

## **Динамическое поведение тонкостенной конструкции с упругим наполнителем под действием подвижной нагрузки**

**Антуфьев Б.А.\*, Сукманов И.В.\*\***

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*\*e-mail: [antufjev.bor@yandex.ru](mailto:antufjev.bor@yandex.ru)*

*\*\*e-mail: [igor8385@yandex.ru](mailto:igor8385@yandex.ru)*

**Статья поступила 20.12.2020**

### **Аннотация**

Решена задача о динамическом деформировании цилиндрической оболочки с разрушающимся во времени упругим основанием под действием внутреннего давления на свободной части цилиндра и подвижной радиальной нагрузки. Деформация конструкции считается осесимметричной и описывается уравнениями моментной классической теории оболочек, а наполнитель подчиняется гипотезе Винклера. Сходные задачи возникают при конструировании ракетных двигателей твердого топлива (РДТТ). В этом случае разрушение наполнителя объясняется выгоранием топлива, а внутреннее давление – действием продуктов сгорания. Подвижная радиальная нагрузка моделирует волну давления, вследствие чего возникает проблема определения критической скорости ее движения, при которой происходит потеря устойчивости стенок РДТТ. Эти скорости определяются в двух вариантах - квазистатическом и динамическом. Кроме того, в замкнутой форме получены формулы для собственных частот колебаний изучаемой конструкции. Рассмотрены примеры и проведены параметрические исследования.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, разрушающееся упругое основание, подвижная нагрузка, критические скорости движения, собственные частоты колебаний, квазистатическое и динамическое решения.

На конструкции летательных аппаратов (ЛА) при эксплуатации действует волна давления (подвижная нагрузка), которая не только вызывает их динамическое деформирование, но и в ряде случаев может привести к потере устойчивости их обшивки. В научной литературе достаточно подробно исследованы задачи о действии движущихся нагрузок на балки [3,4,5,14-18], что связано в основном с проблемами прочности железнодорожного транспорта. Актуальных работ о движении сил по оболочкам являющихся основным конструктивным элементом ЛА значительно меньше. Некоторые из них рассмотрены, например, в [1,4,7,10,11-13,19,20]. В предлагаемой статье исследуется проблема действия подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку с упругим внутренним основанием на примере обечайки корпуса твердотопливного двигателя (РДТТ).

Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится упругий наполнитель, разрушающийся с постоянной скоростью  $V_0$ . Причем плоскость его разрушения перпендикулярна оси цилиндра. На части оболочки свободной от упругого основания действует внутреннее давление интенсивности  $p$ . По внешней поверхности цилиндра движется с постоянной скоростью  $V$  бесконечная равномерно распределенная радиальная нагрузка интенсивности  $q$  (рис.1).

