Труды МАИ. 2023. № 130
Trudy MAI, 2023, no. 130

Научная статья
УДК 531.38
DOI: 10.34759/trd-2023-130-11

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ, СОВЕРШАЮЩИХ ЗАДАННОЕ ДВИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Вин Ко Ко[1]✉, Александр Николаевич Темнов[2]

[1,2]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

[1]*win.c.latt@gmail.com*✉

[2]*antt45@mail.ru*

Аннотация. Статья посвящена формулировке вариационного принципа задач нелинейной динамики многослойной идеальной тяжелой жидкости, находящейся в цилиндрической полости твердого тела, совершающего заданные угловые колебания вокруг неподвижной оси. Подобная проблема обусловлена тем, что применение в механике сплошных сред вариационного принципа построено на основании принципа Гамильтона - Остроградского, математическая форма записи которого в переменных Эйлера для задач гидродинамики приобретает существенные математические отличия.

В статье показывается, что с помощью вариационного принципа, записанного в виде отличного от традиционного, можно получить полную совокупность

уравнений нелинейных движений жидкостей, включая нелинейные кинематические и динамические условия на поверхностях раздела жидкостей, заполняющих полость твёрдого тела, совершающего заданное движение.

Ключевые слова: вариационный принцип, несмешивающиеся жидкости, возмущённая поверхность раздела, нелинейная краевая задача, движения сравнений

Для цитирования: Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Вариационная формулировка нелинейных краевых задач динамики двух жидкостей, совершающих заданное движение в пространстве // Труды МАИ. 2023. № 130. DOI: 10.34759/trd-2023-130-11

Original article

VARIATIONAL FORMULATION OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN THE DYNAMICS OF TWO FLUIDS PERFORMING A GIVEN MOTION IN SPACE

Win Ko Ko[1]✉, Alexander N. Temnov[2]

[1,2]Moscow State Technical University. N.E. Bauman,

Moscow, Russia

[1]*win.c.latt@gmail.com*✉

[2]*antt45@mail.ru*

Abstract. This article contains the derivation of the equations of motion of a solid case with a two-layer fluid, considered as one mechanical system. The dynamics is based on the principle of least action in the form of Hamilton-Ostrogradsky. The variational formulation of the problem of dynamics has certain advantages, for example, from the point of view of substantiating the necessity and sufficiency of the derived equations and boundary conditions, and considering the body and fluid as one system allows one to achieve a certain multiplicity. The mechanical meaning of the equations is interpreted, which are presented in several different forms, in particular, in the form of the Lagrange equations. The question of the integrals of the equations of motion and the conditions under which they take place is considered.

The article is devoted to the formulation of the variational principle for a multilayer ideal heavy fluid located in a cylindrical cavity of a solid body that performs specified angular oscillations around a fixed axis. A similar problem is due to the fact that the application of the variational principle in continuum mechanics is based on the Hamilton-Ostrogradsky principle, the mathematical form of which is written in Euler variables for hydrodynamic problems acquires significant mathematical differences. The article shows that with the help of the variational principle, written in a form different from the traditional one, it is possible to obtain a complete set of equations of nonlinear motions of liquids, including nonlinear kinematic and dynamic conditions on the interfaces of liquids filling the cavity of a solid body that performs a given movement.

Keywords: variational principle, immiscible liquids, perturbed interface, nonlinear boundary value problem, comparison motions

For citation: Win Ko Ko, Temnov A.N. Variational Formulation Of Nonlinear Boundary Value Problems In The Dynamics Of Two Fluids Performing A Given Motion In Space. *Trudy MAI*, 2023, no. 130. DOI: 10.34759/trd-2023-130-11

1. Введение

В основу динамики сплошных сред может быть положен вариационный принцип наименьшего действия [1] в форме Гамильтона-Остроградского. В соответствии с этим принципом для действительных движений, переводящих механическую систему из одного фиксированного состояния в другое за заданное время, интеграл

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L dt ,$$

принимает стационарное значение, т. е.

$$\delta W = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 ,$$

где L - функция Лагранжа, рассматриваемой механической системы $L = \int (T + \sum A_k) d\tau$, T - кинетическая энергия рассматриваемой механической системы, $\sum A_k$ -работа всех активных сил приложенных к механической системе [2].

Для задач гидродинамики однородной жидкости, имеющей свободную поверхность, функция Лагранжа $L = T - \Pi$ в принципе Гамильтона-Остроградского равна $L = \int_{\tau} p d\tau$ в эйлеровом представлении движения жидкости, где p - давление внутри объёма жидкости τ. Соответствующий вариационный принцип записывается в виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} p d\tau dt = 0 .$$

В такой форме принцип Гамильтона-Остроградского приведен в работе [3] для случая баротропного течения жидкости. В задаче о волновых движениях безграничной жидкости Люке [4] показал, что этот вариационный принцип дает полную формулировку краевой задачи о гравитационных волнах, включая также нелинейные граничные условия на свободной поверхности жидкости. В работе [5] получен аналогичный результат для тяжелой идеальной жидкости, частично заполняющей полость подвижного твёрдого тела. Такая постановка вопроса представляет большой интерес в связи с разработкой приближенных методов исследования динамики твердого тела с полостями, содержащими жидкость, в нелинейной постановке. Подобные исследования в случае неподвижных сосудов показали, что приближенные методы исследования нелинейных задач динамики жидкости на основе их вариационной формулировки обладают целым рядом преимуществ по сравнению с другими приближенными методами [6-8]. Большое практическое использование вариационные подходы нашли отражение при решении линейных задач колебаний тонкостенных оболочек с жидкостью [9-15].

