Труды МАИ. 2025. № 140
Trudy MAI. 2025. No. 140. (In Russ.)

Научная статья
УДК 517.977.55
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=184072
EDN: https://www.elibrary.ru/PXQJVN

НАИСКОРЕЙШАЯ КОРРЕКЦИЯ ОРБИТЫ СПУТНИКА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА СУММАРНЫЙ ЗАПАС ТОПЛИВА

Данис Наилевич Ибрагимов
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация
rikk.dan@gmail.com

Аннотация. В статье решается задача наискорейшей коррекции околокруговой орбиты спутника в предположении об ограничении на суммарный запас топлива. Произведена дискретизация изначально непрерывной математической модели движения космического аппарата для релейного управления, осуществляемого двигателями малой тяги. При помощи увеличения шага квантования полученная дискретная система, описывающая динамику спутника, сведена к эквивалентной системе обладающей строго выпуклыми суммарными ограничениями на управление. Произведено обобщение изначальной задачи коррекции к задаче быстродействия для линейной системы с дискретным временем и суммарными ограничениями на векторное управление. Задача быстродействия разделена на два этапа. На первом этапе вычисляется точное значение времени быстродействия. На втором этапе происходит построение оптимального процесса при фиксированном времени. Полное решение рассматриваемой задачи построено на основе аппарата множеств 0-управляемости. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности процесса управления в форме принципа максимума. Произведены численные расчеты для различных значений параметров.

Ключевые слова: коррекция орбиты спутника, круговая орбита, задача ыстродействия, линейная система с дискретным временем, множество 0-управляемости, суммарные ограничения на управление

Для цитирования: Ибрагимов Д.Н. Наискорейшая коррекция орбиты спутника при ограничении на суммарный запас топлива // Труды МАИ. 2025. № 140. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=184072

Original article

FASTEST SATELLITE ORBIT CORRECTION WITH LIMITED SUMMARY FUEL SUPPLY

Danis N. Ibragimov

Moscow Aviation Institute (national research university),

Moscow, Russian Federation

rikk.dan@gmail.com

Abstract. The paper solves the problem of the fastest correction of a near-circular satellite orbit with restrictions on the summary fuel supply. It is assumed that the deviations of the actual motion parameters from the parameters of the calculated orbit are small, which allows us to go over to linear equations of dynamics. It is also assumed that the control is carried out by low-thrust engines and is a relay one. Discretization of the initially continuous-time mathematical model of the spacecraft motion is performed. By increasing the quantization step, the resulting discrete-time system describing the satellite dynamics is reduced to an equivalent system with strictly convex summary constraints on control. The original correction problem is generalized to the time-optimization problem for a linear system with discrete time and summary constraints on vector control. The time-optimization problem is divided into two stages. At the first stage, the exact value of the minimal time is calculated. At the second stage, an optimal process is constructed for a fixed time. Both stages of the solution can be performed by the apparatus of null-controllable sets. In particular, the minimal time, required for the system to reach the origin, is calculated as the minimal number of the null-controllable set containing the initial state. The criterion for optimality of control is that the next state belongs to the null-controllable set in a smaller number of steps. The final necessary and sufficient conditions for the optimality of the control process are presented in the form of the maximum principle. The obtained theoretical methods are used to solve the original problem. Numerical calculations are performed for quadratic constraints and fourth-order constraints.

Keywords: satellite orbit correction, circular orbit, time-optimization problem, discrete-time linear system, null-controllable set, summary control constraints

For citation: Ibragimov D.N. Fastest Satellite Orbit Correction with Limited Summary Fuel Supply. *Trudy MAI*. 2025. No. 140. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=184072

1. Введение

Задача коррекции орбиты космического летательного аппарата является одной из наиболее актуальных задач ракетно-космической техники. Это отражено во многих современных статьях [1–3]. В свою очередь при учете ограничений, накладываемых техническими особенностями используемых двигательных установок, и использовании релейного управления исходная задача коррекции может быть сведена к задаче стабилизации для динамической системы с дискретным временем. Выбор в качестве критерия качества времени, затрачиваемого системой на достижение заданного терминального состояния, приводит к задаче быстродействия. Хотя основные результаты по данной тематике изложены еще в классических монографиях [4–6] и различных статьях [7–9], исследование задачи быстродействия не утрачивает актуальности и в настоящее время [10–15].

Отдельно следует рассмотреть постановку задачи быстродействия для систем с дискретным временем. В этом случае использование стандартных подходов к решению данной задачи оптимального управления оказывается затруднено. Отдельной проблемой является определение времени быстродействия, что отличает данную задачу от большинства других задач с фиксированным числом шагов. Но даже при известном времени быстродействия принцип максимума приобретает вырожденный характер почти для всех начальных состояни [16], а метод динамического программирования сводится к полному перебору допустимых управлений [17].

С другой стороны, продемонстрировал свою эффективность геометрический подход, основанный на использовании аппарата множеств 0-управляемости – множеств тех начальных состояний, из которых система может быть переведена в начало координат за фиксированное число шагов. В [16] представлена модификация принципа максимума, позволяющая построить оптимальное программное управление для систем со строго выпуклыми ограничениями на управление. В [17] разработаны методы формирования оптимального позиционного управления для систем с линейными ограничениями на управление и субоптимального управления для произвольных систем на основе методов полиэдральной аппроксимации [18].