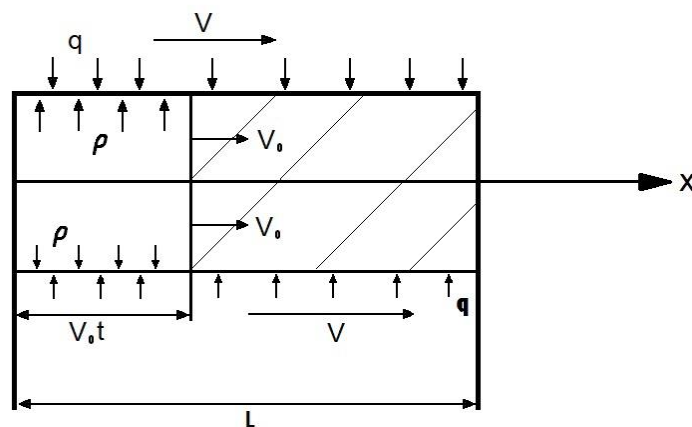


Рис.1

Сходные задачи возникают при исследовании работы РДТТ. В этом случае упругое основание моделирует пороховой заряд, внутреннее давление – давление газообразных продуктов сгорания, а подвижная нагрузка имитирует действие волны давления. Считаем, что деформация оболочки носит осесимметричный характер и описывается уравнениями классической моментной теории оболочек. Внутренний наполнитель подчиняется гипотезе Винклера, в соответствие с которой усилия взаимодействия между наполнителем и оболочкой пропорциональны ее прогибу  $w$  и коэффициенту жесткости основания  $b$ . Упругое основание считаем безинерционным, а контакт между ним и оболочкой безотрывным. Границу областей разрушенного основания и свободной части цилиндра определим с помощью обобщенных функций Хевисайда. На рис. 1 показано состояние конструкции в произвольный момент времени  $t$ . Сохранившаяся к этому времени часть упругого основания заштрихована. Решение задачи будем рассматривать в двух вариантах – квазистатическом и динамическом, что позволит провести сравнение решений и выбрать из них оптимальное.

## Квазистатическое решение

В этом варианте решения деформированное состояние оболочки, определяемое ее прогибом  $w$ , не зависит от времени  $t$ , а изменяется только вдоль оси  $x$  (рис.1). Элемент подвижной нагрузки за время  $t$  проходит путь  $x = Vt$ , а инерционная сила равна  $\frac{q}{g} \cdot V^2 \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}$ . С учетом всего вышесказанного разрешающее

уравнение задачи принимает вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + w(4\beta^4 + \frac{b}{D} H(x - V_0 t)) + \frac{qV^2}{gD} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{p}{D} (H(x - 0) - H(x - V_0 t)), \quad (1)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \beta^4 = \frac{3(1 - \mu^2)}{R^2 h^2}$$

Здесь  $R$  и  $h$  - радиус и толщина оболочки,  $E$  и  $\mu$  - ее модуль упругости и коэффициент Пуассона,  $H(x - 0)$  и  $H(x - V_0 t)$  функции Хевисайда,  $g$  - гравитационное ускорение. Остальные обозначения традиционны. В уравнение (1) в качестве параметра входит скорость движения нагрузки  $V$ . Кроме того, оно содержит разрывные коэффициенты, связанные с наличием функций Хевисайда, определяющих границы зоны разрушения упругого основания. Поэтому точное решение уравнения (1) получить нельзя, и для его решения используем приближенный метод Бубнова. В соответствии с ним представим прогиб оболочки  $w$  в виде разложения по системе задаваемых функций

$$w = \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(x) \quad (2)$$

где  $w_i$  - неизвестные коэффициенты,  $\varphi_i(x)$  - задаваемые линейно независимые координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям на краях оболочки. Подставляя разложение (2) в уравнение (1) и, применяя процедуру метода Бубнова, получим связанную систему  $N$  линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $w_i$  в разложении (2). В матричной форме записи она имеет вид

$$KW = C \quad (3)$$

Входящие в (3) матрица жесткости  $K$  и векторы неизвестных  $W$  и нагрузок  $C$  имеют вид (4), Их размерность определяется числом членов ряда сохраненных в разложении (2).

$$K = [k_{ij}(V)], \quad W = \{w_j\}, \quad C = \{c_j\}, \quad (4)$$

где

$$k_{ij} = \int_0^L \varphi_i^{IV} \varphi_j dx + 4\beta^4 \int_0^L \varphi_i \varphi_j dx + \frac{b}{D} \int_0^L H(x - V_0 t) \varphi_i \varphi_j dx + \frac{qV^2}{gD} \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j dx,$$

$$c_j = \frac{p}{D} \int_0^L (H(x - 0) - H(x - V_0 t)) \varphi_j dx \quad (5)$$

Здесь и далее штрихами обозначены соответствующие производные по продольной координате  $x$ .

