Научная статья
УДК 539.3
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189685
EDN: https://www.elibrary.ru/NOTLTA

# КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ СО СКАЛЯРНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОВРЕЖДЁННОСТИ

**М. Мохсен✉, Л.Н. Рабинский, О.В. Егорова**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

✉ m.manoun93@gmail.com

**Цитирование:** Мохсен М., Рабинский Л.Н., Егорова О.В. Континуальная модель накопления повреждений со скалярной функцией повреждённости // Труды МАИ: электрон. журнал. № 150. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189685

**Аннотация.** Разработана континуальная модель накопления повреждений, учитывающая линейную деградацию упругих свойств материала и основанная на вариационном принципе Лагранжа. Ключевая особенность подхода — включение скалярного параметра повреждённости в выражение для плотности потенциальной энергии, что позволило получить единую сопряжённую систему уравнений, описывающую поля перемещений и повреждённости. Для решения сформулированной нелинейной краевой задачи предложен итерационный алгоритм, аналогичный методу упругих решений, обеспечивающий устойчивую сходимость на каждой итерации. Верификация модели выполнена на классической задаче о растяжении упругого стержня при двух качественно различных типах нагружения — сосредоточенной силой и распределённой нагрузкой. Выявлено, что характер распределения повреждённости вдоль стержня существенно зависит от способа приложения нагрузки, тогда как максимальное значение параметра повреждённости в зоне заделки остаётся неизменным при эквивалентной суммарной силе. Полученные результаты подтверждают адекватность предложенного подхода и демонстрируют

критическое влияние типа нагружения на сценарий деградации материала, что открывает перспективы для анализа более сложных конструкций.

**Ключевые слова:** континуальное накопление повреждений; параметр повреждённости; принцип Лагранжа; сопряжённая краевая задача; метод упругих решений; деградация упругих свойств; тип нагружения.

**Финансирование:** работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта № 26-19-00532)

## CONTINUUM DAMAGE ACCUMULATION MODEL WITH A SCALAR DAMAGE FUNCTION

**M. Mohsen✉, L.N. Rabinskiy, O.V. Egorova**

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

✉ m.manoun93@gmail.com

**Citation:** Mohsen M., Rabinskiy L.N., Egorova O.V. Continuum damage accumulation model with a scalar damage function // Trudy MAI. 2026. No. 150. (In Russ.).
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=189685

**Abstract.** This study presents a continuum damage accumulation model utilizing a scalar macro-parameter to describe the linear degradation of material properties. The deformation model for an elastic medium is formulated based on the Lagrange variational principle, with the damage parameter incorporated into the potential energy density function. This formulation yields a coupled, nonlinear boundary value problem, supplemented by an additional Euler equation governing the damage parameter evolution. A successive approximation method, analogous to the elastic solutions technique, is employed to solve the system. The model is validated through a one-dimensional rod tension problem. A comparative analysis of concentrated versus distributed loading conditions reveals a significant influence of the load type on the fracture pattern and damage distribution.

**Keywords:** continuum damage mechanics; damage parameter; Lagrange variational principle; coupled boundary value problem; method of elastic solutions; fracture pattern.

**Funding:** the work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project code No. 26-19-00532).

## Введение

Оценка накопления повреждений при деформировании материалов имеет определяющее значение для прогнозирования изменения их механических свойств и эксплуатационных характеристик конструкций в целом. Процессы деградации жёсткости и прочности под действием нагрузок характерны для широкого класса материалов, включая металлические сплавы, композиты и керамику. Краткий обзор моделей повреждённости, применяемых для анализа деградации свойств, приведён в работах [1–3]. Также были рассмотрены модели [4–9], учитывающие структурные особенности материала, такие как микроструктура композитов, и основанные на кинетических соотношениях, описывающих зарождение и рост микродефектов. Однако сложность процессов накопления повреждений затрудняет полный учёт всех возможных сценариев их развития при различных типах нагружения (статическом, циклическом, динамическом и др.), что ограничивает практическое применение моделей данного типа.

В настоящей работе для моделирования роста повреждённости и эффектов деградации свойств материала используется вариационный континуальный подход, развитый в работах [10–14]. Основная идея подхода заключается в том, что плотность потенциальной энергии среды зависит не только от кинематических аргументов (деформаций и их градиентов), но и от скалярного параметра, характеризующего накопленную повреждённость. Эффект деградации механических свойств учитывается путём введения зависимости упругих характеристик материала от этого параметра. Благодаря вариационной формулировке модель позволяет в общем случае учитывать как микроструктуру материала, так и наличие полей микродефектов – например, пористости. Подобные подходы развиваются также в работах [15–18].

Основное внимание в данной статье уделяется развитию вариационной модели повреждённости, формулировке эффективного алгоритма её численной реализации и анализу процессов деформирования изотропных материалов с учётом накопления повреждений. В рамках предложенного подхода сформулирована конкретная модель для одномерного случая, учитывающая

зависимость физических характеристик от скалярного параметра повреждённости. Это приводит к нелинейной системе разрешающих уравнений в перемещениях, дополненной сопряжённым кинетическим уравнением для параметра повреждённости. Для решения сформулированной краевой задачи разработан итерационный алгоритм, основанный на методе последовательных приближений, аналогичном методу упругих решений. Разработанный подход применён к анализу процесса деформирования стержня из изотропного материала при растяжении. Исследована зависимость распределения повреждённости и напряжений от эволюции параметра повреждённости при качественно различных типах нагружения: сосредоточенном и распределённом.

Таким образом, цель данной статьи — разработка вариационной модели и алгоритма для анализа деградации механических свойств изотропных материалов при накоплении повреждений, а также демонстрация её работоспособности на репрезентативной одномерной задаче.

## Вариационная модель накопления повреждений.

Рассматривается вариационный принцип Лагранжа [19-20] как основа для формулировки краевой задачи. Согласно данному принципу, равновесная конфигурация механической системы соответствует стационарности функционала полной энергии $Э$, что выражается в обращении в нуль его первой вариации $\delta Э$:

$$Э = U - A,\ \ U = \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}, \Omega) dV,\quad A = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}\, dV + \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}\, dF.$$

$$\delta Э = 0$$

$$\delta Э = \delta U - \delta A = 0 \qquad (1)$$

Здесь $Э$ — расширенный Лагранжиан, $U$ — потенциальная энергия системы, A — работа внешних сил, заданных в объеме $V$ и на поверхности тела $\partial V$ , $W(\boldsymbol{\varepsilon}, \Omega)$ —плотность потенциальной энергии градиентной поврежденной модели сред, $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ — тензор деформаций , $\Omega$ — скалярный параметр поврежденности $(0 \le \Omega < 1)$, $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $\mathbf{f}$ , $\mathbf{t}$ — вектор объемных и поверхностных сил соответственно.