В работе [16] рассмотрена возможность применения интегрального вариационного принципа Гамильтона-Остроградского к практическим вопросам составления дифференциальных уравнений свободных малых колебаний для системы с двумя степенями свободы. Получена и решена система дифференциальных уравнений свободных малых колебаний механизма вытягивания кристалла в установке для выращивания кремния, что позволяет при проектировании установки добиться устранения резонансных частот.

В работе [17] были решены задачи выбора наиболее эффективного механизма для математического моделирования взаимосвязанных физических полей в сплошных средах, рассматривается использование вариационных подходов. Кратко излагается существующая по этому вопросу теория, основанная на использовании вариационных принципов либо вариационных уравнений, приводится критерий их выбора, разбираются особенности метода, приводится конкретный пример. Во второй части работы проделан разбор случаев, когда вариационный подход является единственно возможным для составления математических моделей мульти-физических явлений.

В работе [18] рассмотрено обоснование принципа Гамильтона – Остроградского, применённого к движению консервативных и неконсервативных систем, составлены однородные и неоднородные уравнения Эйлера—Лагранжа.

В статье [19] изложены вариационные принципы механики жидкости и газа и механики твердого деформируемого тела. Описаны прямые качественные методы вариационного исчисления (теория двойственности вариационных задач)

Из иностранных работ отметим статьи по нелинейным колебаниям двухслойной жидкости со свободной поверхностью [20], в которых кроме теоретических результатов приведено исследование на экспериментальной установке, состоящей из осциллирующего бака, наполненного двумя слоями несмешивающихся жидкостей. Математическая модель в этих работах получена в результате применения вариационного подхода Лагранжа.

В работе [21] проведено теоретическое и экспериментальное исследование колебаний двух слоев несмешивающихся жидкостей внутри закрытого резервуара квадратного сечения. Применяя вариационный подход к потенциальной формулировке движения жидкостей, получена нелинейная динамическая система, использующая уравнения Лагранжа для составления уравнений движения, определяемых в терминах подходящих обобщенных координат. Применительно к задачам о движениях свободной поверхности однородной жидкости, частично заполняющей сосуд с твёрдыми или упругими стенками, вариационный подход использовался в работах [22-24].

В данной работе вариационный принцип Гамильтона-Остроградского формулируется для безвихревых движений несмешивающихся жидкостей, занимающих некоторый ограниченный объём, который совершает заданное движение в пространстве.

2. Постановка задачи

Рассмотрим в твердом теле цилиндрическую полость с произвольном поперечным сечением, имеющую плоские днища и полностью заполненной двумя несмешивающимися жидкостями. Движение твёрдого тела в пространстве зададим посредством скорости полюса $\vec{V}_0$ и вращательного движения относительно выбранного полюса O угловой скоростью $\vec{\omega}$. Обозначим через $\tau_k\,(k=1,2)$, объём каждой жидкости, ограниченный поверхностями раздела жидкостей Γ_1 и абсолютно жесткой стенкой сосуда, $\rho_k (k=1,2)$ плотность каждой жидкости. Введем в рассмотрение систему координат $O^* X^* Y^* Z^*$, играющую роль абсолютной системы, и систему координат $Oxyz$ (рис.1), неизменно связанную с рассматриваемым сосудом и имеющей начало в т. O на поверхности раздела.

Введем также векторы $\vec{r}^*, r_0, r$, определяющие положения произвольных точек твердого тела и жидкостей. Векторам $\vec{r}^*, r$ будем приписывать нижние индексы (1,2) в зависимости от рассмотрения верхней или нижней жидкости.

Возможное перемещение любой точки твердого тел и жидкостей можно записать в виде

$$\delta\vec{r}^* = \delta\vec{r}_0 + \delta\theta \times \vec{r} + \delta\vec{r}\ , \qquad (1)$$

где $\delta\vec{r}_0$-возможное перемещение полюса O системы осей $Oxyz$, связанных с телом; $\delta\theta$-вектор бесконечного малого поворота тела; $\delta\vec{r}$ обозначает вариацию радиуса-вектора $\vec{r}$ при фиксированных ортах связанной с телом системы координат.

Так как движение твердого тела предполагается заданным, то следует считать $\delta\vec{r}_0 = 0$ и $\delta\theta = 0$, и следовательно

$$\delta\vec{r}^* = \delta\vec{r}\ . \qquad (2)$$

Предположим, что уравнения возмущенной поверхности раздела жидкостей $F(x, y, z) = 0$ можно разрешить относительно пространственной переменной x и представить в виде

$$x - f(y, z, t) = 0. \qquad (3)$$

По своему содержанию рассматриваемая задача относится к первой задаче динамики системы тело-жидкость и состоит в определении движения жидкостей, вызванных движением сосуда, а также сил взаимодействия между телом и жидкостью. Центральным вопросом здесь является вопрос об отыскании потенциала скоростей каждой жидкости и формы поверхности раздела.