Необходимо отметить, что вследствие наличия в разрешающем уравнении (1) разрывных функций Хевисайда, связанных с границей зоны разрушения упругого основания, даже при выборе функций  $\varphi_i(x)$  в разложении (2) ортогональными, система уравнений (3) не распадается на отдельные несвязанные друг с другом уравнения. Коэффициенты жесткости  $k_{ij}(V)$  в качестве параметра содержат

скорость движения нагрузки. При решении задачи в высоких приближениях ее можно определить только численно из условия равенства нулю определителя матрицы жесткости  $K$ . Если при некоторых значениях скорости  $V$  прогибы оболочки начинают резко возрастать, то это означает приближение к ее критическому значению. Наиболее практически важную минимальную (основную) критическую скорость можно найти, решая задачу в одночленном приближении при сохранении в рядах (2) одного слагаемого. Тогда она находится из условия равенства нулю коэффициента жесткости  $k_{11} = 0$

$$V_{KP}^2 = - \frac{gD \left[ \int_0^l \varphi_1^{IV} \varphi_1 dx + 4\beta^4 \int_0^l \varphi_1^2 dx + \frac{b}{D} \int_0^l H(x - V_0 t) \varphi_1^2 dx \right]}{q \int_0^l \varphi_1'' \varphi_1 dx} \quad (6)$$

Для определения деформированного состояния оболочки систему уравнений (3) решают обычным способом.

### Динамическое решение

В этом варианте постановки задачи считаем, что деформированное состояние оболочки зависит не только от ее продольной координаты  $x$ , но и от времени  $t$ . Элемент нагрузки, как и ранее за время  $t$  двигаясь с постоянной скоростью, проходит расстояние  $x = Vt$ . Так как прогиб оболочки является теперь функцией уже двух переменных  $x$  и  $t$  скорость и ускорение стенок оболочки в направлении внешней нормали к ее поверхности будут полными производными

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

В формуле для ускорения второе слагаемое, содержащее смешанную производную, соответствует ускорению Кориолиса и при решении практических задач им обычно пренебрегают [4,5]. Тогда разрешающее уравнение задачи приобретает по сравнению с (1) более сложный вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + w(4\beta^4 + \frac{b}{D} H(x - V_0 t)) + \frac{qV^2}{gD} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{q}{gD} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{p}{D} (H(x - 0) - H(x - V_0 t)), \quad (7)$$

Здесь все обозначения традиционны. Так как и это уравнение содержит разрывные коэффициенты при неизвестных его точное решение получить нельзя и для его решения, как и ранее, используем метод Бубнова. Считая колебания конструкции во времени гармоническими, представим прогиб оболочки в виде следующего разложения

$$w = \sin \omega t \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(x), \quad (8)$$

где  $\omega$  - частота колебаний,  $w_i$  - неизвестные коэффициенты, а  $\varphi_i(x)$  - линейно независимые координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям на краях оболочки. Подставляя разложение (8) в уравнение (7), и применяя к нему процедуру метода Бубнова, сведем задачу к системе линейных алгебраических уравнений относительно  $w_i$ . В матричной форме записи она имеет вид

$$[K - \omega^2 M]Y = C \quad (9)$$

где  $K$  и  $M$  – квадратные матрицы жесткости и масс конструкции,  $Y$  и  $B$  – векторы неизвестных коэффициентов и нагрузок соответственно. Эти матрицы и векторы имеют вид

$$M = [m_{ij}], \quad K = [k_{ij}(V)], \quad W = \{w_j\}, \quad C = \{c_j\} \quad (10)$$

Размерность матриц и векторов в уравнениях (9) определяется числом членов ряда сохраненных в разложениях (8), а их элементы равны

$$k_{ij} = \int_0^L \varphi_i^{IV} \varphi_j dx + 4\beta^4 \int_0^L \varphi_i \varphi_j dx + \frac{b}{D} \int_0^L H(x - V_0 t) \varphi_i \varphi_j dx + \frac{qV^2}{gD} \int_0^L \varphi_i'' \varphi_j dx,$$

$$c_j = \frac{P}{D} \int_0^L (H(x - 0) - H(x - V_0 t)) \varphi_j dx, \quad m_{ij} = \frac{q}{gD} \int_0^L \varphi_i \varphi_j dx \quad (11)$$