Однако в указанных выше работах все ограничения предполагаются геометрическими: управляющее воздействие ограничено по мощности на каждом шаге независимо от того, как управлялся объект до этого момента. Такой подход не позволяет учитывать общие ресурсные ограничения характерные для многих задач оптимального управления. Например, для задачи коррекции орбиты космического летательного аппарата [19–20], для которого принципиально невозможно произвести дозаправку. В данной работе предлагается распространить разработанный в [16–17] подход к решению задачи быстродействия на класс систем с суммарными ограничениями на управление. Для решения поставленной задачи используется аппарат множеств 0-управляемости [21–22], а также утверждения из выпуклого анализа [23] и функционального анализа

[24].

Структура статьи следующая. В разделе 2 производится постановка задачи. Раздел 3 содержит критерий оптимальности процесса управления в задаче быстродействия, основанные на использовании класса множеств 0-управляемости. Условия оптимальности процесса в задаче быстродействия представлены в разделе 4. В разделе 5 на основе разработанных теоретических результатов решается задача наискорейшей коррекции орбиты спутника, расположенного в окрестности круговой орбиты, при наличии ресурсных ограничений на управление.

2. Постановка задачи и математическая модель

В статье решается задача быстродействия для системы управления движением спутника. Предполагается, что космический аппарат находится в окрестности круговой орбиты, определяемой своим радиусом R_0, радиальной скоростью V_{R0} и трансверсальной скоростью V_{T0}. Отклонения реальных значений параметров орбиты от теоретических являются функциями от времени t и обозначены следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Delta R(t) &= R(t) - R_0, \\
\Delta V_R(t) &= V_R(t) - V_{R0}, \\
\Delta V_T(t) &= V_T(t) - V_{T0}.
\end{aligned}$$

Управление осуществляется двигателями малой тяги и описывается функцией от времени $U : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$. Предполагается, что управляющее воздействие $U(t)$ направлено по касательной к траектории движения в каждый момент времени и является релейным, т.е. постоянным на фиксированных временных интервалах длины $\delta > 0$:

$$U(t) = \tilde{u}(k) \in \mathbb{R},\ t \in [k\delta; (k+1)\delta),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1}$$

В предположении, что отклонения реальной траектории движения спутника от номинальной являются малыми, можно рассмотреть, предложенную в [20], линеаризованную математическую модель динамики космического аппарата:

$$\begin{aligned} &\Delta \dot{R}(t) = \Delta V_R(t), \\ &\Delta \dot{V}_R(t) = \Delta R(t) + 2\Delta V_T(t), \\ &\Delta \dot{V}_T(t)(t) = -\Delta V_R(t) + U(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку в силу (1) моменты смены режима управления являются фиксированными, то от дифференциальных уравнений (2), решив их явно, можно перейти к дискретной динамической системе, вектор состояния которой имеет вид $x(k) = (\Delta R(k\delta), \Delta V_R(k\delta), \Delta V_T(k\delta))^{\mathrm{T}}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Также предположим, что на управление накладываются ресурсные ограничения, определяемые общим запасом топлива, а через $x_0 = (\Delta R(0), \Delta V_R(0), \Delta V_T(0))^{\mathrm{T}}$ обозначен вектор начального состояния. Таким образом, исходная непрерывная система (2) оказывается эквивалентна следующей системе с дискретным временем:

$$\begin{aligned} &x(k+1) = \begin{pmatrix} 2-\cos\delta & \sin\delta & 2-2\cos\delta \\ \sin\delta & \cos\delta & 2\sin\delta \\ -1+\cos\delta & -\sin\delta & -1+2\cos\delta \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} -2\sin\delta + 2\delta \\ 2-2\cos\delta \\ 2\sin\delta - \delta \end{pmatrix} \tilde{u}(k), \\ &x(0) = x_0,\ \sum_{k=0}^{\infty} \left| u(k) \right|^r \le \gamma^r,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \tag{3}$$

где величина $\gamma > 0$ определяет запас топлива, а параметр $r > 1$ – энергоэффективность двигательной установки: чем больше значение r тем меньше расходуется топлива при проведении коррекции.

Для системы (3) решается решается задача быстродействия, т.е. требуется перевести систему из заданного начального состояния x_0 в начало координат за минимальное число шагов $K_{\min}$.

Полученная в результате дискретизации математическая модель (3) может быть сведена к линейной системе с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление $(A, \mathcal{U}, \gamma, r)$:

$$\begin{aligned} & x(k+1) = Ax(k) + u(k), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ & x(0) = x_0, \ \sum_{k=0}^{\infty} \mu(u(k), \mathcal{U})^r \leq \gamma^r, \end{aligned} \tag{4}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор управления, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица системы, $r \in (1; +\infty)$ и $\gamma > 0$ – параметры, определяющие суммарное ограничение на управление, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое и компактное множество допустимых значений управлений. Предполагается, что $\det A \neq 0$ и $0 \in \operatorname{ri} \mathcal{U}$. Через $\mu(x, \mathcal{X})$ для $x \in \mathbb{R}^n$ и выпуклого $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, содержащего 0, обозначен функционал Минковского [24, разд. 3, пар. 2, гл. III]:

$$\mu(x, \mathcal{X}) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha \mathcal{X}\}.$$

Под $\operatorname{ri} \mathcal{U}$ понимается относительная внутренность множества $\mathcal{U}$ – множество внутренних точек $\mathcal{U}$, если рассматривать данное множество как подмножество его аффинной оболочки [23, пар. 6, гл. II].