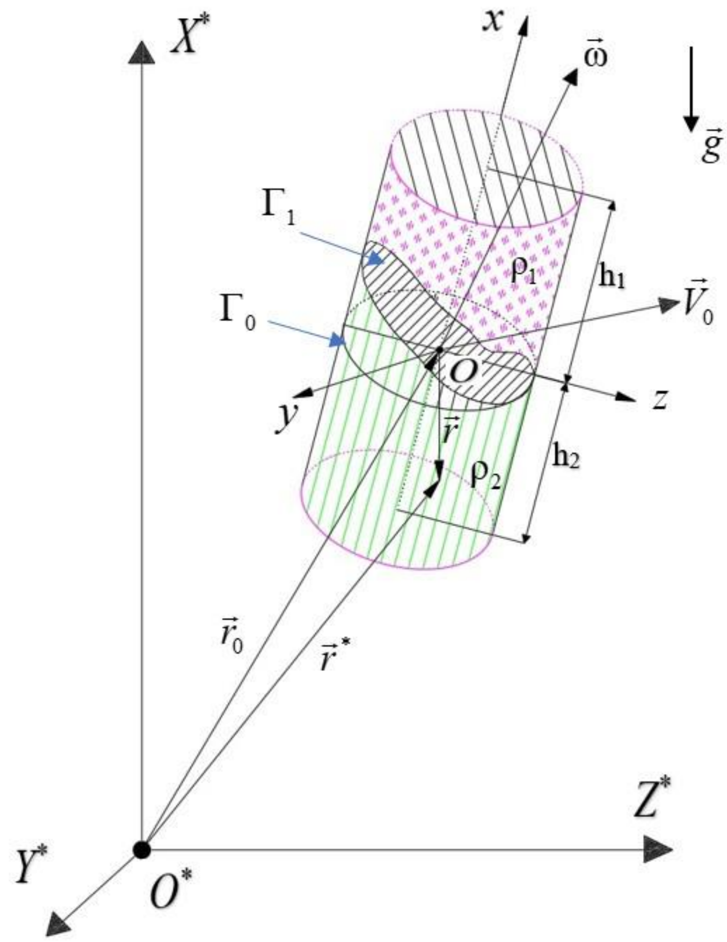

Рис. 1. Система координат и принятые обозначения

3. Вывод уравнений Эйлера из принципа Гамильтона. Давление как множитель Лагранжа

Согласно вариационному принципу наименьшего действия Гамильтона-Остроградского для действительного движения какой-либо механической системы должно выполняться следующее условие [3]

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A)dt = 0, \tag{4}$$

где δA- элементарная суммарная работа внешних массовых сил и межмолекулярных сил сцеплений на поверхностях раздела жидкостей, если таковые учитываются.

$$\delta A = \delta A^{(1)} + \delta A^{(2)}, \tag{5}$$

где $\delta A^{(1)}$- элементарная работа внешних массовых сил,

$\delta A^{(2)}$- элементарная работа межмолекулярных сил сцеплений на поверхностях раздела жидкостей,

$$\delta A^{(1)} = \int\limits_{\tau_1} (\vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1) d\tau_1 + \int\limits_{\tau_2} (\vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_2) d\tau_2, \tag{6}$$

$$\delta A_k^{(2)} = -\int\limits_{\Gamma_1} \vec{N}_k \cdot \delta \vec{u}_{\Gamma_1} d\Gamma_1, \tag{7}$$

$\vec{u}_{\Gamma_1}$ - вектор смещения частицы жидкости на поверхности раздела, $\vec{F}_k = \rho_\kappa \vec{g}$, $(k = 1,2)$

$\vec{N}_k$ - вектор напряжений межмолекулярных сил сцеплений на поверхностях раздела жидкостей.

T - кинетическая энергия жидкостей, $T = T_1 + T_2$, или

$$T = \int\limits_{\tau_1} \frac{\rho_1}{2} \vec{V}_1^2 d\tau_1 + \int\limits_{\tau_2} \frac{\rho_2}{2} \vec{V}_2^2 d\tau_2, \tag{8}$$

где $\vec{V}_1, \vec{V}_2$-вектор абсолютных скоростей верхней и нижней жидкостей, $\vec{V}_1 = \dfrac{d\vec{r}_1^{\,*}}{dt}$,

$\vec{V}_2 = \dfrac{d\vec{r}_2^{\,*}}{dt}$.

Вариация кинетической энергии представляется в виде

$$\delta T = \rho_1 (\vec{V}_1 \cdot \delta \vec{V}_1) + \rho_2 (\vec{V}_2 \cdot \delta \vec{V}_2), \tag{9}$$

где $$\delta\vec{V}_k = \delta\frac{d\vec{r}_k^{\,*}}{dt} = \frac{d}{dt}\delta\vec{r}_k^{\,*}, \qquad (10)$$

Преобразуем слагаемое δT в формуле (4) путем интегрирования по частям и заметим, что, согласно положениям принципа Гамильтона, время t не варьируется и $\delta\vec{r}_k^{\,*}$ на краях интервала t_1 и t_2 должно обращаться в нуль. Тогда интегрируя по частям и учитывая вращения твёрдого тела с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и принимая внимание формулу (2), получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\rho_k(\vec{V}_k\cdot\delta\vec{V}_k)dt = \int_{t_1}^{t_2}\rho_k(\vec{V}_k\cdot\frac{d}{dt}\delta\vec{r}_k^{\,*})dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\rho_k(-\frac{\tilde{d}\vec{V}_k}{dt} + (\vec{V}_k\times\vec{\omega}))\cdot\delta\vec{r}_k\right]dt, \qquad (11)$$

где $\frac{\tilde{d}}{dt}$ - означает производную по времени в связанной системе координат.

Так как жидкости предполагается несжимаемыми, то в каждой её точке вариации векторов-радиусов должны удовлетворять в любой момент времени условию несжимаемости,

$$div\delta\vec{r}_k = \frac{\partial\delta x_k}{\partial x} + \frac{\partial\delta y_k}{\partial y} + \frac{\partial\delta z_k}{\partial z} = 0. \qquad (12)$$

Умножая это уравнение на неопределенный множитель Лагранжа p_k, интегрируя по объёму каждой жидкости τ_k и прибавляя результат к уравнению (4), запишем принцип Гамильтона-Остроградского для рассматриваемой механической системы в виде

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T + \delta A + \sum_{k=1}^{2}\int_{\tau_k} p_k div\,\delta\vec{r}_k d\tau_k)dt = 0. \qquad (13)$$

В аналитической механике известно, что множитель Лагранжа пропорционален реакции связи. В данном случае связью является уравнение несжимаемости, поэтому множитель Лагранжа p_k для каждой жидкости отождествляется с гидродинамическим давлением, которое можно рассматривать как реакции связи-условия несжимаемости.