Низшая часть спектра собственных частот колебаний конструкции можно определить только численно из условия равенства нулю определителя уравнений (9)

$$\det[K - \omega^2 M] = 0 \quad (12)$$

Аналитически собственные частоты колебаний можно найти только в одно или двучленном приближениях, сохраняя в рядах (8), одно или два слагаемых. Основная (нижняя) частота собственных колебаний в одночленном приближении равна

$$\omega_1^2 = \frac{k_{11}}{m_{11}} = \frac{Dg \left[ \int_0^l \varphi_1^{IV} \varphi_1 dx + 4\beta^4 \int_0^l \varphi_1^2 dx + \frac{b}{D} \int_0^l H(x - V_0 t) \varphi_1^2 dx + \frac{qV^2}{gD} \int_0^l \varphi_1'' \varphi_1 dx \right]}{q \int_0^l \varphi_1^2 dx} \quad (13)$$

соответствии с динамическим критерием устойчивости упругих систем в критических состояниях собственные частоты колебаний рассматриваемой конструкции равны нулю. Из этого условия найдем спектр критических скоростей движения. Наиболее практически важную минимальную (основную) скорость определим из условия  $\omega_1^2 = 0$ . Она будет равна



$$V_{KP}^2 = - \frac{Dg \left[ \int_0^l \varphi_1^{IV} \varphi_1 dx + 4\beta^4 \int_0^l \varphi_1^2 dx + \frac{b}{D} \int_0^l H(x - V_0 t) \varphi_1^2 dx \right]}{q \int_0^l \varphi_1'' \varphi_1 dx} \quad (14)$$

Знак минус в этой формуле в результате практических вычислений уничтожается. Таким образом, формулы для критических скоростей (6) и (14), найденные из решения задачи в различных постановках совпадают.

В общем случае для исследования динамического деформирования оболочки можно заранее не принимать гармонический характер деформирования конструкции, не внося при этом в разложение (8)  $\sin \omega t$  и считая, что  $w_i(t)$ . Тогда в результате применения процедуры метода Бубнова по продольной координате  $x$  приходим к системе дифференциальных уравнений в обычных производных вида

$$M\ddot{W} + KW = C. \quad (15)$$

Здесь и далее точками над искомыми функциями обозначены их производные по времени. Все остальные обозначения традиционны, и определяются по формулам (10), (11). Эта система уравнений при заданных начальных условиях интегрируется только численно. Ее решение в замкнутом виде можно получить лишь в одночленном приближении. Тогда вместо системы (15) получим лишь одно уравнение вида

$$m_{11}\ddot{w}_1 + k_{11}w_1 = c_1 \quad (16)$$

Коэффициенты вычислены по формулам (11) при  $i=j=1$ . Его решение определяющие в первом приближении форму изогнутой поверхности оболочки имеет вид

$$w_1 = A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t + w_*, \quad (17)$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные интегрирования определяемые из начальных условий задачи,  $\omega_1$  – основная частота собственных колебаний, а  $w_*$  – частное решение соответствующее конкретному виду нагрузки на оболочку. После определения прогибов по формулам теории оболочек можно определить и напряжения. Несмотря на некоторые вычислительные трудности, преимуществом динамического варианта решения задачи по сравнению с квазистатическим является то, что кроме критических скоростей определяются еще и собственные частоты колебаний конструкции, имеющие самостоятельный практический интерес.

### Примеры

Будем рассматривать два вида закрепления торцов оболочки при  $x=0$  и  $x=L$ . В случае их свободного опирания аппроксимирующие функции в рядах (2) и (8) принимаем в виде  $\varphi_i = \sin(i\pi x/L)$ , ( $i=1,2,3..$ ). Тогда на основании формул (13) и (14) получим квадраты минимальной собственной частоты колебаний и критической скорости в виде

$$\omega^2 = \frac{2Dg}{qL} \left[ \frac{\pi^4}{2L^3} + 2\beta^4 L + \frac{b}{D} \left( \frac{L-L_1}{2} + \frac{L}{4\pi} \sin \frac{\pi L_1}{L} \right) - \frac{qV^2 \pi^2}{DgL} \right] \quad (18)$$

$$V_{кр}^2 = \frac{2DgL}{q\pi^2} \left[ \frac{\pi^4}{2L^3} + 2\beta^4 L + \frac{b}{D} \left( \frac{L-L_1}{2} + \frac{L}{4\pi} \sin \frac{\pi L_1}{L} \right) \right] \quad (19)$$

