sum\limits_{i=1}^{6}\beta_i^{\text{эфф}}\tilde{C}_i(2,0)=\dfrac{1}{l}A(2,2)G(2,0); \\ P(2,2)\tilde{C}_i(2,0)+\lambda_i\tilde{C}_i(2,0)=\dfrac{\beta_{\text{i}}^{\text{эфф}}N_0^{\max}}{l\cdot C_0^{\max}}\tilde{N}(2,0). \end{cases} \qquad (44)$$

Решая систему матричных уравнений (44), находим ГСМ НСХ безразмерной нормированной мощность реактора

$$\tilde{N}(2,0)=W_{кин}^{6}(2,2)G(2,0), \qquad (45)$$

где

$$W_{кин}^{6}(2,2)=\frac{1}{l}\left\{P(2,2)-\frac{L^2}{l\cdot(1+L^2B^2)}\left[\Im_{11}(2,2)+B^2E\right]+\frac{\beta_{\text{эфф}}}{l}E+\right. \\ \left.+\frac{N_0^{\max}}{l\cdot C_0^{\max}}\sum_{i=1}^{6}\lambda_i\beta_{\text{i}}^{\text{эфф}}\left[P(2,2)+\lambda_iE(2,2)\right]^{-1}\right\}^{-1}A(2,2) \qquad (46)$$

- ГМПФ кинетики нейтронов ядерного реактора, найденная для модели с шестью группами запаздывающих нейтронов, а

$$G(2,0)=S\left[\delta\rho(\theta,x)\right] \qquad (47)$$

- ГСМ НСХ входного воздействия.

Для получения решения задачи (43) в пространстве функций времени и состояния применим формулу обращения

$$u(\theta,x)=\sum_{j=0}^{L_1-1}\sum_{i=0}^{L_2-1}u_{j,i}\cdot\varphi(j,\theta)\cdot p(i,x), \qquad (48)$$

где $u_{j,i}$ – координаты ГСМ НСХ $U(2,0)$, $\theta\in[0,t]$, $x\in[0,b]$.

Для решения этой задачи используем пакет расширения Spektr_SM СКМ Mathcad [5, 12]. В качестве базисных систем $\{\varphi(i_0,\theta)\}_{i_0}^{\infty}$, $\{p(i_1,x)\}_{i_1}^{\infty}$ будем использовать полиномы Лежандра. Листинг программы расчета здесь не приводится.

Результаты моделирования по рассмотренным алгоритмам, заданной реактивности $\rho(\theta) = 0.1 \cdot \beta \cdot 1(\theta - 40)$, а также параметрам, которые определяют кинетику ядерного реактора [19, 21]:

$$b = 850,\ L = 2.23,\ B = \frac{\pi}{2 \cdot b},\ l = 0.001,\ \beta = 0.0065,\ \lambda_1 = 0.0124,\ \lambda_2 = 0.0305,$$
$$\lambda_3 = 0.111,\ \lambda_4 = 0.301,\ \lambda_5 = 1.14,\ \lambda_1 = 3.01,\ \beta_1 = 0.0002145,\ \beta_2 = 0.0014235,$$
$$\beta_3 = 0.0012740,\ \beta_4 = 0.0025675,\ \beta_5 = 0.0007475,\ \beta_6 = 0.0002730,$$

приведены на рис.1. На рис.1. а) показаны сечения поверхности безразмерной нормированной плотности потока нейтронов в плоском реакторе во времени, а на рис. 1. б) показана сама поверхность относительной плотности распределения потока нейтронов во времени и пространстве.