$$p_k div(\delta\vec{r}_k) = div(p_k\delta\vec{r}_k) - (gradp_k \cdot \delta\vec{r}_k)\,. \tag{14}$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса, получим в результате интегрирования

$$\int p_k div(\delta\vec{r}_k) d\tau_k = \int\limits_{S_k} (p_k\delta\vec{r}_k \cdot \vec{n}) dS_k - \int (gradp_k \cdot \delta\vec{r}_k) d\tau_k\,. \tag{15}$$

Учитывая выражения (5), (6), (8), (9), (11), (12) и (15), из принципа Гамильтона-Остроградского, записанного в виде (13), получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\tau_k}\left\{\left[\rho_k(-\frac{d\vec{V}_k}{dt} + (\vec{V}_k \times \vec{\omega})) + \vec{F}_k - gradp_k\right]\cdot\delta\vec{r}_k\right\} d\tau_k dt + \\
&+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{S_k}(p_k\delta\vec{r}_k \cdot \vec{n}_k) dS_k dt - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Gamma_1} N_k\delta\vec{r}_k \cdot \vec{n}_k d\Gamma_1 dt = 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

$\delta\vec{r}_k$ - независимые вариации радиуса вектора, множитель которого должен равняться нулю.

Из полученного результата следует, что движение каждой жидкости управляется уравнениями;

$$\rho_k(\frac{d\vec{V}_k}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{V}_k)) = \vec{F}_k - \nabla p_k\,, \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{S_k}(p_k\delta\vec{r}_k \cdot \vec{n}_k) dS_k - \int\limits_{\Gamma_1} N_k\delta\vec{r}_k \cdot \vec{n}_k d\Gamma_1 = 0\,. \tag{18}$$

которые являются уравнениями Эйлера абсолютного движения жидкостей, записанных в связанной системе координат. Преобразуем уравнение (18), учитывая что граница S_k каждой жидкости есть объединение поверхностей $S_k = S_k^* \bigcup \Gamma_1$, где S_k^* - площади поверхностей, смачиваемых жидкостями

$$\int_{S_k} (p_k \delta\vec{r}_k \cdot \vec{n}_k) dS_k = \int_{S_k^*} (p_k \delta\vec{r}_k \cdot \vec{n}_k) dS_k^* + \int_{\Gamma_1} (p_k \delta\vec{r}_k \cdot \vec{n}_k) d\Gamma_1 ; \qquad (19)$$

так как

$$\delta\vec{r}_k \cdot \vec{n}_k = 0, \text{ на } S_k^*, \qquad (20)$$

то из выражения (18) следует что на поверхности раздела жидкостей должны выполняться условия,

$$\sum_{k=1}^{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Gamma_1} (p_k \delta\vec{r}_k \cdot \vec{n}_k) d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} N_k \delta\vec{r}_k \cdot \vec{n}_k d\Gamma_1 \right] dt = 0. \qquad (21)$$

Раскрыв сумму уравнений, получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Gamma_1} (p_1 - N_1) \delta\vec{r}_1 \cdot \vec{n}_1 d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} (p_2 - N_2) \delta\vec{r}_2 \cdot \vec{n}_2 d\Gamma_1 \right] dt = 0; \qquad (22)$$

Соприкосновение жидкостей 1 и 2 в результате виртуальных смещений не должно нарушаться. Так как $\delta\vec{r}_k \cdot \vec{n}_k = -\delta\vec{r}_{k+1} \cdot \vec{n}_{k+1}$, где знак минус соответствует противоположным направлении внешних нормалей к поверхности раздела жидкостей.

Таким образом, из (22) следует

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Gamma_1} \left[(p_1 - N_1) - (p_2 - N_2) \right] \delta\vec{r}_1 \cdot \vec{n}_1 d\Gamma_1 \right] dt = 0; \qquad (23)$$

или

$$p_1 - p_2 = N_{12},\ N_{12} = N_1 - N_2. \tag{24}$$

Вдоль поверхности раздела двух жидкостей имеется разность давлений, обусловленная силами сцепления. Она зависит от природы жидкостей и формы поверхности раздела, но не зависит от движения жидкостей [3].

Принцип Гамильтона приводит не только к дифференциальным уравнениям задачи (в данном случае к уравнениям Эйлера); но к граничным условиям для давления на поверхности раздела, если такая поверхность имеется. При отсутствии на поверхности раздела межмолекулярных сил сцепления $(\vec{N}_{12} = 0)$ из формулы (24) следует динамическое граничное условие на поверхности раздела $p_1 = p_2$ на Γ_1.

Предложив, что абсолютное движение каждой жидкости является потенциальным, воспользуемся формулами векторного анализа и известными формулами кинематики,

$$\frac{d\vec{V}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial t} + \vec{V}_k \cdot \nabla \vec{V}_k;\ \vec{V}_k = \vec{V}_e + \vec{u}_k;\ \vec{V}_e = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}; \tag{25}$$

$$\nabla(\vec{V}_k \cdot \vec{V}_e) = \vec{\omega} \times \vec{V} - \vec{V}_e \cdot \nabla \vec{V}_k;\ \vec{V}_k = \nabla \Phi_k, \tag{26}$$

где Φ_k- потенциалы абсолютной скорости жидкости, $\vec{V}_e$ и $\vec{u}_k$- соответственно переносная и относительная скорости жидкости. Из уравнения (17) получаем интеграл Коши-Лагранжа для каждой жидкости

$$\rho_k\left(\frac{d\Phi_k}{dt} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_k)^2 - \nabla\Phi_k \cdot (\vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_k) - \vec{g} \cdot \vec{r}_k\right) + p_k = 0;\ k = 1,2. \tag{27}$$

Таким образом, если считать абсолютное движение каждой жидкости потенциальным, то из выражений для интегралов Коши-Лагранжа, следует что вариационный принцип Гамильтона-Остроградского при наличии двух жидкостей может быть записан в виде

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} Ldt = 0, \text{ где } L = \int_{\tau_1} p_1 d\tau_1 + \int_{\tau_2} p_2 d\tau_2; \qquad (28)$$

где p_1 и p_2 - давления каждой жидкости.