Замечание 1. Система управления движением спутника (3) является частным случаем системы $(A, \mathcal{U}, \gamma, r)$ при $n = 3$ и выборе A и $\mathcal{U}$ следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 2-\cos\delta & \sin\delta & 2-2\cos\delta \\ \sin\delta & \cos\delta & 2\sin\delta \\ -1+\cos\delta & -\sin\delta & -1+2\cos\delta \end{pmatrix}, \mathcal{U} = \mathrm{conv}\{b,-b\}, b = \begin{pmatrix} -2\sin\delta+2\delta \\ 2-2\cos\delta \\ 2\sin\delta-\delta \end{pmatrix}.$$

Решение задачи быстродействия для системы (4) состоит из двух этапов, первым из которых является вычисление $K_{\min}$:

$$K_{\min} = \min\left\{K \in \mathbb{N} \cup \{0\} : -A^K x_0 = \sum_{k=0}^{K-1} A^k u(K-k-1), \sum_{k=0}^{K-1} \mu(u(k),\mathcal{U})^r \le \gamma^r\right\}.$$

Второй этап заключается в построении процесса управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{K_{\min}}$, удовлетворяющего условию $x^*(K_{\min}) = 0$. Такой процесс будем называть оптимальным.

Для дальнейших рассуждений будем использовать аппарат нормальных конусов [23, пар. 2, гл. I] и опорных функций [23, пар. 4, гл. I], где для произвольного выпуклого и компактного $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ и $p \in \mathbb{R}^n$ опорной функцией называется

$$\mathcal{S}(p,\mathcal{X}) = \max_{x\in\mathcal{X}}(p,x).$$

Вектор $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ называется опорным к множеству $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x \in \mathcal{X}$, если $(p,x) = \mathcal{S}(p,\mathcal{X})$. И наоборот, точка $x^*_{\mathcal{X}}(p) \in \mathcal{X}$ называется опорной, если $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ является для нее опорным вектором. Под нормальным конусом $\mathcal{N}(x,\mathcal{X})$ понимается множество всех векторов, опорных к $\mathcal{X}$ в x:

$$\mathcal{N}(x,\mathcal{X}) = \{p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \mathcal{S}(p,\mathcal{X}) = (p,x)\}.$$

Будем также полагать, что для произвольной внутренней точки $x \in \mathrm{int}\,\mathcal{X}$ нормальный конус представляет собой пустое множество: $\mathcal{N}(x,\mathcal{X}) = \varnothing$.

3. Множества 0-управляемости

Обозначим через $\{\mathcal{X}_{\gamma,r}(K)\}_{K=0}^{\infty}$ класс множеств 0-управляемости системы $(A,\mathcal{U},\gamma,r)$, где $\mathcal{X}_{\gamma,r}(K)$ представляет собой множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (4) в начало координат за $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ шагов посредством выбора допустимого управления при суммарном ресурсе управления γ:

$$\mathcal{X}_{\gamma,r}(K) = \begin{cases} \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : -A^K x_0 = \sum_{k=0}^{K-1} A^k u(K-k-1), \sum_{k=0}^{K-1} \mu(u(k),\mathcal{U})^r \le \gamma^r \right\}, & K \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & K = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Также будем полагать, что $\mathcal{X}_{1,r}(K) = \mathcal{X}_r(K)$.

С учетом (5) величину $K_{\min}$ можно определить следующим образом:

$$K_{\min} = \{K \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}_{\gamma,r}(K)\}. \quad (6)$$

В силу (6) решение первого этапа задачи быстродействия сводится к последовательному построению множеств 0-управляемости и проверки принадлежности им начального состояния системы.

Также условие разрешимости задачи быстродействия $K_{\min} < \infty$ можно свести к включению

$$x_0 \in \mathcal{X}_{\gamma,r,\infty} = \bigcup_{K=0}^{\infty} \mathcal{X}_{\gamma,r}(K).$$

Более подробно вопросы построения и оценивания предельных множеств 0-управляемости $\mathcal{X}_{\gamma,r,\infty}$ рассматриваются в [21].

В [22] исследованы свойства множеств 0-управляемости (5). Приведем те из них, которые необходимы для решения задачи быстродействия. Для этого введем для двух множеств $\mathcal{U}, \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ следующую операцию:

$$\mathcal{X} +_r \mathcal{U} = \bigcup_{\substack{t^r + s^r \le 1 \\ t, s \ge 0}} (t\mathcal{X} + s\mathcal{U}).$$

Будем называть данную операцию обобщенной суммой по Минковскому.