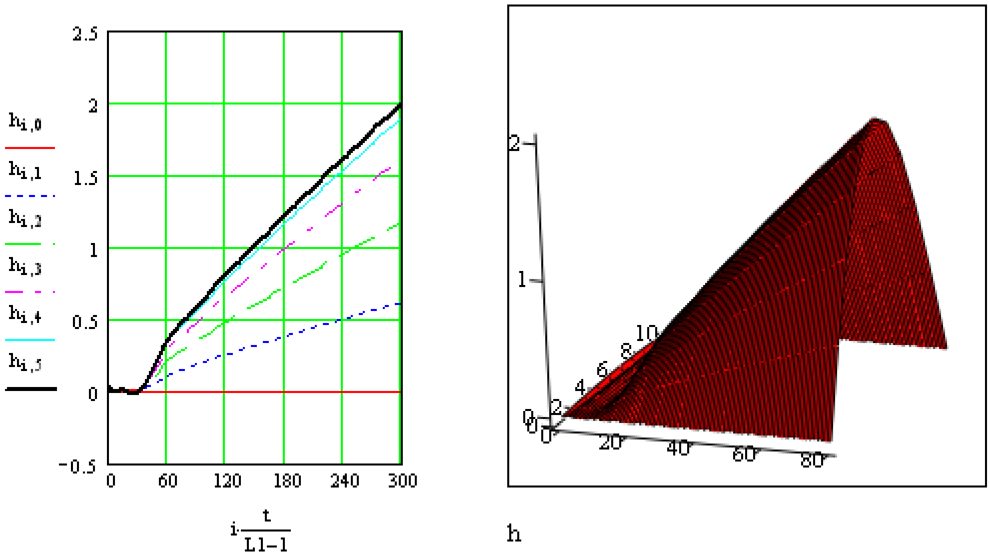


Рис. 1

4. Моделирование системы управления ядерной энергетической установкой с распределенными параметрами с применением пакета расширения MLSY_SM+Mathcad

Основной задачей автоматического управления ядерной энергетической установкой является управление нейтронной мощностью. Применение спектрального метода для математического моделирования САУ мощностью ядерного реактора, уравнения кинетики которого описываются точечной моделью, рассмотрено в работе [19]. Математическую модель САУ ядерной энергетической установкой, рассмотренной в работе [19], можно модифицировать под реактор, который описывается уравнениями кинетики с распределенными параметрами. Спектральная схема такой модифицированной САУ ядерного реактора приведена на рис 2.

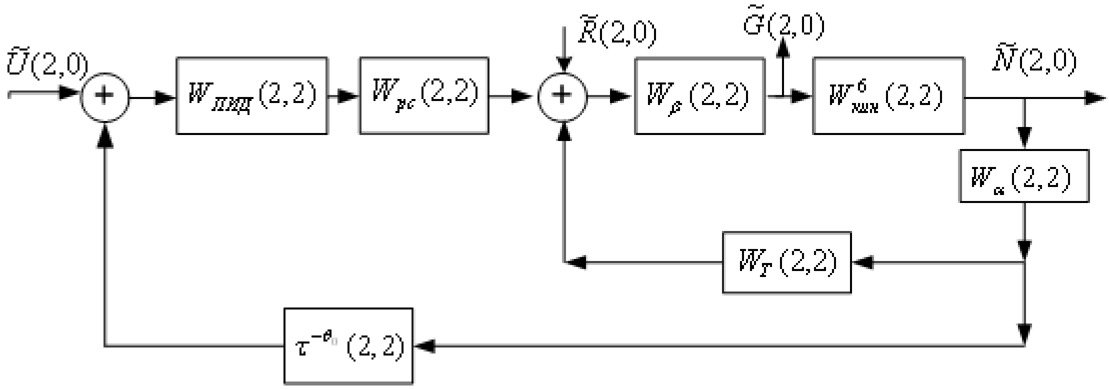


Рис. 2

В этой модели кинетика нейтронов ядерного реактора описывается ГМПФ (46), которая найдена для распределенной модели с шестью группами запаздывающих нейтронов.