Получим нелинейную задачу для определения потенциала скоростей используя принцип Гамильтона-Остроградского, в котором функция Лагранжа согласно (29) запишется в виде

$$\begin{aligned} L = &-\left\{\rho_1\int_{\tau_1}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2 - \nabla\Phi_1\cdot(\vec{V}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}) - \vec{g}\cdot\vec{r}\right)d\tau_1\right\} - \\ &-\left\{\rho_2\int_{\tau_2}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_2)^2 - \nabla\Phi_2\cdot(\vec{V}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}) - \vec{g}\cdot\vec{r}\right)d\tau_2\right\} \end{aligned}; \qquad (29)$$

или

$$\begin{aligned} L = &-\left\{\rho_1\int_{\Gamma_0}\left[\int_{f_1}^{h_1}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2 - \nabla\Phi_1\cdot(\vec{V}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}) - \vec{g}\cdot\vec{r}\right)dX\right]d\Gamma_0\right\} - \\ &-\left\{\rho_2\int_{\Gamma_0}\left[\int_{-h_2}^{f_1}\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_2)^2 - \nabla\Phi_2\cdot(\vec{V}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}) - \vec{g}\cdot\vec{r}\right)dX\right]d\Gamma_0\right\} \end{aligned}; \qquad (30)$$

Γ_0 - невозмущённая поверхность жидкостей, h_1, h_2- высоты каждой жидкости.

В соответствии с принципом Гамильтона-Остроградского для действительных движений, переводящих рассматриваемую механическую систему из одного фиксированного состояния в другое за данное время, интеграл

$$W = \int_{t_1}^{t_2} Ldt; \qquad (31)$$

должен принимать стационарное значение, т.е.

$$\delta W = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \tag{32}$$

Предположим, что связи системы не должны быть нарушены, допустим что действительные движения и все движения сравнения начинаются одновременно в момент времени t_1 и заканчиваются также одновременно в момент t_2 начальное и конечное положения системы должны быть одни и те же для действительных движений и движений сравнений.

При таком предположении принцип Гамильтона-Остроградского, можно сформулировать следующим образом: из всех функций $\Phi_1(x, y, z, t)$, $\Phi_2(x, y, z, t)$ и $f_1(y, z, t)$, непрерывных вместе с производными первого порядка по пространственным переменным и времени t, найти такие, которые сообщают интегралу W стационарное значение. Действительные движения определяются искомыми функциями $\Phi_1(x, y, z, t)$, $\Phi_2(x, y, z, t)$ и $f_1(y, z, t)$, а движения сравнения-функциями $\Phi_1 + \delta\Phi_1$, $\Phi_2 + \delta\Phi_2$ и $f_1 + \delta f_1$, причем $\delta\Phi_1$, $\delta\Phi_2$ и δf_1 представляют собой произвольные функции из области их определения, удовлетворяющие условиями

$$\delta\Phi_k(x, y, z, t_1) = 0, \ \delta\Phi_k(x, y, z, t_2) = 0, \ k = 1,2 \tag{33}$$

$$\delta f_1(y, z, t_1) = 0, \ \delta f_1(y, z, t_2) = 0. \tag{34}$$

Эти условия отражают то обстоятельство, что в принципе Гамильтона-Остроградского начальное и конечное положения системы одни и те же для действительных движений и движений сравнения.

В дальнейшем будем считать, что для движений сравнения функции $\Phi_k(x,y,z,t,\varepsilon)$ и $f_1(y,z,t,\varepsilon)$ содержат параметр ε любым образом (ε достаточно близко к нулю), причем при $\varepsilon=0$ получается действительное движение $\Phi_k(x,y,z,t)=\Phi_k(x,y,z,t,0)$, и $f_1(y,z,t)=f_1(y,z,t,0)$, для которого и вычисляется первая вариация (33). Учитывая, что область интегрирования изменяется, в соответствии с общим определением первой вариации получаем

$$\delta W=\rho_2\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_0}\left\{\begin{array}{l}\left(\Phi_{2t}+\dfrac{1}{2}(\nabla\Phi_2)^2-\nabla\Phi_2\cdot(\vec{V}_0+\vec{\omega}\times\vec{r})-\vec{g}\cdot\vec{r}\right)\Bigg|_{x=f_1}\delta f_1+\\ +\displaystyle\int_{-h_2}^{f_1(y,z)}\left(\delta\Phi_{2t}+\nabla\Phi_2\cdot\nabla(\delta\Phi_2)-\nabla(\delta\Phi_2)\cdot(\vec{V}_0+\vec{\omega}\times\vec{r})\right)dX\end{array}\right\}d\Gamma_0dt+$$
$$+\rho_1\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_0}\left\{\begin{array}{l}\left(\Phi_{1t}+\dfrac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2-\nabla\Phi_1\cdot(\vec{V}_0+\vec{\omega}\times\vec{r})-\vec{g}\cdot\vec{r}\right)\Bigg|_{x=f_1}\delta f_1+\\ +\displaystyle\int_{f_1(y,z)}^{h_1}\left(\delta\Phi_t+\nabla\Phi_1\cdot\nabla(\delta\Phi_1)-\nabla(\delta\Phi_1)\cdot(\vec{V}_0+\vec{\omega}\times\vec{r})\right)dX\end{array}\right\}d\Gamma_0dt \qquad (35)$$