Если принять, что оба торца оболочки жестко закреплены, то аппроксимирующие функции в рядах (2) и (8) берем в виде  $\varphi_i = 1 - \cos(i\pi x/L)$  ( $i=2,4,6..$ ). Тогда квадраты минимальной собственной частоты и критической скорости при  $i=2$  на основании формул (13) и (14) будут равны

$$\omega^2 = \frac{2Dg}{3qL} \left[ \frac{8\pi^4}{L^3} + 6\beta^4 L + \frac{b}{D} \left\{ \frac{3}{2}(L - L_1) + \frac{L}{\pi} \sin \frac{2\pi L_1}{L} - \frac{L}{8\pi} \sin \frac{4\pi L_1}{L} \right\} - \frac{qV^2 2\pi^2}{DgL} \right] \quad (20)$$

$$V_{кр}^2 = \frac{DgL}{2q\pi^2} \left[ \frac{8\pi^4}{L^3} + 6\beta^4 L + \frac{b}{D} \left\{ \frac{3}{2}(L - L_1) + \frac{L}{\pi} \sin \frac{2\pi L_1}{L} - \frac{L}{8\pi} \sin \frac{4\pi L_1}{L} \right\} \right] \quad (21)$$

Во всех формулах (18)-(21) критическая скорость нелинейно зависит от величины зоны разрушения упругого основания, характеризуемого параметром  $L_1 = V_0 t$ . Кроме того, почленно сравнивая между собой эти выражения, видим, что в случае жесткого защемления торцов частоты колебаний и критические скорости выше, чем в случае свободного опирания.

В приведенных далее расчетах конструкция характеризуется следующими безразмерными параметрами;  $R/h = 50$ ,  $L/R = 10$ . Коэффициент Пуассона  $\mu = 0.3$ , безразмерный параметр жесткости основания равен  $b^* = bL/E$ ,  $q^* = \frac{q}{E}$ . Исследуем зависимость квадрата безразмерной основной частоты собственных колебаний  $\Omega = \omega_*^2 = \omega^2 \rho R^2 / E$  от безразмерной длины участка разрушенного упругого основания  $L_1/L$  опираясь на формулы (18) и (20).

На рис.2 показана зависимость  $\omega_*^2$  от  $l_1/l$ , причем кривая **1** соответствует жесткому защемлению оболочки, а кривая **2** - ее шарнирному опиранию. При  $l = L_1/L = 0$  упругий наполнитель весь цел, а при  $l = L_1/L = 1$  он полностью разрушен.