Тепловые процессы, управление мощностью реактора, а также дробный ПИД регулятор и эффекты запаздывания учтены ГМПФ: $W_T(2,2) = W_T(1,1) \otimes E$, $W_{pc}(2,2) = W_{pc}(1,1) \otimes E$, $W_{ПИД}(2,2) = W_{ПИД}(1,1) \otimes E$, $W_{CD}(2,2) = W_{CD}(1,1) \otimes E$ соответственно. Эти ГМПФ сами выражаются через ДНПФ $W_T(1,1) = W_T(t,t) = -\alpha \cdot T_0 A \cdot \left[\tau_{oc} P(t,t) + E\right]^{-1}$, $W_{pc}(1,1) = W_{pc}(t,t) = k_{пр}\left[\tau_{пр} P(t,t) + E\right] \cdot P^{-1}(t,t)$,

$W_{\text{ПИД}}(1,1) = W_{\text{ПИД}}(t,t) = k_1 E + k_2 \Im^{\alpha}(t,t) + k_3 P^{-\mu}(t,t)$, $W_{CD}(1,1) = \tau^{-\theta_0}(t,t)$, рассмотренные в работе [19].

Кроме того спектральная схема САУ ядерного реактора содержит два переходных блока $W_{\alpha}(2,2)$ и $W_{\beta}(2,2)$ (см. формулы (24)-(27)), в которых параметр $\alpha = \beta = b/2$.

По спектральной схеме САУ ядерного реактора, ГМПФ звеньев, входящих в ее состав, находим четыре ГМПФ:

$$W_{\tilde{u}}^{\tilde{n}}(2,2) = \left[E \otimes E + W_1(2,2) \cdot W_{\text{рс}}(2,2) \cdot W_{ПИД}(2,2) \cdot \tau^{-\theta_0}(2,2) W_{\alpha}(2,2)\right]^{-1} \times \\ \times W_1(2,2) \cdot W_{\text{рс}}(2,2) \cdot W_{ПИД}(2,2), \tag{49}$$

$$W_{\rho_{возм}}^{\tilde{n}}(2,2) = \left[E \otimes E + W_{кин}(2,2) W_{\beta}(2,2) \left(W_{\text{т}}(2,2) + \right.\right. \\ \left.\left. + W_{\text{рс}}(2,2) \cdot W_{ПИД}(2,2) \cdot \tau^{-\theta_0}(2,2)\right) W_{\alpha}(2,2\right]^{-1} W_{кин}(2,2) W_{\beta}(2,2), \tag{50}$$

$$W_{\tilde{u}}^{\rho}(2,2) = \left[E \otimes E + W_2(2,2) \cdot W_{\text{рс}}(2,2) \cdot W_{ПИД}(2,2) \cdot \tau^{-\theta_0}(2,2) \times \right. \\ \left. \times W_{\alpha}(2,2) \cdot W_{кин}(2,2)\right]^{-1} \cdot W_2(2,2) \cdot W_{\text{рс}}(2,2) \cdot W_{ПИД}(2,2), \tag{51}$$

$$W_{\rho_{возм}}^{\rho}(2,2) = \left[E \otimes E + W_2(2,2) \cdot W_{\text{рс}}(2,2) \cdot W_{ПИД}(2,2) \cdot \tau^{-\theta_0}(2,2) \times \right. \\ \left. \times W_{\alpha}(2,2) \cdot W_{кин}(2,2)\right]^{-1} \cdot W_2(2,2), \tag{52}$$

где

$$W_1(2,2)=\left[E\otimes E+W_{кин}(2,2)W_{\beta}(2,2)\cdot W_{т}(2,2)W_{\alpha}(2,2)\right]^{-1}W_{кин}(2,2)W_{\beta}(2,2),$$

$$W_2(2,2)=\left[E\otimes E+W_{\beta}(2,2)W_{т}(2,2)\cdot W_{\alpha}(2,2)\cdot W_{кин}(2,2)\right]^{-1}\cdot W_{\beta}(2,2).$$

По ГМПФ (49) и (50), ГСМ НСХ приращения мощности потока нейтронов $\tilde{u}$ и реактивности $\rho_{возм}$, вносимой внешним возмущающим воздействием, находим ГСМ НСХ для относительного приращения мощности потока нейтронов $\tilde{n}$

$$\tilde{N}(2,0)=W_{\tilde{u}}^{\tilde{n}}(2,2)\cdot\tilde{U}(2,0)+W_{\rho_{возм}}^{\tilde{n}}(2,2)\cdot\tilde{R}(2,0). \quad (53)$$