где

$$\delta\Phi_k=\left.\frac{\partial\Phi_k}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varepsilon;\ \delta f_1=\left.\frac{\partial f_1}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varepsilon. \qquad (36)$$

Интегралы

$$\int_{\tau_k}\nabla\Phi_k\cdot\nabla(\delta\Phi_k)d\tau_k;\ \int_{\tau_k}\vec{V}_0\cdot\nabla(\delta\Phi_k)d\tau_k;\ \int_{\tau_k}(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\nabla(\delta\Phi_k)d\tau_k; \qquad (37)$$

Преобразуем, применив теорему Грина

$$\int_{\tau_k}\nabla\varphi_k\cdot\nabla(\delta\psi_k)d\tau_k=\int_{S_k+\Gamma}\psi_k\cdot\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}dS_k-\int_{\tau_k}\psi_k\cdot\nabla^2\varphi_k d\tau_k. \qquad (38)$$

Обозначив $\nabla\varphi = (\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{i}\,(\omega_2 z - \omega_3 y) + \vec{j}\,(\omega_3 x - \omega_1 z) + \vec{k}\,(\omega_1 y - \omega_2 x)$ и заметив, что $\vec{V}_0 = \nabla(\vec{V}_0 \cdot \vec{r})$, получим

$$\int_{\tau_k} \nabla\Phi_k \cdot \nabla(\delta\Phi_k) d\tau_k = \int_{S_k+\Gamma} \delta\Phi_k \cdot \frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu} dS_k - \int_{\tau_k} \delta\Phi_k \cdot \nabla^2 \Phi_k d\tau_k; \qquad (39)$$

$$\int_{\tau_k} \vec{V}_0 \cdot \nabla(\delta\Phi_k) d\tau_k = \int_{\tau_k} \nabla(\vec{V}_0 \cdot \vec{r}) \cdot \nabla(\delta\Phi_k) d\tau_k = \int_{S_k+\Gamma} \delta\Phi_k \vec{V}_0 \cdot \vec{\nu} dS_k; \qquad (40)$$

$$\int_{\tau_k} (\vec{\omega}\times\vec{r}) \cdot \nabla(\delta\Phi_k) d\tau_k = \int_{S_k+\Gamma} \delta\Phi_k (\vec{\omega}\times\vec{r}) \cdot \vec{\nu} dS_k. \qquad (41)$$

Исходя из того, что время не варьируется и, следовательно, варьирование и дифференцирование коммутативно, далее можно записать

$$\int_{\tau_k} \delta\Phi_{kt} d\tau_k = \int_{\tau_k} \frac{\partial}{\partial t}(\delta\Phi_k) d\tau_k, \qquad (42)$$

где дифференцирование по времени проводится в подвижной системе координат. Если граница области τ_k не фиксирована, а может со времени изменяться, то

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau_k} F(x,y,z,t) d\tau_k = \int_{\tau_k} \frac{\partial F}{\partial t} d\tau_k + \int_{S_k+\Gamma} F u_\nu dS_k; \qquad (43)$$

где u_ν обозначает нормальную скорость границы области τ_k, принимаемой положительной в направлении внешней нормали к $S_k + \Gamma_1$.

В том случае, когда поверхность раздела жидкостей Γ_1 задана уравнением (3), нормальная составляющая относительной скорости в подвижной системе координат определяется выражением u_ν. На смачиваемой поверхности сосуда S_k, $u_\nu = 0$. Следовательно, применяя формулу (43) к выражению (42), получаем

$$\int_{\tau_k} \frac{\partial}{\partial t}(\delta\Phi_k) d\tau_k = \frac{d}{dt}\int_{\tau_k} \delta\Phi_k d\tau_k - \int_{\Gamma_1} \delta\Phi_k u_\nu d\Gamma_1 . \qquad (44)$$

Подставляя соотношения (39)-(41) и (44) в выражение (35), получаем

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma_0} \left[\begin{array}{l} \rho_2 \left(\Phi_{2t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_2)^2 - \nabla\Phi_2 \cdot (\vec{V}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}) - \vec{g}\cdot\vec{r} \right)\Big|_{x=f_1} - \\ -\rho_1 \left(\Phi_{1t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2 - \nabla\Phi_1 \cdot (\vec{V}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}) - \vec{g}\cdot\vec{r} \right)\Big|_{x=f_1} \end{array} \right] \delta f_1 d\Gamma_0 dt +$$

$$+\rho_2 \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} +\int_{S_2} \left[\frac{\partial\Phi_2}{\partial\nu} - \vec{V}_0\cdot\vec{\nu} - (\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{\nu} \right] \delta\Phi_2 dS_2 + \\ +\int_{\Gamma_0} \left[\frac{\partial\Phi_2}{\partial\nu} - \vec{V}_0\cdot\vec{\nu} - (\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{\nu} - \vec{u}_\nu \right] \delta\Phi_2 d\Gamma_0 - \\ -\int_{\tau_2} \nabla^2\Phi_2 \delta\Phi_2 d\tau_2 + \frac{d}{dt}\int_{\tau_2} \delta\Phi_2 d\tau_2 \end{array} \right\} dt +$$

$$+\rho_1 \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{array}{l} +\int_{S_1} \left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial\nu} - \vec{V}_0\cdot\vec{\nu} - (\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{\nu} \right] \delta\Phi_1 dS_1 + \\ +\int_{\Gamma_0} \left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial\nu} - \vec{V}_0\cdot\vec{\nu} - (\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{\nu} - \vec{u}_\nu \right] \delta\Phi_1 d\Gamma_0 - \\ -\int_{\tau_1} \nabla^2\Phi_1 \delta\Phi_1 d\tau_1 + \frac{d}{dt}\int_{\tau_1} \delta\Phi_1 d\tau_1 \end{array} \right\} dt = 0 \qquad ; (45)$$