Положим, что плотность потенциальной энергии $W(\boldsymbol{\varepsilon},\Omega)$ в объеме рассматриваемой среды $V$ (с поверхностью $\partial V$ ) определяется равенством:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon},\Omega)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbb{C}(\Omega):\boldsymbol{\varepsilon}+k_{\Omega}\Omega^{n}(x), \tag{2}$$

где: $\mathbb{C}(\Omega)$ — тензор упругости поврежденного материала, $k_{\Omega},n$ — физические параметры закона поврежденности, требующие экспериментального определения.

Обобщенные напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ и скалярная обобщенная сила g, связанная формально с поврежденностью $\Omega$ определяются линейными соотношениями Грина:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}=\dfrac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon},\Omega)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbb{C}(\Omega):\boldsymbol{\varepsilon}\\ g=\dfrac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon},\Omega)}{\partial\Omega}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbb{C}_{,\Omega}(\Omega):\boldsymbol{\varepsilon}+nk_{\Omega}\Omega^{n-1}(x), \quad \mathbb{C}_{,\Omega}(\Omega)=\partial\mathbb{C}(\Omega)/\partial\Omega\end{cases} \tag{3}$$

Зависимость тензора упругости $\mathbb{C}_{ijkm}(\Omega)$ от поврежденности $\Omega$ характеризует модель деградации материала. В настоящей работе принимается линейная аппроксимация закона деградации:

$$\mathbb{C}(\Omega)=\mathbb{C}^{0}[1-k_{E}\,\Omega] \tag{4}$$

Здесь $\mathbb{C}^{0}$ – тензор упругости идеального неповрежденного материала, для которой $\Omega=0$, $k_E$ коэффициент определяет скорость снижения модуля Юнга при накоплении повреждений.

Учтем уравнения деградации свойств (4) и перепишем плотность потенциальной энергии (2), полностью определяющую поведение рассматриваемой системы в положении локального равновесия, через параметр $\Omega$

$$W(\boldsymbol{\varepsilon},\Omega)=[1-k_{E}\,\Omega]\,W_{0}+k_{\Omega}\Omega^{n}(x), \tag{5}$$

Здесь $W_{0}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbb{C}^{0}:\boldsymbol{\varepsilon}$ – плотность потенциальной энергии обобщенной градиентной упругости при $\Omega=0$

Вариационная формулировка задачи осуществляется путём формулировки функционала полной энергии и использовании принципа Лагранжа (1):

$$\delta\Im = 0 \;\Rightarrow\; \delta\Im = \delta U - \delta A =$$
$$= \int_V [\frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon},\Omega)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon},\Omega)}{\partial \Omega}\delta\Omega - \mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u}]dV - \int_{\partial V}\mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}dF = 0 \qquad (6)$$

Учитывая, что вариация тензора деформаций $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ выражается через градиент вариации перемещений $\nabla(\delta\mathrm{u}),$ следует провести интегрирование по частям. В результате получаем замкнутую математическую модель среды с поврежденностью, включающая:

уравнения равновесия (уравнения Эйлера) в объёме V:

$$\nabla\cdot\left[(1-k_E\Omega)\square^{0} : \boldsymbol{\varepsilon}\right] + \mathbf{f} = 0 \qquad (7)$$

кинетическое уравнение для параметра повреждённости в объёме V:

$$k_\Omega n\Omega^{n-1} = W_0 \qquad (8)$$

граничные условия на поверхности $\partial$V, включающие естественные статические условия:

$$\begin{cases}\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \qquad на \quad \partial V_u,\\ (1-k_E\Omega)\square^{0} : \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t} \quad на \quad \partial V_t.\end{cases} \qquad (9)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности $\partial V$;

Поставленная краевая задача (6)–(9) является существенно нелинейной, поскольку поле поврежденности $\Omega$ зависит от напряженного состояния, определяемого полем перемещений u, которое, в свою очередь, зависит от распределения $\Omega$ через закон деградации (4). Для её решения применяется итерационный метод последовательных приближений, позволяющий на каждом шаге уточнять распределение поврежденности и напряженно-деформированного состояния.

## Приближенный алгоритм определения параметра поврежденности

Для демонстрации реализации модели рассматривается одномерная плоская задача о растяжении упругого стержня постоянного поперечного сечения $F_o$ на отрезке $x \in [0, L]$ (рисунок 1):

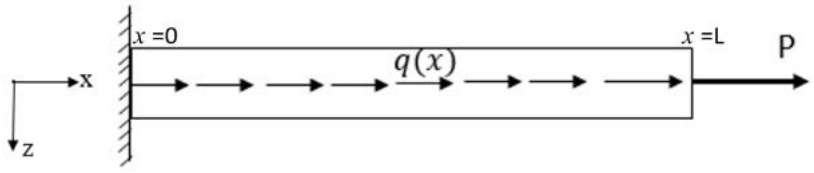



Рисунок 1 – Схема стержня при одноосном нагружении

Разрешающие уравнения принимают вид:

$$u'' - \left(k_E\,\Omega\right)u'' - \left(k_E\Omega'\right)u' = -\frac{q(x)}{E_o F_o} \tag{10}$$

$$k_\Omega n\,\Omega^{n-1} = \frac{1}{2}k_E E_o\left(u'\right)^2 \tag{11}$$

Краевые условия записываются на торцах стержня

$$\left[P - E_o F_o u'\left(1 - k_E\,\Omega\right)\right]\delta u\Big|_{x=0}^{x=l} = 0 \tag{12}$$

Используется линейный закон деградация механических свойств

$$E_\Omega = (1 - k_E\Omega)E_0, \tag{13}$$

где $E_o$ — модуль упругости идеального неповрежденного материала ( $\Omega = 0$ ), $E_\Omega$ — модуль упругости поврежденного материала, $P$ —постоянная сила, приложенная к торцам стержня, $q(x)$ — распределённая нагрузка.