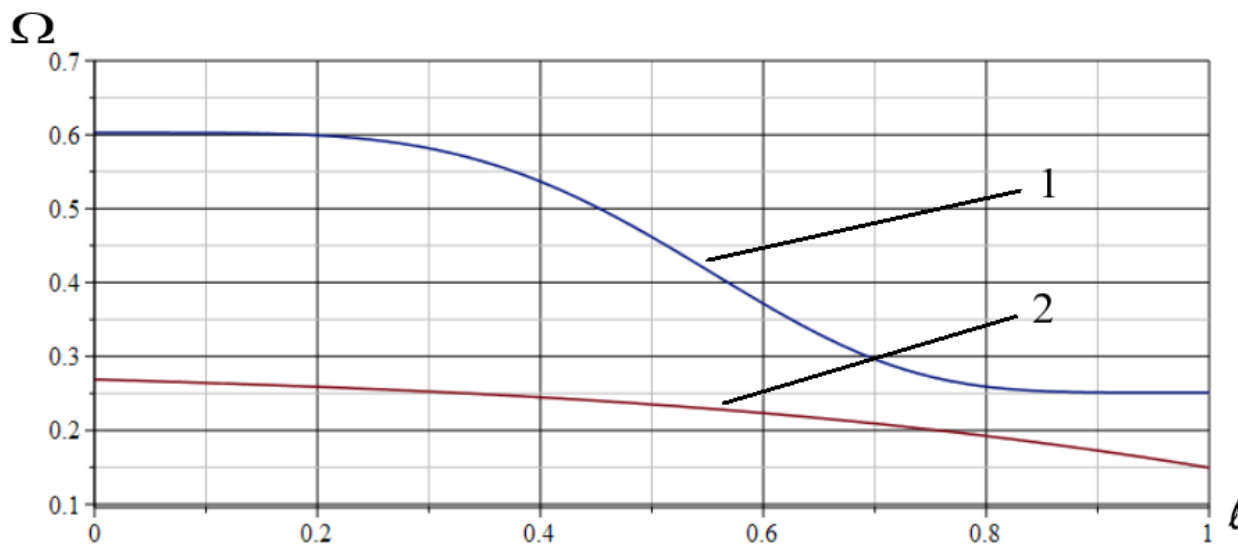


Рис.2

Как видно из сравнения этих графиков при жестком защемлении торцов оболочки собственные частоты колебаний выше, чем при их шарнирном опирании. Исследуем далее зависимость безразмерного квадрата основной критической скорости  $U = V_{KP}^{2*} = V_{KP}^2 / gh$  также от длины разрушенной части заполнителя при различных условиях закрепления торцов оболочки. На рис 3 приведены зависимости  $V_{KP}^{2*}$  от  $L_1/L$  для жестко защемленной оболочки (кривая 1) и шарнирно опертой (кривая 2). Как видно из сравнения этих кривых и здесь в случае жесткого защемления торцов критические скорости выше, чем при их шарнирном опирании.

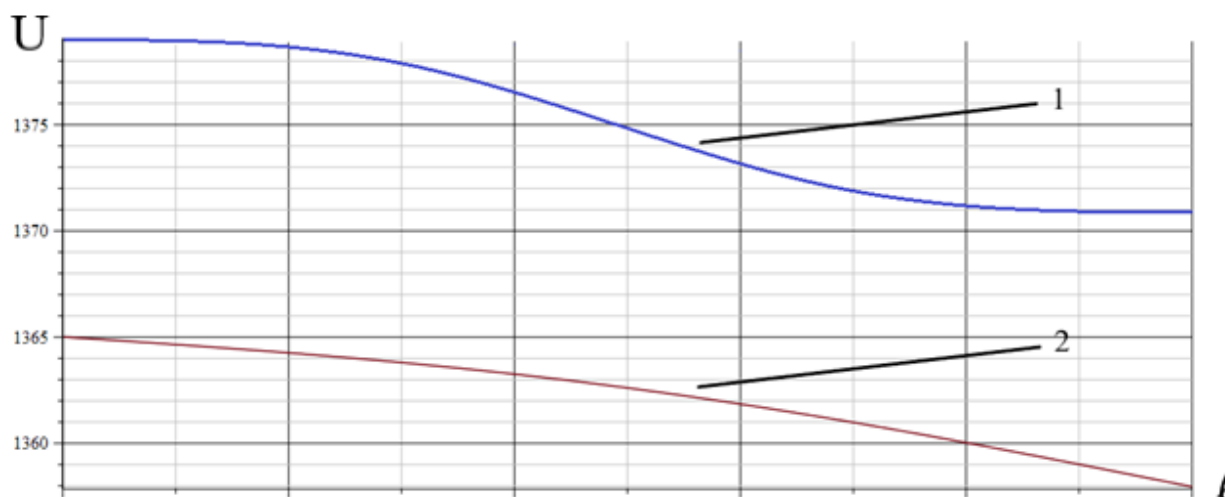


Рис.3

Представленные на рис. 2 и 3 графики хорошо согласуются с физической картиной явления. Как показывают проведенные численные расчеты, жесткость заполнителя  $b$  и величина подвижной нагрузки  $q$  незначительно влияет как собственные частоты колебаний, так и на величину критической скорости.