Выражения $\frac{d}{dt}\int_{\tau_2} \delta\Phi_2 d\tau_2$ и $\frac{d}{dt}\int_{\tau_1} \delta\Phi_1 d\tau_1$ в уравнении (45) равняются нулю в силу уравнений (33) - (34). Из вариационного уравнения (45) следуют краевые задачи для потенциалов скоростей $\Phi_k (k=1,2)$ в силу независимости вариаций $\delta\Phi_k$ и δf_1, а именно уравнения Лапласа,

$$\nabla^2\Phi_1 = 0 \text{, в } \tau_1 \text{ , } \nabla^2\Phi_2 = 0 \text{, в } \tau_2 \text{ ,} \qquad (46)$$

условиям непротекания на смачиваемых поверхностях S_1, S_2

$$\frac{d\Phi_1}{d\nu} = \vec{V}_0 \cdot \vec{\nu} + \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nu}) \text{ на } S_1, \ \frac{d\Phi_2}{d\nu} = \vec{V}_0 \cdot \vec{\nu} + \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nu}) \text{ на } S_2, \tag{47}$$

кинематические условия и динамические условия на поверхности раздела

$$\frac{d\Phi_1}{d\nu} = \frac{d\Phi_2}{d\nu} = \vec{V}_0 \cdot \vec{\nu} + \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nu}) + u_\nu \text{ при } x = 0 \text{ на } \Gamma_1, \tag{48}$$

$$\begin{gathered}\left(\rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\left[\rho_2 (\nabla \Phi_2)^2 - \rho_1 (\nabla \Phi_1)^2\right] - \\ -\left[\rho_2 \nabla \Phi_2 \cdot (\vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) - \rho_1 \nabla \Phi_1 \cdot (\vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r})\right] - (\rho_2 - \rho_1) \vec{g} \cdot \vec{r} = 0\end{gathered} \quad \text{на } \Gamma_1, \tag{49}$$

Заметим, что нелинейные граничные условия краевой задачи (46) - (49) следуют непосредственно из условия экстремума функционала (32), т.е. они являются естественными граничными условиями. Это обстоятельство является определяющими при использовании функционала (32) или вариационного уравнения (45) для построения эффективных приближенных методов решения нелинейной краевой задачи.

Заключение

Если увеличить количество жидкостей, проведя аналогичные рассуждения для каждой жидкости, имеющей две изменяющиеся по времени поверхности раздела, можно сформулировать принцип Лагранжа для N жидкостей, полностью заполняющих цилиндрическую полость

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \text{ где } L = \int_{\tau_1} p_1 d\tau_1 + \int_{\tau_2} p_2 d\tau_2 + \ldots + \int_{\tau_N} p_N d\tau_N, \tag{50}$$

и получить краевые задачи для определения потенциалов $\Phi_k (k = 1, 2, \ldots N)$.

Если на поверхностях раздела жидкостей имеется разность давлений, обусловленная силами сцепления, например силами поверхностного натяжения, то их также можно учесть, используя соответствующие физические законы.

Список источников

1. Бердический В.Л. Вариационный принцип механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. - 447 с.

2. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. - М.: Изд-во «Наука», 1965. - 441 с.

3. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1954. - 491 с.

4. Luke J.C. A variational principle for a fluid with a free surface // Journal of Fluid Mechanics, 1967, vol. 27, pp. 395-397. DOI:10.1017/S0022112067000412

5. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела полостями, содержащими жидкость. - Киев: Наукова думка, 1990, - 296 с.

6. Луковский И.А. Исследование нелинейных колебаний жидкости в круговом цилиндрическом сосуде с днищем производной формы вариационным методом. В кн.: Динамика устойчивость управляемых систем. - Киев: Институт математики АН УССР, 1977. С. 32-44.

7. Селиджер Р.Л., Уитем Г.Б. Вариационный принцип в механике сплошной среды. Механика: сборник переводов. – М.: Мир, 1969. № 5. С. 99-123.

8. Луковский И.А. Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости. В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. - М.: Волна, 1976. С. 260-265.

9. Шклярчук Ф.Н. Расчёт колебаний оболочек с жидкостью методом конечных элементов // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2015. № 1. С. 17-29.

10. Шклярчук Ф.Н. Динамика конструкций летательных аппаратов. – М.: МАИ, 1983. – 79 с.

11. Шклярчук Ф.Н. О вариационных методах расчёта осесимметричных колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // Труды 7-й Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. - М.: Наука, 1966. С. 835-840.

12. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Применение метода Ритца к расчёту осесимметричных колебаний составных оболочек вращения с круговыми шпангоутами, заполненных жидкостью // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2016. № 3. С. 141- 157.

13. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1975. - 416 с.

14. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. - М.: Машиностроение, 1971. - 504 с.

15. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Применение метода отсеков к расчёту колебаний жидкостных ракет-носителей. – М.: МАИ, 2017. - 100 с.

16. Серов М.В., Аверьянова Г.М., Карначева Е.В. Опыт применения вариационного принципа Гамильтона-Остроградского к практическим вопросам составления дифференциальных уравнений свободных малых колебаний // Известия МГТУ МАМИ. Серия: Естественные науки. 2014. № 4 (22). Т. 4. С. 84-89.

17. Шарфарец Б.П. Вариационные методы как наиболее эффективный механизм при моделировании взаимосвязанных физических полей в сплошных средах // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 1. С. 102-112.

18. Макаров П.А. О вариационных принципах механики консервативных и неконсервативных систем // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. № 2 (23). С. 46-59.

19. Румянцев В.В. О некоторых вариационных принципах в механике сплошных сред // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. С. 963-973.