Сначала рассмотрим частный случай, характеризующийся отсутствием распределённой нагрузки q(x) (рисунок 1). Стержень нагружен только постоянной силой P. Применяется итерационный алгоритм, основанный на процедуре последовательных приближений и аналогичный методу упругих решений. На начальном этапе все слагаемые в уравнениях (11), зависящие от параметра повреждённости Ω, переносятся в правую часть. Затем в уравнениях (11)–(14) вводятся индексы итераций (приближений). В результате получается следующая система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} u'' &= +\left(k_E\,\Omega\right)u'' + \left(k_E\Omega'\right)u' \\ u''_{(s)} &= +\left(k_E\,\Omega_{(s-1)}\right)u''_{(s-1)} + \left(k_E\Omega'_{(s-1)}\right)u'_{(s-1)} \quad , s > 0 \\ k_\Omega n\,\Omega_{(s)}^{n-1} &= \frac{1}{2}k_E E_o\left(u'_{(s)}\right)^2 \\ E_{\Omega(s)} &= \left[1 - k_E\Omega_{(s)}\right]E_o \end{aligned}\right\} \quad , s \geq 0 \tag{14}$$

В качестве нулевого приближения $(s = 0)$ рассмотрим перемещение $u_{(0)}$, найденное как решение задачи (11)–(13) в предположении, что $\Omega = 0$. Следовательно, перемещение $u_{(0)}(x)$ находится как решение краевой задачи для

градиентной теории упругости в отсутствии поврежденности и в результате получим $u_{(0)}(x)=\frac{P}{E_0F_0}x$.

Для реализации первого приближения $s=1$ определим параметр поврежденности $\Omega_{(0)}(x)$ из (11) и следовательно модель деградации свойств материала $E_{\Omega,(0)}$ из (13) .Учитывая (12) и (14), для произвольного приближения (начиная со первого приближения $s\geq 1$) решим краевую задачу и в результате находится последовательность скалярных функций поврежденности $\left\{\Omega_{(s)}\right\}, 0\leq\Omega_{(s)}\leq 1$ и модели деградации свойств материала $\left\{E_{\Omega,(s)}\right\}$. Результаты первых трех приближений $\left(S=0\to 2\right)$ приводим в таблице 1.

Таблица 1

Результаты первых трех приближений

| $s$ | $u_{(s)}$ | $\Omega_{(s)}$ | $E_{\Omega,(s)}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{P}{E_0F_0}x$ | $\left[\frac{k_EE_o}{2k_\Omega n}\left(\frac{P}{E_0F_0}\right)^2\right]^{1/n-1}$ | $\left[1-k_E\Omega_{(0)}\right]E_o$ |
| 1 | $\frac{P}{\left[E_oF_o\left(1-k_E\,\Omega_{(0)}\right)\right]}x$ | $\left[\frac{k_EE_o}{2k_\Omega n}\left(\frac{P}{E_oF_o\left(1-k_E\,\Omega_{(0)}\right)}\right)^2\right]^{1/n-1}$ | $\left[1-k_E\Omega_{(1)}\right]E_o$ |
| 2 | $\frac{P}{\left[E_oF_o\left(1-k_E\,\Omega_{(1)}\right)\right]}x$ | $\left[\frac{k_EE_o}{2k_\Omega n}\left(\frac{P}{E_oF_o\left(1-k_E\,\Omega_{(1)}\right)}\right)^2\right]^{1/n-1}$ | $\left[1-k_E\Omega_{(2)}\right]E_o$ |

Параметр в общем случае зависит от условий нагружения, граничных условий, микропараметров поврежденности, в качестве которых могут быть характеристики полей дефектов. В связи с этим на каждом шаге итерационного процесса происходит изменение модулей упругости вследствие роста поврежденности, итерационно уточняемое до достижения сходимости решения.

Отметим, что параметрами модели $k_E, k_\Omega, n$ являются величины, где: параметр $n$ определяет нелинейность зависимости энергии повреждения от

параметра повреждённости $\Omega$. В дальнейшем полагаем что $n=2$. коэффициент $k_E$ в модели деградации (3) Определяет изменение модуля Юнга при накоплении повреждений, Обычно для материалов принимают, что $k_E$ лежит в диапазоне $k_E = 1 - \frac{E_\Omega}{E_0}. \square\ 0.2 \to 0.4$ так что остаточная жёсткость (модуль упругости) составляет 60–80% жёсткости неповрежденного материала. В данной работе принято $k_E = 0.33$, коэффициент повреждения $k_\Omega$ является весовым множителем — феноменологической константой модели, которая может быть определена экспериментально. В случае одномерной задачи этот параметр может быть приближённо оценён на основе анализа энергетического баланса процесса разрушения, следующим образом:

$$k_\Omega n\ \Omega^{n-1} = \frac{1}{2} k_E E_o \left(\varepsilon_u\right)^2 \Rightarrow k_\Omega n\ \Omega^{n-1} = k_E W_u \overset{при\ \Omega=1 u\ n=2}{\Rightarrow} k_\Omega \approx \frac{k_E W_u}{2} \quad (15)$$

где $\varepsilon_u, \sigma_u$ деформация и напряжение при разрушении для неповреждённого материала и $\varepsilon_u = \frac{\sigma_u}{E_0}$, $W_u$ используется как референсная энергия неповреждённого материала.

В повреждённой модели критическое состояние $\Omega_c = 1$ может достигаться при напряжениях ниже $\sigma_u$, поскольку накопление повреждённости снижает эффективный модуль и увеличивает деформационную энергию.

## Анализ результатов численного моделирования

На примере одномерной задачи о квазистатическом растяжении консольного стержня представлены результаты верификации разработанной математической модели и алгоритма (рисунок 2).

В таблице 2 представлены характеристики стержня и параметры модели, использованные в численном моделировании.