Теорема 1 ([22, теоремы 1–3]). *Пусть класс множеств* $\{\mathcal{X}_{\gamma,r}(K)\}_{K=0}^{\infty}$ *определяется согласно* (5), $\det A \ne 0$, $r \in (1; +\infty)$. *Тогда для всех* $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *и* $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

1. *справедливо представление*

$$\mathcal{X}_{\gamma,r}(K) = -\gamma(A^{-1}\mathcal{U} +_r \ldots +_r A^{-K}\mathcal{U});$$

2. $\mathcal{X}_{\gamma,r}(K)$ *выпуклое и компактное;*

3. *верно соотношение для опорной функции*

$$\mathcal{S}(p, \mathcal{X}_{\gamma,r}(K)) = \gamma \left(\sum_{k=1}^{K} \mathcal{S} \;\; -(A^{-k})^{\mathrm{T}} p, \mathcal{U} \;\;^{r/(r-1)} \right)^{(r-1)/r};$$

4. *если* $\mathcal{U}$ *строго выпуклое, то* $\mathcal{X}_{\gamma,r}(K)$ *строго выпуклое, а для любого* $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *верно выражение для опорной точки*

$$x^*_{\mathcal{X}_{\gamma,r}(K)}(p) = -\gamma \frac{\sum_{k=1}^{K} \left(\mathcal{S} \;\; -(A^{-k})^{\mathrm{T}} p, \mathcal{U} \;\;^{1/(r-1)} A^{-k} x^*_{\mathcal{U}} \;\; -(A^{-k})^{\mathrm{T}} p \;\; \right)}{\left(\sum_{k=1}^{K} \mathcal{S} \;\; -(A^{-k})^{\mathrm{T}} p, \mathcal{U} \;\;^{r/(r-1)} \right)^{1/r}}.$$

4. Критерий оптимальности в задаче быстродействия

Теорема 1, определяющая структуру и свойства множеств 0-управляемости, позволяет сформулировать условия оптимальности процесса управления по быстродействию для случая, когда $\mathcal{U}$ является строго выпуклым.

Теорема 2. *Пусть в системе* (4) *множество* $\mathcal{U}$ *строго выпукло,* $x_0 \in \mathcal{X}_{\gamma,r}(K_{\min}) \setminus \mathcal{X}_{\gamma,r}(K_{\min}-1)$*, наборы* $\{x^*(k)\}_{k=0}^{K_{\min}} \subset \mathbb{R}^n$, $\{u^*(k)\}_{k=0}^{K_{\min}-1} \subset \mathbb{R}^n$, $\{\psi(k)\}_{k=0}^{K_{\min}} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *определяются согласно рекуррентным соотношениям*

$$\begin{aligned}
&x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k),\\
&\psi(k+1) = (A^{-1})^{\mathrm{T}}\psi(k),\\
&u^*(k) = \gamma_0 \left(\frac{\mathcal{S}(\psi(k+1),\mathcal{U})}{\mathcal{S}(-\psi(0),\mathcal{X}_r(K_{\min}))} \right)^{1/(r-1)} \arg\max_{u\in\mathcal{U}} (\psi(k+1),u),\\
&x^*(0) = x_0,\\
&\gamma_0 = \mu(x_0,\mathcal{X}_r(K_{\min})) \le \gamma,\\
&-\psi(0) \in \mathcal{N}(x_0,\mathcal{X}_{\gamma_0,r}(K_{\min})).
\end{aligned}$$

Тогда

1. *процесс* $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{K_{\min}}$ *оптимален в задаче быстродействия для системы* (4)*;*
2. *если* $\gamma = \gamma_0$*, то оптимальный процесс единственный.*

Доказательство. Заметим, что в силу строгой выпуклости $\mathcal{U}$ при фиксированном $\psi(0)$ набор $\{u^*(k)\}_{k=0}^{K_{\min}-1} \subset \mathbb{R}^n$ определяется однозначно. А следовательно, однозначно определяется весь процесс $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{K_{\min}}$.

Рассмотрим случай, когда $\gamma = \gamma_0$. Из пункта 1 теоремы 1 и определения функционала Минковского следует, что $\mu(x_0,\mathcal{X}_{\gamma,r}(K_{\min})) = 1$ или $x_0 \in \mathcal{X}_{\gamma,r}(K_{\min})$. Тогда по определению нормального конуса существует

$$-\psi(0) \in \mathcal{N}(x_0, \mathcal{X}_{\gamma,r}(K_{\min})). \tag{7}$$

Учтем, что по построению $\psi(k) = (A^{-k})^{\mathrm{T}} \psi(0)$. Из определения опорной точки и пунктов 3 и 4 теоремы 1 получим

$$x_0 = x^*_{\mathcal{X}_{\gamma,r}(K_{\min})}(-\psi(0)) = -\gamma \frac{\sum_{k=1}^{K_{\min}} \left(\mathcal{S} \;\; (A^{-k})^{\mathrm{T}} \psi(0), \mathcal{U} \;\; ^{1/(r-1)} A^{-k} x^*_{\mathcal{U}} \;\; (A^{-k})^{\mathrm{T}} \psi(0) \;\; \right)}{\left(\sum_{k=1}^{K_{\min}} \mathcal{S} \;\; (A^{-k})^{\mathrm{T}} \psi(0), \mathcal{U} \;\; ^{r/(r-1)} \right)^{1/r}} =$$