### Выводы

В работе решена задача о динамическом деформировании и устойчивости цилиндрической оболочки с частично разрушающимся упругим основанием под действием подвижной радиальной нагрузки. Задача решена в двух вариантах – квазистатическом и динамическом. Особое внимание в статье уделено определению критической скорости движения нагрузки и показано, что в обоих вариантах решения они совпадают. Хотя динамическое решение более сложно в вычислительном плане, чем квазистатическое, но при его использовании как побочный результат определяются еще и спектр собственных частот колебаний конструкции. Эти частоты кроме всего имеют и самостоятельное значение, помогающее избежать входа конструкции в резонансные режимы эксплуатации.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ N 19-08-00579*

### **Библиографический список**

1. Антуфьев Б.А. Динамическое и импульсное деформирование элементов тонкостенных конструкций. - М.: Изд-во МАИ, 2015. - 163 с.
2. Ghugal Y.M., Shimpi R.P. A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates // Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2002. URL: <https://doi.org/10.1177/073168402128988481>
3. Зверьяев Е.М. Конструктивная теория тонких упругих оболочек. Препринт №33. - М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. - 25 с.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. - М.: Наука, 1972. – 432 с.
5. Коноплев Ю.Г., Якушев Р.С. Лекции по динамике сооружений с подвижными нагрузками. – Казань: Отечество, 2003. – 280 с.
6. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. - М.: Наука, 1979. - 384 с.
7. Якушев В.З. Динамика деформируемых систем под действием движущихся нагрузок // Исследования по теории пластин и оболочек. 1990. № 20. С. 233 – 307.
8. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100589>

9. Firsanov V.V. The stressed state of the «boundary layer» type cylindrical shells investigated according to a nonclassical theory // Journal of machinery, manufacture and reliability, 2018, vol. 47, no. 3, pp. 241 – 248. DOI: [10.3103/S1052618818030068](https://doi.org/10.3103/S1052618818030068).
10. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98866>
11. Фирсанов В.В., Во А.Х., Чан Н.Д. Исследование напряженного состояния подкрепленных оболочек по уточненной теории с учетом влияния упругости ребер и защемленного края // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102130>
12. Ерков А.П., Дудченко А.А. К вопросу об устойчивости пластин переменной жесткости // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100622>
13. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
14. Zhou F., Chen Z., Fan H., Huang S. Analytical study on the buckling of cylindrical shells with stepwise variable thickness subjected to uniform external pressure // Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2016, vol. 23, no. 10. DOI: [10.1080/15376494.2015.1068401](https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1068401)
15. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Колебания упругих систем. - М.: Изд-во МАИ, 2013. - 100 с.

16. Карпов В.В., Игнатьев О.В., Семенов А.А. Напряженно-деформированное состояние ребристых оболочечных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 6 (74). С. 147 – 160. DOI: [10.18720/MCE.74.12](https://doi.org/10.18720/MCE.74.12)
17. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 6. 139 - 146.
18. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. - М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
19. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Ленинград: Политехника, 1991. – 656 с.
20. Фирсанов В.В. Напряженное состояние пограничный слой в цилиндрических оболочках на основе неклассической теории // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 3. С. 44 – 51.



## **Dynamic behavior of thin-walled structures with elastic filler under the action of a moving load**

**Antufiev B.A.\*, Sukmanov I.V.\*\***

*Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI,  
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, A-80, GSP-3, 125993, Russia*

\*e-mail: [antufjev.bor@yandex.ru](mailto:antufjev.bor@yandex.ru)

\*\*e-mail: [igor8385@yandex.ru](mailto:igor8385@yandex.ru)

### **Abstract**

The problem of dynamic deformation of a cylindrical shell with a collapsing elastic base under the action of internal pressure on the free part of the cylinder and a movable radial load is solved. The deformation of the structure is considered to be axisymmetric and is described by the equations of the moment classical theory of shells, and the filler obeys the Winkler hypothesis. Similar problems arise in the design of solid propellant rocket engines (solid propellant rocket engines). In this case, the destruction of the filler is explained by fuel burnout, and the internal pressure is due to the action of combustion products. A movable radial load simulates a pressure wave, as a result of which the problem of determining the critical speed of its movement arises, at which the solid propellant rocket walls lose stability. We will consider the solution of the problem in two versions - quasi-static and dynamic, which will allow us to compare solutions and choose the optimal one. In the quasi-static version of the solution, the deformed state of the shell, determined by its deflection  $w$ , does not depend on time  $t$ , but changes only along the  $x$ -axis. Examples are considered and parametric studies are carried out. In the dynamic version of the problem statement, we assume that the deformed state of the shell depends