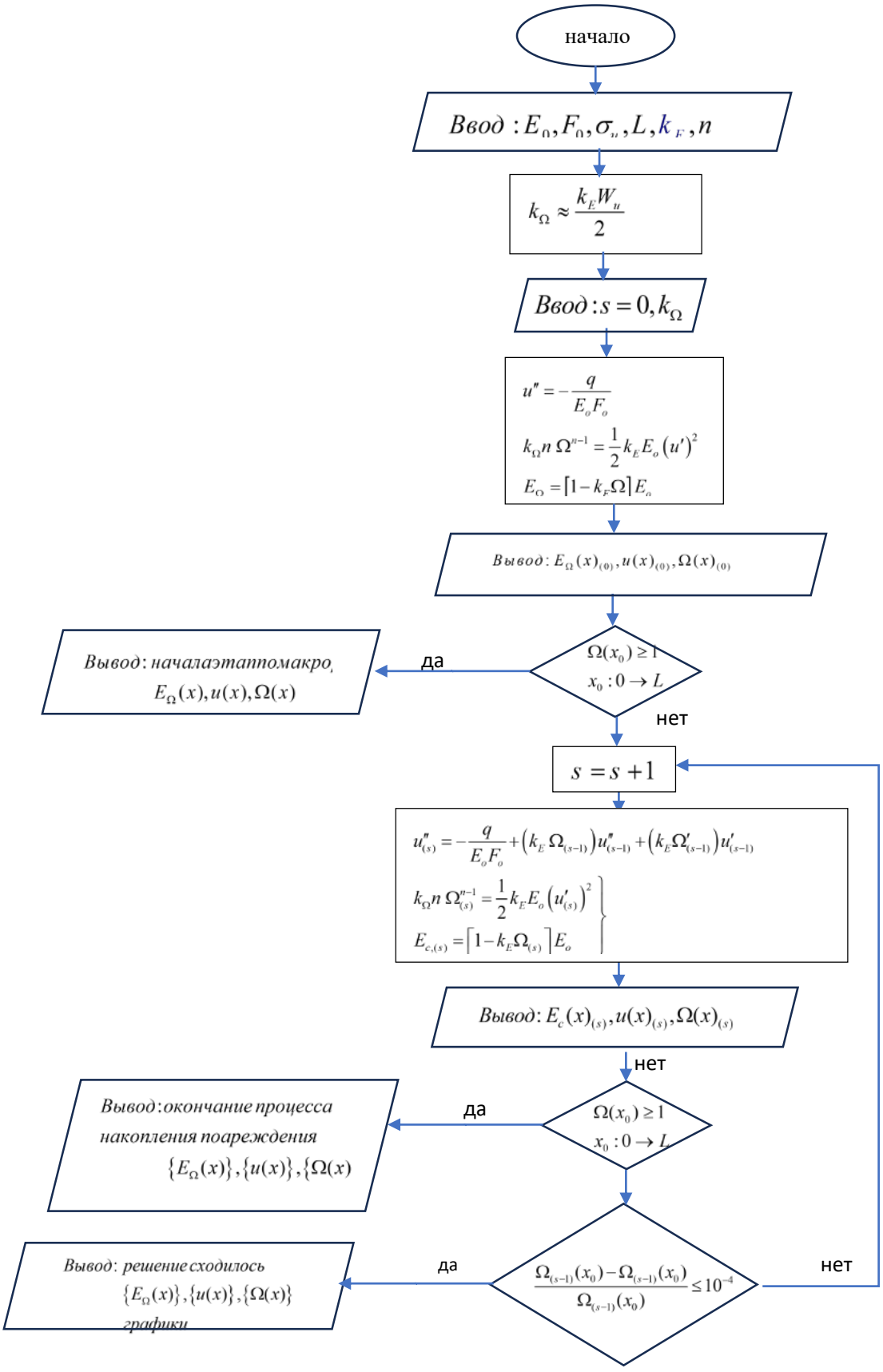



Рисунок 2 – Алгоритм решения

Таблица 2

Характеристики стержня и параметры модели

| Параметр | Обозначение | Значение | Единица измерения |
|---|---|---|---|
| Модуль Юнга | $E_o$ | 72 | ГПа |
| Площадь сечения | $F_0$ | $2\times10^{-5}$ | м$^2$ |
| Длина стержня | L | 1 | м |
| Параметры модели | $k_E$ | 0,33 | - |
| | $k_\Omega$ | 0,5 | МПа |
| | $n$ | 2 | - |
| Критическая поврежденность | $\Omega_c$ | 1 | - |
| Критерий сходимости | - | $1\times10^{-4}$ | - |

Рассмотрены два типа нагружения (рисунок 1): сосредоточенная сила $P_0$, приложенная на свободном конце, и распределенная нагрузка, описываемая степенным законом $q(x) = q_0(L-x)^\alpha$ при различных значениях показателя $\alpha = [0, 0.5, 1, 2]$. Выбор данных значений $\alpha$ обеспечивает максимальную интенсивность распределенной нагрузки в области заделки ($x = 0$)

Для обеспечения корректного сравнительного анализа различных типов нагружения был применен подход нормирования, основанный на условии эквивалентности общей приложенной силы. Все распределенные нагрузки были нормированы таким образом, чтобы суммарная сила, действующая на стержень, соответствовала величине сосредоточенной силы $P_{экв.} = P_0$:

$$\int_0^L q(x)dx = P_0 \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{P_0}{\int_0^L (L-x)^\alpha dx} = \frac{P_0(\alpha+1)}{L^{\alpha+1}} \tag{16}$$

Такой подход обеспечивает физически обоснованное сравнение различных типов нагружения при одинаковой общей нагрузке на конструкцию. Численное моделирование проведено при базовом значении сосредоточенной силы $P_0 = 7000$ Н, с соответствующими нормированными значениями $q_0$ для каждого показателя $\alpha$ (17). Данная величина соответствует докритическому уровню нагружения, при котором максимальное значение параметра поврежденности $\Omega_{max}$ не превышает 1, что позволяет исследовать процесс накопления повреждений в области, предшествующей макроскопическому разрушению материала.

Анализ результатов выявляет фундаментальные различия в характере деградации материала в зависимости от типа нагружения. Важным аспектом реализации модели является сходимость итерационного процесса к установившимся значениям. При заданном уровне нагружения решение последовательно сходится к определенным равновесным значениям параметра поврежденности $\Omega$, что демонстрирует физическую устойчивость модели. Как показано на рисунке 3 для случая сосредоточенной силы, итерационный процесс демонстрирует монотонную сходимость, достигая заданной точности за 8 итераций. Аналогичная картина наблюдается и для распределенных нагрузок, что подтверждает корректность вычислительного алгоритма.