$$= -\gamma \frac{\sum_{k=1}^{K_{\min}} \left(\mathcal{S} \;\; \psi(k), \mathcal{U} \;\; ^{1/(r-1)} A^{-k} x^*_{\mathcal{U}} \;\; \psi(k) \;\; \right)}{\mathcal{S} \;\; -\psi(0), \mathcal{X}_r(K_{\min}) \;\; ^{1/(r-1)}} =$$

$$= -\gamma \sum_{k=1}^{K_{\min}} A^{-k} \left(\frac{\mathcal{S} \;\; \psi(k), \mathcal{U}}{\mathcal{S} \;\; -\psi(0), \mathcal{X}_r(K_{\min})} \right)^{1/(r-1)} x^*_{\mathcal{U}} \;\; \psi(k) \;\; = -\sum_{k=1}^{K_{\min}} A^{-k} u^*(k-1),$$

$$-A^{K_{\min}} x_0 = \sum_{k=1}^{K_{\min}} A^{K_{\min}-k} u^*(k-1) = \sum_{k=0}^{K_{\min}-1} A^k u^*(K_{\min} - k - 1).$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=0}^{K_{\min}-1} \mu(u^*(k), \mathcal{U})^r = \sum_{k=0}^{K_{\min}-1} \mu \left(\gamma \left(\frac{\mathcal{S}(\psi(k+1), \mathcal{U})}{\mathcal{S}(-\psi(0), \mathcal{X}_r(K_{\min}))} \right)^{1/(r-1)} x^*_{\mathcal{U}}(\psi(k+1)), \mathcal{U} \right)^r =$$

$$= \sum_{k=0}^{K_{\min}-1} \gamma^r \left(\frac{\mathcal{S}(\psi(k+1), \mathcal{U})}{\mathcal{S}(-\psi(0), \mathcal{X}_r(K_{\min}))} \right)^{r/(r-1)} \underbrace{\mu \;\; x^*_{\mathcal{U}}(\psi(k+1)), \mathcal{U}) \;\; ^r}_{1} = \gamma^r \frac{\sum_{k=1}^{K_{\min}} \mathcal{S} \;\; (A^{-k})^{\mathrm{T}} \psi(0), \mathcal{U} \;\; ^{r/(r-1)}}{\mathcal{S}(-\psi(0), \mathcal{X}_r(K_{\min}))^{r/(r-1)}} = \gamma^r.$$

Таким образом, $\{u^*(k)\}_{k=0}^{K_{\min}-1}$ – допустимое управление, переводящее систему $(A, \mathcal{U}, \gamma, r)$ в 0 за $K_{\min}$ шагов.

С учетом включения $x_0 \in \mathcal{X}_{\gamma,r}(K_{\min}) \setminus \mathcal{X}_{\gamma,r}(K_{\min}-1)$ и (6) получим, что данное управление также является и оптимальным.

Рассмотрим вопросы единственности. По определению любое оптимальное управление $\{u'(k)\}_{k=0}^{K_{\min}-1}$ должно удовлетворять условиям

$$x_0 = -\sum_{k=1}^{K_{\min}} A^{-k} u'(k-1), \quad \sum_{k=0}^{K_{\min}-1} \mu(u'(k), \mathcal{U})^r \le \gamma^r.$$

С другой стороны, в силу (7) должно также выполняться условие максимума

$$\sum_{k=1}^{K_{\min}} \psi(k), u'(k-1) = \left(-\psi(0), -\sum_{k=1}^{K_{\min}} A^{-k} u'(k-1)\right) = -\psi(0), x_0 = \max_{x \in \mathcal{X}_{\gamma,r}(K_{\min})} (-\psi(0), x) =$$

$$= \max_{\sum_{k=0}^{K_{\min}-1} \mu(u(k),\mathcal{U})^r \le \gamma^r} \left(-\psi(0), -\sum_{k=1}^{K_{\min}} A^{-k} u(k-1)\right) = \max_{\sum_{k=0}^{K_{\min}-1} \mu(u(k),\mathcal{U})^r \le \gamma^r} \sum_{k=1}^{K_{\min}} \psi(k), u(k-1) .$$

Т.е. оптимальное управление должно быть точкой максимума ненулевого линейного функционала в пространстве $\mathbb{R}^{nK_{\min}}$ на множестве

$$\left\{ u(0)^{\mathrm{T}}, \ldots, u(K_{\min}-1)^{\mathrm{T}} \ {}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{nK_{\min}} : \sum_{k=0}^{K_{\min}-1} \mu(u(k), \mathcal{U})^r \le \gamma^r \right\}.$$

которое в силу строгой выпуклости $\mathcal{U}$ и условия $r > 1$ также является строго выпуклым в $\mathbb{R}^{nK_{\min}}$. Но согласно [16, лемма 3] такая точка максимума единствена и, как было продемонстрирована ранее, совпадает с $\{u^*(k)\}_{k=0}^{K_{\min}-1}$.