not only on its longitudinal coordinate  $x$ , but also on the time  $t$ . We will consider two types of pinning the ends of the shell - hinged pinning and rigid pinning. From a comparison of the graphs obtained, it can be seen that with rigid pinning of the ends of the shell, the natural vibration frequencies are higher than with their hinged support.

**Keywords:** cylindrical shell, collapsing elastic base, moving load, critical motion velocities, natural oscillation frequencies, quasi-static and dynamic solutions.

### References

1. Antuf'ev B.A. *Dinamicheskoe i impul'snoe deformirovanie elementov tonkostennykh konstruksii* (Dynamic and impulse deformation of elements in thin-walled structures), Moscow, Izd-vo MAI, 2015, 163 p.
2. Ghugal Y.M., Shimpi R.P. A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2002. URL: <https://doi.org/10.1177/073168402128988481>
3. Zveryaev E.M. *Konstruktivnaya teoriya tonkikh uprugikh obolochek* (Constructive theory of thin elastic shells), Preprint №33. Moscow, IPM im. M.V. Keldysha, 2016, 25 p.
4. Vol'mir A.S. *Nelineinaya dinamika plastin i obolochek* (Nonlinear dynamics of plates and shells), Moscow, Nauka, 1972, 432 p.
5. Konoplev Yu.G., Yakushev R.S. *Leksii po dinamike sooruzhenii s podvizhnymi nagruzkami* (Lectures on the dynamics of structures with moving loadings), Kazan', Otechestvo, 2003, 280 p.

6. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. *Ustoichivost' i kolebaniya uprugikh system* (Stability and vibrations of elastic systems), Moscow, Nauka, 1979, 384 p.
7. Yakushev V.Z. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek*, 1990, no. 20, pp. 233 – 307.
8. Firsanov V.V., Zoan K.Kh. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100589>
9. Firsanov V.V. The stressed state of the «boundary layer» type cylindrical shells investigated according to a nonclassical theory, *Journal of machinery, manufacture and reliability*, 2018, vol. 47, no. 3, pp. 241 – 248. DOI: [10.3103/S1052618818030068](https://doi.org/10.3103/S1052618818030068).
10. Firsanov V.V., Vo A.Kh. *Trudy MAI*, 2018, no. 102. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=98866>
11. Firsanov V.V., Vo A.Kh., Chan N.D. *Trudy MAI*, 2019, no. 104. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=102130>
12. Erkov A.P., Dudchenko A.A. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100622>
13. Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoichivost' uprugikh system* (Basics of calculating the stability of elastic systems), Moscow, Mashinostroenie, 1978, 312 p.
14. Zhou F., Chen Z., Fan H., Huang S. Analytical study on the buckling of cylindrical shells with stepwise variable thickness subjected to uniform external pressure, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2016, vol. 23, no. 10. DOI: [10.1080/15376494.2015.1068401](https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1068401)
15. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Kolebaniya uprugikh system* (Vibrations of elastic systems), Moscow, Izd-vo MAI, 2013, 100 p.

16. Karpov V.V., Ignat'ev O.V., Semenov A.A. *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal*, 2017, no. 6 (74), pp. 147 – 160. DOI: [10.18720/MCE.74.12](https://doi.org/10.18720/MCE.74.12)
17. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1990, no. 6, 139 - 146.
18. Aleksandrov A.V., Potapov V.D. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* (Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity), Moscow, Vysshaya shkola, 1990, 400 p.
19. Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhailovskii E.I. *Lineinaya teoriya tonkikh obolochek* (Linear theory of thin shells), Leningrad, Politekhnik, 1991, 656 p.
20. Firsanov V.V. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2018, no. 3, pp. 44 – 51.