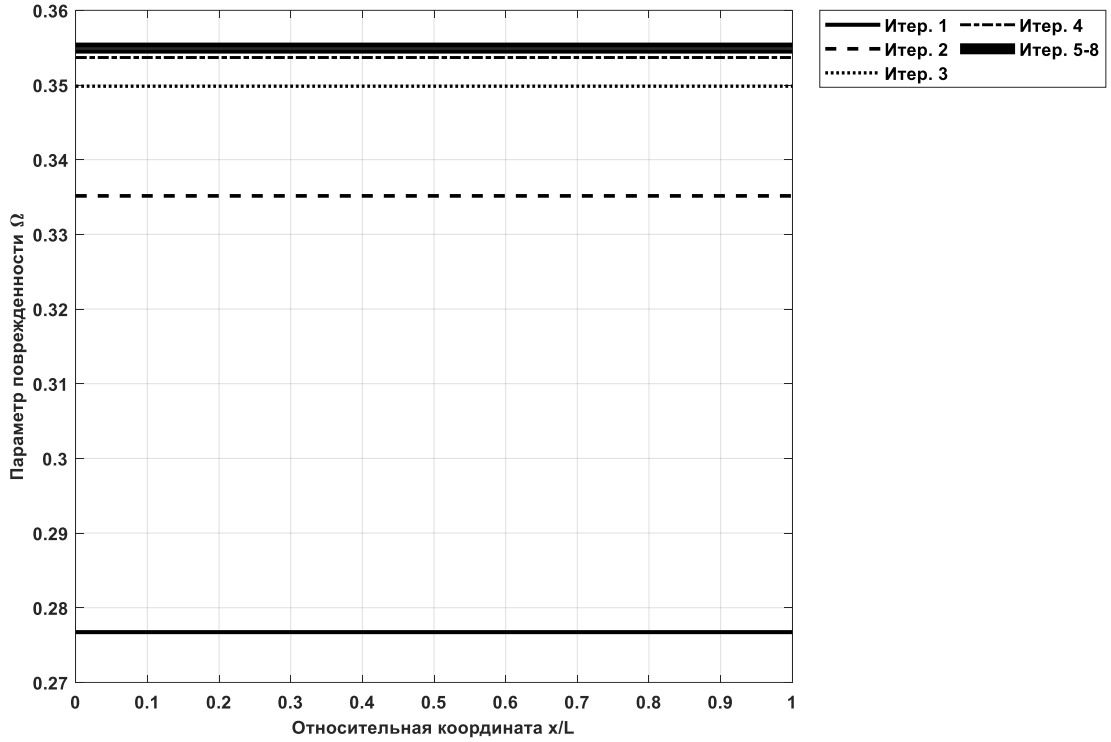



Рисунок 3 – Сходимость итерационного процесса при сосредоточенной нагрузке P

Сравнительный анализ полученных полей механических характеристик (рисунки 4–7) позволяет выявить их тесную взаимосвязь, предсказанную математической моделью (14).

Наблюдаемое распределение параметра поврежденности $\Omega(x)$ находится в прямой корреляции с полем напряжений $\sigma(x)$, что является прямым следствием принятого в модели определяющего закона эволюции поврежденности.

Согласно модели, скорость роста поврежденности определяется уровнем деформации, которая, в условиях данного типа нагружения, пропорциональна

напряжению. Это объясняет схожий характер эпюр $\Omega(x)$ и $\sigma(x)$, при котором максимальные значения обоих параметров сосредоточены в заделке, а их распределение вдоль стержня качественно повторяет друг друга (рисунки 5 и 6).