В случае $\gamma_0 < \gamma$ управление $\{u^*(k)\}_{k=0}^{K_{\min}-1}$, как только что было продемонстрировано, является единственным оптимальным в задаче быстродействия для системы $(A, \mathcal{U}, \gamma_0, r)$. С другой стороны, в силу неравенства

$$\sum_{k=0}^{K_{\min}-1} \mu(u^*(k), \mathcal{U})^r = \gamma_0 < \gamma^r \tag{8}$$

данное управление также является допустимым, переводящим систему $(A, \mathcal{U}, \gamma, r)$ в 0 за $K_{\min}$ число шагов. Тогда в силу включения $x_0 \in \mathcal{X}_{\gamma,r}(K_{\min}) \setminus \mathcal{X}_{\gamma,r}(K_{\min}-1)$ и (6) оно оптимально.

Теорема 2 позволяет решить задачу быстродействия для случая строго выпуклых суммарных ограничений на управление, что определяется строгой выпуклостью $\mathcal{U}$ и условием $r > 1$. При этом параметры γ_0 и $\psi(0)$, позволяющие однозначно разрешить условия принципа максимума, могут быть вычислены из описания множества $\mathcal{U}$ при помощи пункта 4 теоремы 1.

5. Наискорейшая коррекция орбиты спутника

Заметим, что построенная дискретная математическая модель (3) не удовлетворяет условиям теоремы 2, поскольку множество $\mathcal{U}$ представляет собой отрезок, т.е. не является строго выпуклым. Для решения данной проблемы утроим шаг квантования:

$$y(k) = x(3k),\ \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Это приведет к эквивалентной дискретной системе $(A^3, \mathcal{U} +_r A\mathcal{U} +_r A^2\mathcal{U}, \gamma, r)$. При этом множество $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} +_r A\mathcal{U} +_r A^2\mathcal{U}$ в силу [21, теорема 1] является строго выпуклым для любого $r > 1$.

Представим численное решение задачи быстродействия для системы $(A^3, \mathcal{U}_0, \gamma, r)$, построенное на основе теоремы 2. Выберем $\delta = 0.5$, $x_0 = (0,0,0.9)^{\mathrm{T}}$, $\gamma = 1$ и рассмотрим значения $r \in \{2,4\}$.

Пусть $r = 2$. В ходе расчетов были получены следующие значения:

$$\mu(x_0, \mathcal{X}_2(3)) = 1.4285,\ \mu(x_0, \mathcal{X}_2(4)) = 0.9522.$$

Отсюда с учетом определения функционала Минковского следует, что $x_0 \in \mathcal{X}_2(4) \setminus \mathcal{X}_2(3)$, т.е. в силу (6) верно равенство $K_{\min} = 4$ (это эквивалентно $K_{\min} = 12$ для исходной системы). Оптимальный процесс, построенный согласно теореме 2, представлен в таблице 1.

Энергетические затраты при этом составляют

$$\left(\sum_{k=0}^{K_{\min}-1} \mu(u^*(k), \mathcal{U}_0)^2 \right)^{1/2} = 0.9522.$$

Таблица 1. Оптимальный процесс в случае $r = 2$

k	0	1	2	3	4
$y_1^*(k)$	0	1.2138	1.6277	0.4165	0
$y_2^*(k)$	0	0.9981	-0.5259	-0.7056	0
$y_3^*(k)$	0.9	-0.8935	-1.2597	0.0756	0
$u_1^*(k)$	-0.4588	-0.0530	0.1499	-0.2225	–
$u_2^*(k)$	-0.7973	-0.0483	0.2673	-0.4101	–
$u_3^*(k)$	-0.1208	0.0524	0.0684	-0.0523	–

Пусть $r = 4$. В ходе расчетов были получены следующие значения:

$$\mu(x_0, \mathcal{X}_4(2)) = 1.5996,\ \mu(x_0, \mathcal{X}_4(3)) = 0.9591.$$

Отсюда с учетом определения функционала Минковского следует, что $x_0 \in \mathcal{X}_4(3) \setminus \mathcal{X}_4(2)$, т.е. в силу (6) верно равенство $K_{\min} = 3$ (это эквивалентно $K_{\min} = 9$ для исходной системы). Оптимальный процесс, построенный согласно теореме 2, представлен в таблице 2.

Энергетические затраты при этом составляют

$$\left(\sum_{k=0}^{K_{\min}-1} \mu(u^*(k),\mathcal{U}_0)^4\right)^{1/4} = 0.9591.$$

Таблица 2. Оптимальный процесс в случае $r = 4$

k	0	1	2	3
$y_1^*(k)$	0	0.9221	0.4763	0
$y_2^*(k)$	0	0.4639	-0.7026	0
$y_3^*(k)$	0.9	-1.0269	-0.1629	0
$u_1^*(k)$	-0.7504	0.1427	0.1204	–
$u_2^*(k)$	-1.3315	0.3923	0.1120	–
$u_3^*(k)$	-0.2542	0.2732	-0.0001	–

Заметим, что расчеты в полной мере согласуются с предположениями о том, что более высокая энергоэффективность двигательных установок позволяет провести коррекцию за меньшее время.