По ГМПФ (51) и (52), ГСМ НСХ приращения мощности потока нейтронов $\tilde{u}$ и реактивности $\rho_{возм}$, вносимой внешним возмущающим воздействием, находим ГСМ НСХ для относительного приращения реактивности ρ

$$\tilde{G}(2,0)=W_{\tilde{u}}^{\rho}(2,2)\cdot\tilde{U}(2,0)+W_{\rho_{возм}}^{\rho}(2,2)\cdot\tilde{R}(2,0). \quad (54)$$

Для решения этой задачи используем пакет расширения Spektr_SM СКМ Mathcad [5, 12]. В качестве базисных систем $\{\varphi(i_0,\theta)\}_{i_0}^{\infty}$, $\{p(i_1,x)\}_{i_1}^{\infty}$ будем использовать полиномы Лежандра. Листинг программы расчета здесь не приводится.

Некоторые результаты моделирования САУ ядерной энергетической установки с распределенными параметрами спектральным методом (см. раздел 3, пример 2) по рассмотренным алгоритмам и заданных управлении $\tilde{u}(\theta)=0.05\cdot\left(1(\theta-20)-0.9\cdot 1(\theta-75)\right)$ и возмущении $\rho_{возм}(\theta)=0.1\cdot\beta\cdot\left(1(\theta-40)\right)$, а также параметрах САУ ядерной энергетической установки, заданных в [19], приведены на рис.3. На рис. 3. а) показаны сечения поверхности безразмерной нормированной плотности потока нейтронов в плоском реакторе во времени, а на рис. 3. б) показана сама поверхность относительной плотности распределения потока нейтронов во времени и пространстве.