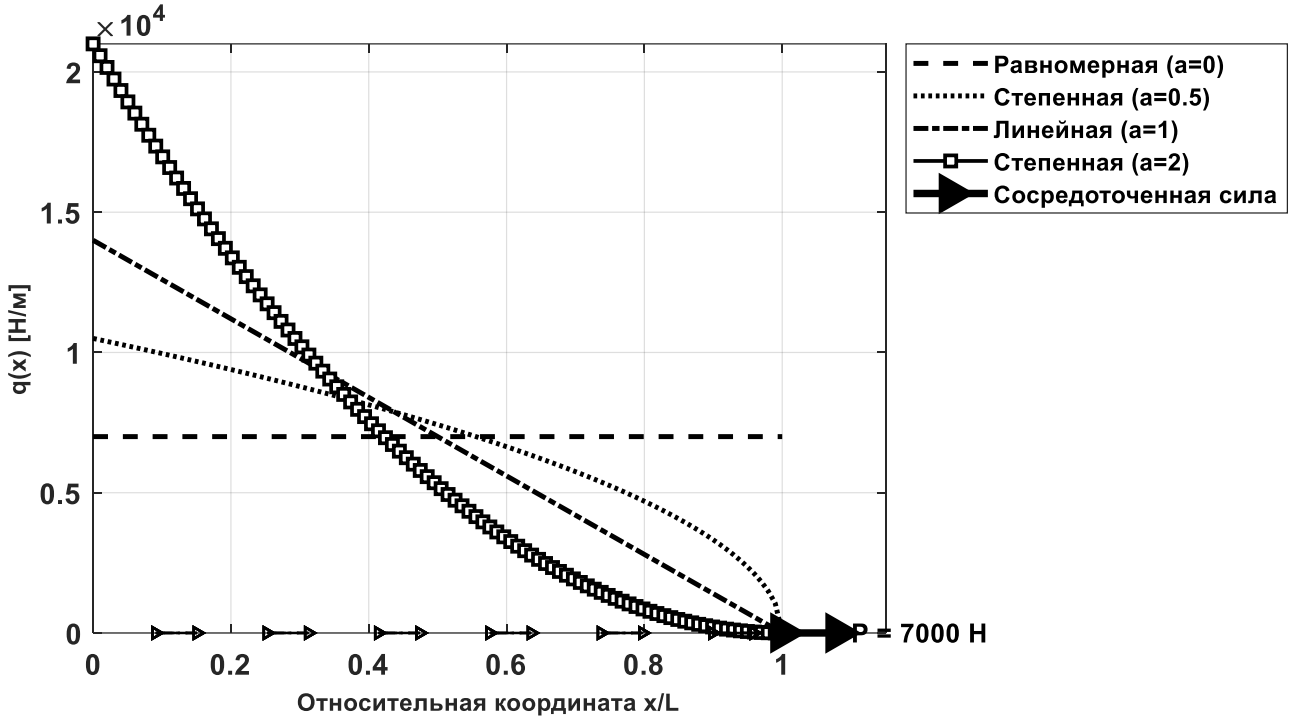



Рисунок 4– распределение нагрузки q(x) вдоль стержня

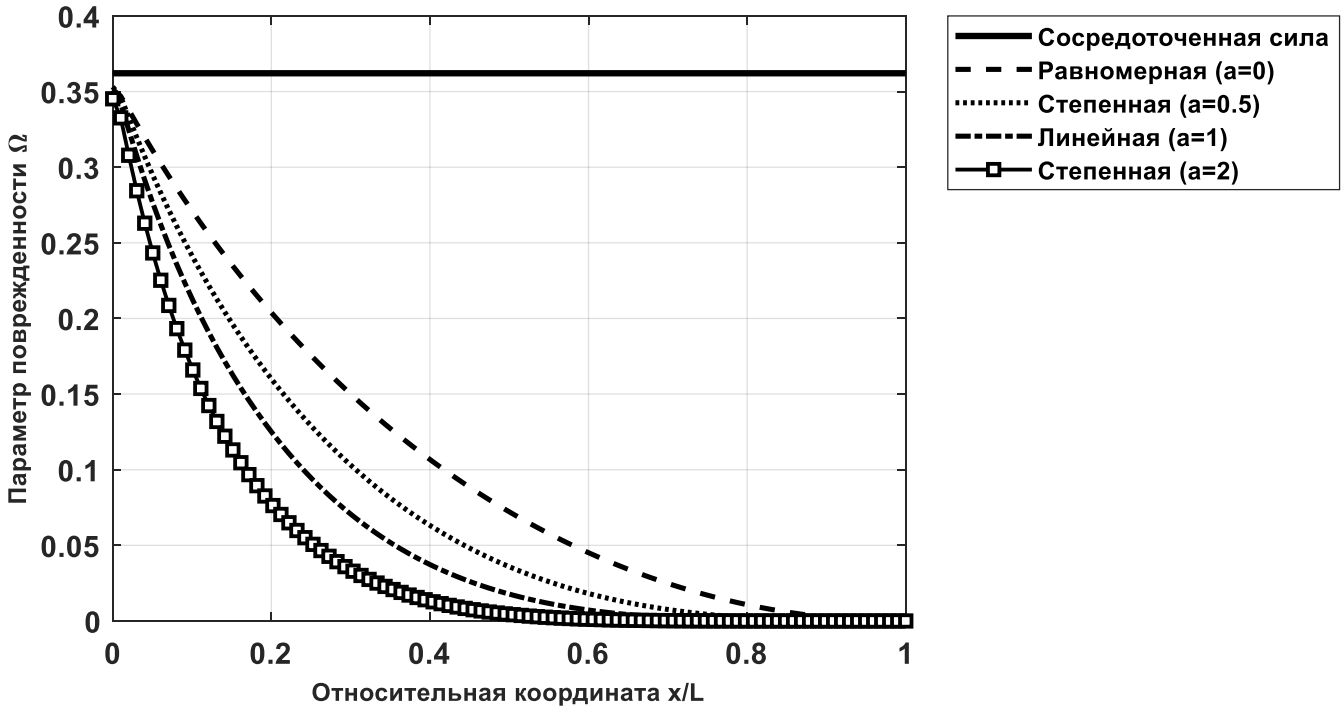



Рисунок 5 – Распределение параметра поврежденности Ω(x) вдоль стержня для различных типов нагружения