Матрица A дискретной системы имеет следующие собственные значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$. Т.е. при любом шаге дискретизации $\delta > 0$ результирующая дискретная система будет полностью управляемой для $r > 1$ в соответствии с [21, теорема 3].

6. Заключение

Решена задача наискорейшей коррекции орбиты спутника, расположенного в окрестности круговой орбиты, при наличии ресурсных ограничений на релейное управление. В зависимости от энергоэффективности двигательной установки, используемой для коррекции, выбирается порядок суммарных ограничений в исследуемой дискретной системе управления. Для заданного начального состояния вычислены оптимальные траектории для ограничений второго и четвертого порядка.

Основным результатом работы являются сформулированные в виде теоремы 2 условия оптимальности процесса управления по быстродействию. В случае $r > 1$ данные условия представлены в форме принципа максимума. Разрешение начальных условий сопряженной системы представляет определенную трудность, однако может быть осуществлено численно.

Список источников

1. Иванов С.Г., Гришко Д.А., Баранов А.А. Коррекция аргумента перигея средней эллиптической орбиты с постоянной большой полуосью и различным эксцентриситетом // Труды МАИ. 2024. № 139. URL: https://trudymai.ru/ published.php?ID=183447

2. Васькова В.С. О перемещении вдоль троса космического аппарата с неидеальным солнечным парусом // Труды МАИ. 2024. № 139. URL: https://trudymai.ru/ published.php?ID=1834499

3. Минаков Е.П., Александров М.А., Мищеряков А.В., Мищеряков С.В. Алгоритм определения параметров наклонных проекций точек на поверхности земли для круговых орбит космических аппаратов // Труды МАИ. 2024. № 135. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=179696

4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1969. – 393 с.

5. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. - М.: Наука, 1973.

– 448 с.

6. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. - М.: Наука, 1973. – 255 с.

7. Desoer C.A., Wing J. The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems: General Theory // Journal Franklin Institute. 1961. V. 272, No. 3. P. 208–228.

8. Lin W.-S. Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems // International Journal of Control. 1986. V. 43, No. 5. P. 1343–1351. DOI: 10.1080/00207178608933543

9. Мороз А.И. Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка // Автоматика и телемеханика. 1965. № 2. С. 193–207.

10. Краснощеченко В.И. Симплекс-метод для решения задачи быстродействия при наличии ограничения на скалярное управление и фазовых ограничений // Инженерный журнал: наука и инновании. 2014. № 6. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/asu/1252.html

11. Сазанова Л.А. Устойчивость оптимального синтеза в задаче быстродействия // Известия вузов. Математика. 2002. № 2. С. 46–57.

12. Бортаковский А.С. Быстродействие группы управляемых объектов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 5. С. 16–42. DOI: 10.31857/S0002338823050049

13. Chen D., Bako L., Lecoeuche S. The Minimum-Time Problem for Discrete-Time Linear Systems: A Non-Smooth Optimization Approach // Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications. 2012. P. 196–201. DOI:10.1109/CCA.2012.6402693

14. Abdelhak A., Rachik M. The Linear Quadratic Minimum-Time Problem for a Class of Discrete Systems // Journal of Mathematical Programming and Operations Research. 2010. V. 59, No. 4. P. 575–587. DOI: 10.1080/02331930801954672

15. Lee J., Haddad W.M. Fixed Time Stability and Optimal Stabilisation of Discrete Autonomous Systems // International Journal of Control. 2022. V. 96, No. 9. P. 2341–2355. DOI: 10.1080/00207179.2022.2092557

16. Ибрагимов Д.Н. О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // Автоматика и телемеханика. 2019. № 3. С. 3–25. DOI: 10.1134/S0005231019030012

17. Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М., Порцева Е.Ю. О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстродействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // Автоматика и телемеханика. 2021. № 12. С. 48–72. DOI: 10.31857/S0005231021120047

18. Каменев Г.К. Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. - М.: Вычислительный центр РАН, 2010. – 119 с.

19. Козорез Д.А., Красильщиков М.Н., Кружков Д.М., Сыпало К.И. Интегрированная навигационная система космического аппарата на геостационарной и высокоэллиптической орбитах, функционирующая в условиях активных помех // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 3. С. 143–154.

20. Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т. Спутниковые системы

мониторинга. Анализ, синтез и управление. - М.: МАИ, 2000. – 568 с.

21. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О некоторых свойствах множеств ограниченной управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 6. С. 3–32. DOI: 10.31857/S0002338823050086

22. Ибрагимов Д.Н. О методе построения множеств 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление // Мехатроника, автоматизация, управление. 2024. Т. 25. № 10. С. 503–512.

23. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973. – 469 с.

24. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального ана лиза. - М.: Физматлит, 2009. – 509 с.