20. M. La Rocca, G. Sciortino, C. Adduce, M.A. Boniforti Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // Physics of Fluids, 2005, no. 17 (6), pp. 062101. DOI:10.1063/1.1922887

21. M. La Rocca. Interfacial gravity waves in a two-fluid system // Fluids Dynamics Research, 2002, no. 30, pp. 31-66. DOI:10.1016/S0169-5983(01)00039-9

22. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Кузнецова Е.Л., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=53486

23. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=84412

24. Пак Сонги, Григорьев В.Г. Устойчивость тонкостенных осесимметричных соосных конструкций, содержащих жидкость, при многофакторных нагрузках // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=159785. DOI: 10.34759/trd-2021-119-08

References

1. Berdicheskii V.L. *Variatsionnyi printsip mekhaniki sploshnoi sredy* (Variational principle of continuum mechanics), Moscow, Nauka, 1983, 447 p.

2. Moiseev N.N., Rumyantsev V.V. *Dinamika tela s polostyami, soderzhashchimi zhidkost'* (Dynamics of a body with cavities containing fluid), Moscow, Izd-vo «Nauka», 1965, 441 p.

3. Zommerfel'd A. *Mekhanika deformiruemykh sred* (Mechanics of deformable media), Moscow, Izd-vo inostrannoi literatury, 1954, 491 p.

4. Luke J.C. A variational principle for a fluid with a free surface, *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, vol. 27, pp. 395-397. DOI:10.1017/S0022112067000412

5. Lukovskii I.A. *Vvedenie v nelineinuyu dinamiku tverdogo tela polostyami, soderzhashchimi zhidkost'* (Introduction to the nonlinear dynamics of a rigid body with cavities containing a liquid), Kiev, Naukova dumka, 1990, 296 p.

6. Lukovskii I.A. *Issledovanie nelineinykh kolebanii zhidkosti v krugovom tsilindricheskom sosude s dnishchem proizvodnoi formy variatsionnym metodom. -V kn.: Dinamika ustoichivost' upravlyaemykh sistem* (Investigation of nonlinear fluctuations of a liquid in a circular cylindrical vessel with a bottom of a derivative form by the variational method. In the book: Dynamics and stability of controlled systems), Kiev, Institut matematiki AN USSR, 1977, pp. 32-44.

7. Selidzher R.L., Uitem G.B. *Variatsionnyi printsip v mekhanike sploshnoi sredy. Mekhanika* (Variational principle in continuum mechanics. Mechanics), Moscow, Mir, 1969, no. 5, pp. 99-123.

8. Lukovskii I.A. *Variatsionnyi metod v nelineinykh zadachakh dinamiki ogranichennogo ob"ema zhidkosti. V kn.: Kolebaniya uprugikh konstruktsii s zhidkost'yu* (Variational Method in Nonlinear Problems of the Dynamics of a Limited Fluid Volume. In the book: Oscillations of elastic structures with liquid), Moscow, Volna, 1976, pp. 260-265.

9. Shklyarchuk F.N. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2015, no. 1, pp. 17-29.

10. Shklyarchuk F.N. *Dinamika konstruktsii letatel'nykh apparatov* (Dynamics of aircraft structures), Moscow, MAI, 1983, 79 p.

11. Shklyarchuk F.N. *Trudy 7-i Vsesoyuznoi konferentsii po teorii obolochek i plastin* (Proceedings of the 7th All-Union Conference on the Theory of Shells and Plates), Moscow, Nauka, 1966, pp. 835-840.

12. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2016, no. 3, pp. 141- 157.

13. Rabinovich B.I. *Vvedenie v dinamiku raket-nositelei kosmicheskikh apparatov* (Introduction to the dynamics of spacecraft carrier rockets), Moscow, Mashinostroenie, 1975, 416 p.

14. Mikishev G.N., Rabinovich B.I. *Dinamika tonkostennykh konstruktsii s otsekami, soderzhashchimi zhidkost'* (Dynamics of thin-walled structures with compartments containing liquid), Moscow, Mashinostroenie, 1971, 504 p.

15. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Primenenie metoda otsekov k raschetu kolebanii zhidkostnykh raket-nositelei* (Application of the compartment method to the calculation of oscillations of liquid-propellant launch vehicles), Moscow, MAI, 2017, 100 p.

16. Serov M.V., Aver'yanova G.M., Karnacheva E.V. *Izvestiya MGTU MAMI. Seriya: Estestvennye nauki*, 2014, no. 4 (22), vol. 4, pp. 84-89.

17. Sharfarets B.P. *Nauchnoe priborostroenie*, 2017, vol. 27, no. 1, pp. 102-112.

18. Makarov P.A. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2017, no. 2 (23), pp. 46-59.

19. Rumyantsev V.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1973, vol. 37, pp. 963-973.

20. M. La Rocca, G. Sciortino, C. Adduce, M.A. Boniforti. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface, *Physics of Fluids*, 2005, no. 17 (6), pp. 062101. DOI:10.1063/1.1922887

21. M. La Rocca. Interfacial gravity waves in a two-fluid system, *Fluids Dynamics Research*, 2002, no. 30, pp. 31-66. DOI:10.1016/S0169-5983(01)00039-9

22. Blinkova A.Yu., Ivanov S.V., Kuznetsova E.L., Mogilevich L.I. *Trudy MAI*, 2014, no. 78. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53486

23. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84412

24. Pak Songi, Grigor'ev V.G. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159785. DOI: 10.34759/trd-2021-119-08

Статья поступила в редакцию 10.05.2023

Одобрена после рецензирования 25.05.2023

Принята к публикации 27.06.2023

The article was submitted on 10.05.2023; approved after reviewing on 25.05.2023; accepted for publication on 27.06.2023