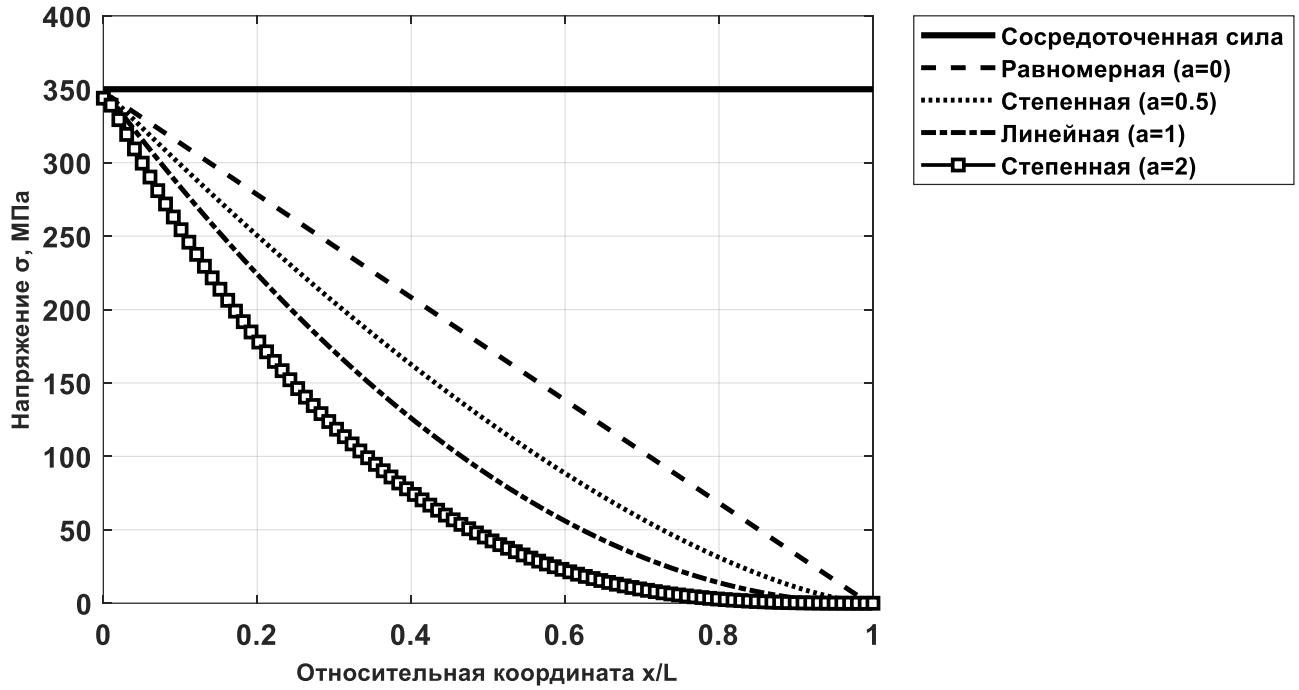



Рисунок 6 – Эпюры напряжений σ(x) вдоль стержня для различных типов нагружения

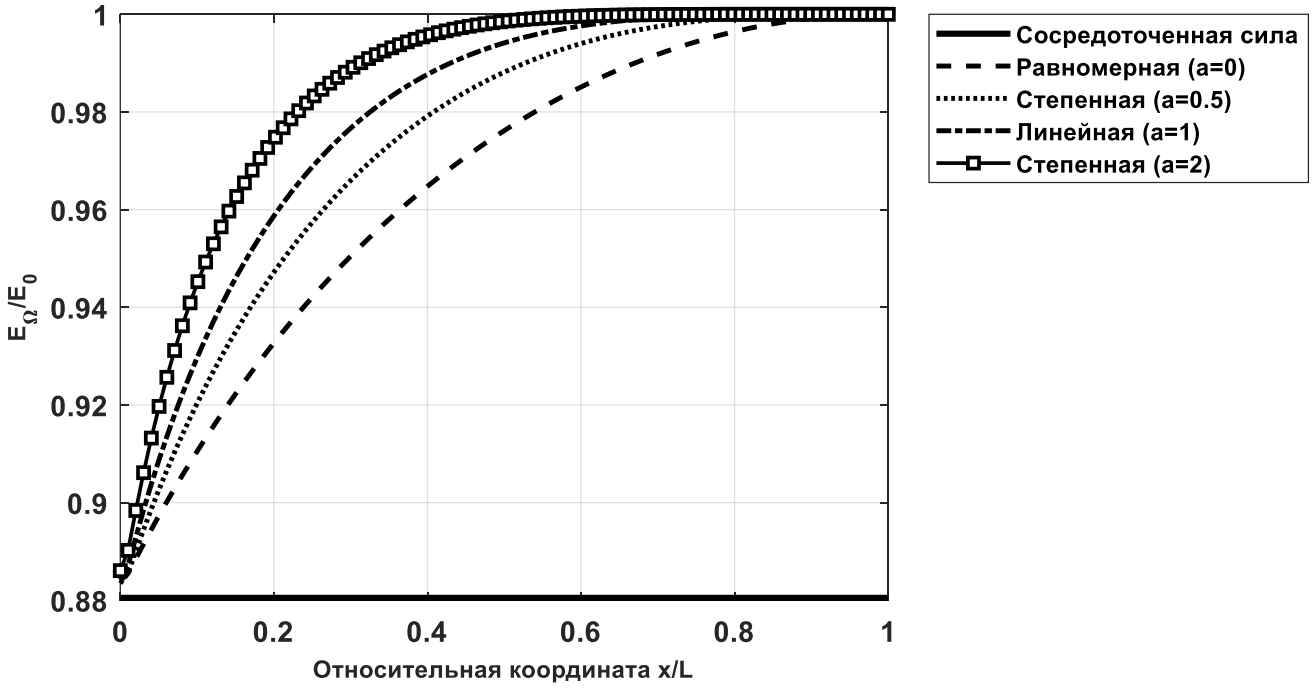



Рисунок 7 – Эффективный модуль упругости $E_\Omega / E_0$ вдоль стержня для различных типов нагружения

При действии сосредоточенной силы P наблюдается равномерное распределение параметра поврежденности $\Omega(x)$ по длине стержня (рисунок 5), что согласуется с классическим решением задачи о растяжении. Напротив, для всех видов распределенной нагрузки характерна выраженная локализация поврежденности в окрестности заделки (x=0).

Наиболее значимым результатом является инвариантность максимального значения параметра повреждённости $\Omega_{max}$ в заделке относительно закона распределения нагрузки (рисунок 5). Данный факт находит прямое объяснение в структуре математической модели (14): поскольку пиковая повреждённость определяется уровнем деформации, который, в свою очередь, линейно связан с напряжением, ее величина в наиболее нагруженном сечении (x=0) зависит в первую очередь от величины результирующей силы, а не от деталей ее распределения вдоль оси стержня.

Эта же связь проявляется в распределении эффективного модуля упругости $E_\Omega(x)$ (рисунок 7), который, согласно (13), линейно убывает с ростом повреждённости. Таким образом, картина деградации модуля $E_\Omega(x)$ представляет собой зеркальное отражение картины накопления повреждённости $\Omega(x)$, что выражается в наиболее значительном снижении жесткости в окрестности заделки — области достижения максимума параметра $\Omega$.

## Заключение

На основе вариационного принципа Лагранжа авторами разработана и верифицирована модель накопления повреждений, в которой параметр повреждённости включён в выражение для плотности потенциальной энергии. Для решения полученной нелинейной задачи предложен эффективный итерационный алгоритм, успешно моделирующий процесс деградации материала.

Ключевой результат получен при моделировании растяжения стержня: установлено решающее влияние типа нагружения на развитие повреждённости. Показано, что при одинаковой общей нагрузке распределённое нагружение приводит к стабилизации максимальной повреждённости в зоне заделки — её величина достигает инвариантного (не зависящего от деталей распределения) значения. В то время как при сосредоточенной нагрузке картина повреждённости носит неустойчивый, локально-концентрированный характер.

Этот вывод имеет прямое практическое значение для авиационных конструкций. Он объясняет, почему при одном и том же уровне нагрузок

элементы, работающие на распределённое давление (например, обшивка), демонстрируют более предсказуемую усталостную долговечность по сравнению с узлами, испытывающими сосредоточенные воздействия. Таким образом, выявленная закономерность не только позволяет точнее прогнозировать критические зоны в силовых элементах, но и предлагает новый критерий для оценки ресурса — через анализ типа действующей нагрузки.

Полученные результаты открывают возможность для создания упрощённых инженерных методик, разделяющих расчёт на прочность по типам нагружения, что актуально как на этапе проектирования новых конструкций, так и при оценке остаточного ресурса в процессе эксплуатационного мониторинга.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

## Список источников

1. Дудченко А.А., Лурье С.А. Моделирование процессов роста поврежденности и деградации механических свойств слоистых композитов. – М.: МАИ, 2019. – 160 с.

2. Lurie S., Minhat M. Modeling of damage evaluation and failure of laminated composite materials across length scales. Cambridge, 2015. P. 143-196. URL: https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100137-0.00007-9

3. Soutis C., Beaumont P.W.R. (Eds.). Multi-scale modeling of composite material system — The art of predictive damage modeling. Woodhead Publishing Ltd, Cambridge, 2005.

4. Uhl K.M., Lucht B., Jeong H., Hsu D.K. Mechanical strength degradation of graphite fiber reinforced thermoset composites due to porosity. Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, 1988. P. 1075-1082.

5. Лурье С.А., Белов П.А., Ожерелков Д.А. Моделирование поврежденности механических свойств материалов в обобщенной градиентной теории упругости

// Материалы международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел (Москва, 20–21 января 2021 г.). Москва, 2021. С. 270-276.

6. Овчинский А.С. Процессы отказов и разрушения в композитных материалах. – М.: Наука, 1988. – 276 с.

7. Мовчан А.А. Микромеханический подход в задаче описания накопления анизотропного рассеянного урона // Механика твердого тела. 1990. № 3. С. 115-123.

8. Мовчан А.А. Проблемы прочности тонкостенных конструкций. М.: Изд-во МАИ, 1989. С. 20-24.

9. Doan Chuck Luat, Lurie S.A., Dudchenko A.A. Modeling of degradation of the composite properties on cracking and delamination when subjected to static and cyclic loading // Composites: Mechanics, Computations, Applications, An International Journal. 2010. Т. 1, № 1. P. 1-19.