References

1.Ivanov S.G., Grishko D.A., Baranov A.A. Change of perigee argument of medium Earth orbit with constant semi-major axis and different eccentricity. *Trudy MAI*. 2024. No. 139. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=183447

2.Vas'kova V.S. On the motion of a spacecraft along a tether by non-perfect solar sail. *Trudy MAI*. 2024. No. 139. (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/ eng/published.php?ID=1834499

3.Minakov E.P., Aleksandrov M.A., Mishcheryakov A.V., Mishcheryakov S.V. Algorithm for determining the parameters of oblinated projections of points on the earth's surface for circular orbits of space vehicles. *Trudy MAI*. 2024. No. 135. (In Russ.). URL:

https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=179696&eng=Y

4. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko B.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* (Mathematical theory of the optimal processes). Moscow: Nauka Publ, 1969. 393 p.

5. Boltyanskii V.G. *Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami* (Optimal control of discrete-time systems). Moscow: Nauka Publ, 1973. 448 p.

6. Propoi A.I. *Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov* (Elements of the theory of the optimal discrete-time processes). Moscow: Nauka Publ, 1973. 255 p.

7. Desoer C.A., Wing J. The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems: General Theory. *Journal Franklin Institute*. 1961. V. 272, No. 3. P. 208–228.

8. Lin W.-S. Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems. *International Journal of Control*. 1986. V. 43, No. 5. P. 1343–1351. DOI: 10.1080/00207178608933543

9. Moroz A.I. Synthesis of Time-Optimal Control for Linear Discrete Objects of the Third Order. *Avtomatika i telemekhanika*. 1965. No.2. P. 193–207. (In Russ.)

10. Krasnoshchechenko V.I. Simplex Method for Solving the Brachistochrone Problem at State and Control Constraints. *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovanii*. 2014. No. 6. (In Russ.). URL: http://engjournal.ru/catalog/it/asu/1252.html

11. Cazanova L.A. Stability of Optimal Synthesis in the Time-Optimization Problem. *Izvestiya vuzov. Matematika*. 2002. No. 2. P. 46–57. (In Russ.)

12. Bortakovskii A.S. Speed of Performance of a Group of Controlled Objects Izvestiya RAN.

Teoriya i sistemy upravleniya. 2023. No. 5. P. 16–42. (In Russ.). DOI: 10.31857/S0002338823050049

13. Chen D., Bako L., Lecoeuche S. The Minimum-Time Problem for Discrete-Time Linear Systems: A Non-Smooth Optimization Approach. *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*. 2012. P. 196–201. DOI:10.1109/CCA.2012.6402693

14. Abdelhak A., Rachik M. The Linear Quadratic Minimum-Time Problem for a Class of Discrete Systems. *Journal of Mathematical Programming and Operations Research*. 2010. V. 59, No. 4. P. 575–587. DOI: 10.1080/02331930801954672

15. Lee J., Haddad W.M. Fixed Time Stability and Optimal Stabilisation of Discrete Autonomous Systems. *International Journal of Control*. 2022. V. 96, No. 9. P. 2341–2355. DOI: 10.1080/00207179.2022.2092557

16. Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator. *Avtomatika i telemekhanika*. 2019. No. 3. P. 3–25. (In Russ.). DOI: 10.1134/S0005231019030012

17. Ibragimov D.N., Novozhilkin N.M., Portseva E.Yu. On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with Bounded Control. *Avtomatika i telemekhanika*. 2021. No. 12. P. 48–72. (In Russ.). DOI: 10.31857/S0005231021120047

18. Kamenev G.K. *Chislennoe issledovanie effektivnosti metodov poliedral'noi approksimatsii vypuklykh tel* (Numerical study of the efficiency of polyhedral approximation methods for

convex bodies). Moscow: Vychislitel'nyi tsentr RAN Publ., 2010. 119 p.

19. Kozorez D.A., Krasil'shchikov M.N., Kruzhkov D.M., Sypalo K.I. Integrated Navigation System for a Space Vehicle on a Geostationary or Highly Elliptic Orbit Operating in the Presence of Active Jam. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*. 2013. No. 3. P. 143–154. (In Russ.)

20. Malyshev V.V., Krasil'shchikov M.N., Bobronnikov V.T. *Sputnikovye sistemy monitoringa. Analiz, sintez i upravlenie* (Satellite monitoring systems. Analysis, synthesis and control). Moscow: MAI Publ., 2000. 568 p.

21. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On Some Properties of Sets of Bounded Controllability for Stationary Linear Discrete Systems with Total Control Constraints. Izvestiya RAN. *Teoriya i sistemy upravleniya.* 2023. No. 6. P. 3–32. (In Russ.). DOI: 10.31857/S0002338823050086

22. Ibragimov D.N. On the Method for Constructing Null-Controllable Sets for Linear Discrete-Time Systems with Summary Control Constraints. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*. 2024. V. 25, No. 10. P. 503–512. (In Russ.)

23. Rokafellar R. *Vypuklyi analiz* (Convex Analysis). Moscow: Mir Publ., 1973. 469 p.

24. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis). Moscow: Fizmatlit Publ., 2009. 509 p.

Статья поступила в редакцию 20.01.2025

Одобрена после рецензирования 30.01.2025

Принята к публикации 25.02.2025

The article was submitted on 20.01.2025; approved after reviewing on 30.01.2025; accepted for publication on 25.02.2025