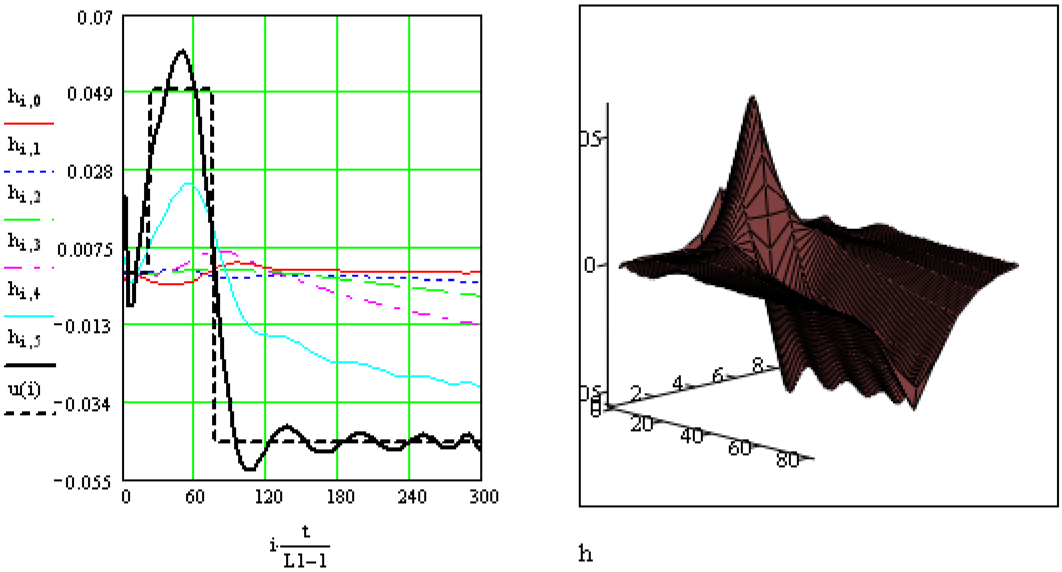


Рис. 3

В заключение заметим, что в данной статье спектральный метод применяется для моделирования распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления. Для моделирования таких процессов и систем модифицирован и применен пакет расширения MLSY_SM СКМ Mathcad. Этот пакет, а также пакеты расширения MLSY_SM, Spektr_SM+Simulink+Matlab, Spektr_SM+VisSim+Mathcad СКМ [12-19] позволяют проводить не только детерминированный, но и стохастический анализ распределенных САУ различных классов, а также проводить параметрическую оптимизацию параметров распределенных САУ. В частности можно исследовать влияние степени дробности операторов дробного интегрирования и дробного дифференцирования на переходные процессы, протекающие в САУ [5] и по критериям оптимальности решать задачу оптимизации параметров регулятора.

Библиографический список

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. – 1987. – 688 с.
2. Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппраксимационные методы в моделировании динамических систем. – К.: НАН Украины, 2008. – 255с.
3. Потапов А.А., Гильмутдинов А.Х., Ушаков П.А. Фрактальные элементы и радиосистемы: Физические аспекты / Под ред. А.А. Потапова (Библиотека журнала «Нелинейный мир»: Научная серия «Фракталы. Хаос. Вероятность»).- М.: Радиотехника, 2009. – 200 с.

4. Бекмачев Д.А., Потапов А.А., Ушаков П.А. Проектирование фрактальных пропорционально-интегрально-дифференциальных регуляторов дробного порядка // Успехи современной радиоэлектроники. 2011. №5. С. 13 – 20.
5. Рыбин В.В. Моделирование дробных нестационарных систем управления в СКМ спектральным методом // Вестник Московского авиационного института. - 2011. Т. 18. № 6. – С.102 – 118.
6. Солодовников В.В. и др. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. – М.: Машиностроение, 1979.– 664 с.
7. Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М., Наука, 1974.– 336 с.
8. Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 632с.
9. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления – М.: Вузовская книга, 2006. – 392 с.
10. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ-Принт, 2010. – 160 с.
11. Клевцов Ю. А. Спектральный метод моделирования и идентификации объектов с распределенными параметрами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Киевский политехнический институт. Киев,1984. – 97 с.
12. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики.. – М.: Изд-во МАИ, 2011. – 220 с.
13. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в биортогональных вейвлет-базисах // Электронный журнал “Труды МАИ” – 2009, № 33. – http://www.mai.ru
14. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных непрерывных систем управления в базисах вейвлетов. // Электронный журнал “Труды МАИ” – 2003, № 10. – http://www.mai.ru
15. Рыбин В.В. Разработка и применение пакетов расширения MLSY_SM СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab.// Электронный журнал “Труды МАИ”- 2003, № 13. – http://www.mai.ru
16. Рыбин В.В. Разработка и применение пакета расширения Spektr_SM СКМ Matlab.// Электронный журнал “Труды МАИ” – 2003, № 13. – http://www.mai.ru

17. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в базисах Добеши М-го порядка // Электронный журнал “Труды МАИ”- 2009, № 33. – http://www.mai.ru
18. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в проекционно-сеточных финитных базисах // Электронный журнал “Труды МАИ” – 2010, № 41. – http://www.mai.ru
19. Рыбин В.В. Моделирование САУ ядерной энергетической установкой в СКМ спектральным методом // Электронный журнал “Труды МАИ” – 2012, № 50. – http://www.mai.ru
20. Петухов А.А., Ревизников Д.Л. Алгоритмы численного решения дробно-дифференциальных уравнений // Вестник Московского авиационного института. – 2009. Т. 16. №6. С.228 – 234.
21. Халимончук В.А. Динамика реактора с распределенными параметрами в исследованиях переходных режимов эксплуатации ВВЭР и РБМК. – К.: Основа, 2008. – 228 с.
22. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами (справочное пособие). – М.:Наука,1979. - 224 с.
23. Рапопорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003 г. – 299 с.

Сведения об авторах

Рыбин Владимир Васильевич, доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета), тел.: +7 499 158-48-11, e-mail: vv-ribin@mail.ru