10. Kashtalyan M., Soutis C. Analysis of composite laminates with intra - and interlaminar damage // Progress in Aerospace Sciences. 2005. Т. 41. P. 152-173.

11. Vasiliev V.V., Morozov E.V. Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Third Edition. Elsevier, 2013. 833 p.

12. Chang F.K., Chang K.Y. A progressive damage model for laminated composites containing stress concentrations // Journal of Composite Materials. 1987. Т. 21, № 9. P. 834-855.

13. Morozov E.V., Chen J.F., Shankar K. Computational modelling of progressive failure of composite materials and structures including plasticity effects // Proceedings of the XI International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications (COMPLAS 2011). Barcelona, Spain, 7–9 September 2011.

14. Pinho S.T. Modelling failure of laminated composites using physically-based failure models. PhD thesis. London, UK: Department of Aeronautics, Imperial College, 2005.

15. Van Der Meer F.P., Sluys L.J. Continuum models for the analysis of progressive failure in composite laminates // Journal of Composite Materials. 2009. Т. 43, № 20. P. 2131-2156.

16. Placidi L., Misra A., Barchiesi E. Simulation results for damage with evolving microstructure and growing strain gradient moduli // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2019. URL: https://doi.org/10.1007/s00161-018-0693-z

17. Misra A., Singh V. Micromechanical model for viscoelastic materials undergoing damage // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2013. T. 25, № 2-4. P. 343-358.

18. Placidi L. A variational approach for a nonlinear one-dimensional damage-elasto-plastic second-gradient continuum model // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2016. T. 28, № 1-2. P. 119-137.

19. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973. – 190 с.

20. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. – М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.

## References

1. Dudchenko A.A., Lurie S.A. Modeling of damage growth and degradation of mechanical properties of layered composites. Moscow: MAI, 2019. 160 p. (In Russian)

2. Lurie S., Minhat M. Modeling of damage evaluation and failure of laminated composite materials across length scales. Cambridge, 2015. Pp. 143-196. URL: https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100137-0.00007-9

3. Soutis C., Beaumont P.W.R. (Eds.). Multi-scale modeling of composite material systems: The art of predictive damage modeling. Woodhead Publishing Ltd, Cambridge, 2005.

4. Uhl K.M., Lucht B., Jeong H., Hsu D.K. Mechanical strength degradation of graphite fiber reinforced thermoset composites due to porosity. Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, 1988. Pp. 1075-1082.

5. Lurie S.A., Belov P.A., Ozherelkov D.A. Modeling of damage to mechanical properties of materials in generalized gradient elasticity theory. In: Proceedings of the International Scientific Symposium on Problems of Mechanics of Deformable Bodies (Moscow, January 20-21, 2021). Moscow, 2021. Pp. 270-276. (In Russian)

6. Ovchinsky A.S. Failure and fracture processes in composite materials. Moscow: Nauka, 1988. 276 p. (In Russian)

7. Movchan A.A. Micromechanical approach in the problem of describing the accumulation of anisotropic scattered damage. Mechanics of Solids, 1990, no. 3, pp. 115-123. (In Russian)

8. Movchan A.A. Problems of strength of thin-walled structures. Moscow: MAI Publ., 1989. Pp. 20-24. (In Russian)

9. Doan Chuck Luat, Lurie S.A., Dudchenko A.A. Modeling of degradation of the composite properties on cracking and delamination when subjected to static and cyclic loading. Composites: Mechanics, Computations, Applications, An International Journal, 2010, vol. 1, no. 1, pp. 1-19.

10. Kashtalyan M., Soutis C. Analysis of composite laminates with intra- and interlaminar damage. Progress in Aerospace Sciences, 2005, vol. 41, pp. 152-173.

11. Vasiliev V.V., Morozov E.V. Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. 3rd ed. Elsevier, 2013. 833 p.

12. Chang F.K., Chang K.Y. A progressive damage model for laminated composites containing stress concentrations. Journal of Composite Materials, 1987, vol. 21, no. 9, pp. 834-855.

13. Morozov E.V., Chen J.F., Shankar K. Computational modelling of progressive failure of composite materials and structures including plasticity effects. In: Proceedings of the XI International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications (COMPLAS 2011). Barcelona, Spain, September 7-9, 2011.

14. Pinho S.T. Modelling failure of laminated composites using physically-based failure models. PhD thesis. London, UK: Department of Aeronautics, Imperial College, 2005.

15. Van Der Meer F.P., Sluys L.J. Continuum models for the analysis of progressive failure in composite laminates. Journal of Composite Materials, 2009, vol. 43, no. 20, pp. 2131-2156.

16. Placidi L., Misra A., Barchiesi E. Simulation results for damage with evolving microstructure and growing strain gradient moduli. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2019. URL: https://doi.org/10.1007/s00161-018-0693-z

17. Misra A., Singh V. Micromechanical model for viscoelastic materials undergoing damage. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2013, vol. 25, no. 2-4, pp. 343-358.

18. Placidi L. A variational approach for a nonlinear one-dimensional damage-elasto-plastic second-gradient continuum model. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2016, vol. 28, no. 1-2, pp. 119-137.

19. Krasnov M.L., Makarenko G.I., Kiselev A.I. Calculus of variations. Moscow: Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, Nauka Publ., 1973. 190 p. (In Russian)

20. Petrov V.V. Nonlinear incremental structural mechanics. Moscow: Infra-Engineering, 2014. 480 p. (In Russian)

## Информация об авторах

**Манун Мохсен,** аспирант, ассистент кафедры 903 «Перспективные материалы и технологии аэрокосмического назначения», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: m.manoun93@gmail.com

**Лев Наумович Рабинский,** д-р физ.-мат. наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5845-402X; ScopusID: 56803854600; e-mail: rabinskiy@mail.ru

**Ольга Владимировна Егорова,** кандидат физико-математических наук, доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: janus_olga@mail.ru

## Information about the authors

**Manoun Mohsen,** Postgraduate Student and Assistant, Department 903 «Advanced Materials and Technologies for Aerospace Applications», Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia; e-mail: m.manoun93@gmail.com

**Lev N. Rabinskiy,** Dr. Sci., professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5845-402X; ScopusID: 56803854600; e-mail: rabinskiy@mail.ru

**Olga V. Egorova,** Candidate Physical And Mathematical Sciences, Associate Professor , Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia; e-mail: janus_olga@mail.ru

Получено 08 июня 2026 ● Принято к публикации 20 августа 2026 ● Опубликовано 28 октября 2026
Received 08 June 2026 ● Accepted 20 August 2026 ● Published 28 October 2026