УДК 539.3

Нестационарное движение нормальной сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости

Оконечников А.С.*, Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.*****

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: leon_lionheart@mail.ru*

***e-mail: tdvhome@mail.ru*

****e-mail: greghome@mail.ru*

Аннотация

В нестационарной постановке исследуется плоская задача о воздействии сосредоточенной нагрузки, движущейся по поверхности однородного изотропного упругого полупространства. С использованием принципа суперпозиции получено решение в квадратурах. В частном случае равномерного движения проведен расчет и представлены графические результаты для нормальных перемещений поверхности полупространства. Проведен анализ особенностей решения на характерных скоростных этапах движения нагрузки: дорелеевском, дозвуковом, трансзвуковом и сверхзвуковом.

Ключевые слова: подвижная нагрузка, нестационарная задача, принцип суперпозиции, сингулярные интегралы, регуляризация, особенности решений.

Введение

При проектировании современной аэрокосмической техники необходимо учитывать нестационарный характер локальных нагрузок, воздействующих на ее элементы. Такие задачи возникают, например, при контакте корпусов летательных аппаратов с мелкими частицами, которые могут содержаться в окружающей атмосфере или космическом пространстве. Кроме того, в подобных задачах зачастую приходиться иметь дело с нагрузками, точка приложения которых движется по поверхности конструкции по определённому закону. Также актуальной проблемой является создание высокоскоростных средств передвижения, для которых исследование указанных проблем также может найти применение. В общей постановке построение решений подобных задач является чрезвычайно сложной проблемой. В данной работе рассмотрена модельная задача о воздействии подвижной сосредоточенной нагрузки на упругое однородное изотропное полупространство. Предложен и реализован метод, позволяющий получить решение в замкнутой форме, а также выявить все возможные особенности решения на различных скоростных режимах движения.

1.Постановка задачи

В начальный момент времени по нормали к границе $z=0$ невозмущенного упругого однородного изотропного полупространства прикладывается нормальная сосредоточенная нагрузка $q=H\left(t\right)\delta\left[x-f(t)\right]$, где функция времени $f(t)$ описывает закон ее движения со скоростью $V\left(t\right)=df/dt$, $H(t)$ - функция Хевисайда, а $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака. Используется прямоугольная декартова система координат Oxz, ось Ox которой направлена вдоль свободной границы полупространства, а ось

Oz - в глубь полупространства. Предполагается, что компоненты напряженно-деформированного состояния и перемещений не изменяются в направлении оси Oy.

Движение среды описывается уравнениями Ламе [1]

$$(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}=\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}=\left(u,w\right)^T$ - вектор перемещений (u и w - перемещения вдоль осей Ox и Oz соответственно), λ, μ и ρ - параметры Ламе и плотность среды.

Ненулевые компоненты ε_{ij} тензора деформаций связаны с перемещениями соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\ \varepsilon_{33}=\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1.2}$$

Ненулевые компоненты σ_{ij} тензора напряжений определяются законом Гука:

$$\sigma_{11}=2\mu\varepsilon_{11}+\lambda\theta,\ \sigma_{13}=2\mu\varepsilon_{13},\ \sigma_{33}=2\mu\varepsilon_{33}+\lambda\theta,\ \theta=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33}. \tag{1.3}$$

Касательные напряжения на границе полуплоскости $z=0$ отсутствуют, перемещения предполагаются ограниченными на бесконечности, что приводит к следующим граничным условиям:

$$\begin{gathered}\sigma_{13}\big|_{z=0}=0,\ \sigma_{33}\big|_{z=0}=-H\left(t\right)\delta\left[x-f(t)\right],\\ u=O\left(1\right),\ w=O\left(1\right),\ \text{при}\ r\to\infty,\ r=\sqrt{x^2+z^2}.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Начальные условия нулевые:

$$u\big|_{t=0}=w\big|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0.$$

Вектор перемещений удобно представить в виде суммы потенциальной и соленоидальной составляющих:

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\varphi + \mathrm{rot}\boldsymbol{\psi}, \tag{1.5}$$

где φ - скалярный, а $\boldsymbol{\psi}$ - векторный потенциалы упругих смещений.

Подстановка (1.5) в (1.1) приводит к двум волновым уравнениям относительно скалярного φ и ненулевой компоненты ψ векторного потенциала упругих смещений:

$$c_1^2\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\ c_2^2\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},\ c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},\ c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Здесь c_1 и c_2 скорости волн растяжения-сжатия и сдвига, a -ускорение движения нагрузки.

Будем использовать систему безразмерных величин (штрихи обозначают безразмерные параметры, которые далее опущены).

$$x' = \frac{x}{L},\ z' = \frac{z}{L},\ \tau = \frac{c_1 t}{L},\ u' = \frac{u}{L},\ w' = \frac{w}{L},\ \varphi' = \frac{\varphi}{L^2},$$
$$\psi' = \frac{\psi}{L^2},\ f' = \frac{f}{L}, \eta = \frac{c_1}{c_2},\ V' = \frac{V}{c_1},\ \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2\mu},$$

где L - характерный линейный размер.

Постановка задачи в безразмерном виде включает в себя следующие соотношения (здесь и далее производные по безразмерному времени обозначены точками):

- уравнения движения

$$\Delta\varphi = \ddot{\varphi},\ \Delta\psi = \eta^2\ddot{\psi}; \tag{1.6}$$

- вытекающую из (1.2), (1.3) и (1.6) связь компонент перемещений, напряжений и деформаций с потенциалами:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial z},\ w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial x},\ \varepsilon_{11}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z},\ \varepsilon_{33}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z},$$

$$\varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right),\ \sigma_{11}=\Delta\varphi-2\eta^{-2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right), \tag{1.7}$$

$$\sigma_{13}=\sigma_{31}=\eta^{-2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right),\ \sigma_{33}=\Delta\varphi-2\eta^{-2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right);$$

- начальные условия:

$$\varphi\big|_{\tau=0}=\dot{\varphi}\big|_{\tau=0}=0,\ \ \psi\big|_{\tau=0}=\dot{\psi}\big|_{\tau=0}=0. \tag{1.8}$$

- а также граничные условия (1.4), в которых t нужно заменить безразмерным временем τ.

2.Метод решения

Используем принцип суперпозиции [2], согласно которому нормальные перемещения границы полуплоскости связаны с поверхностными напряжениями интегральным соотношением типа свертки:

$$w_0\left(x,\tau\right)=-\int_0^{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}G_f\left(x-\xi,\tau-t\right)\sigma\left(\xi,t\right)d\xi dt. \tag{2.1}$$

Здесь $w_0\left(x,\tau\right)=w\left(x,0,\tau\right)$, $\sigma\left(x,\tau\right)=\sigma_{33}\left(x,0,\tau\right)$, а ядро $G_f\left(x,\tau\right)$ является поверхностной функцией влияния для упругой однородной изотропной полуплоскости и представляет собой нормальные перемещения границы полуплоскости как решение задачи (1.6) - (1.8) со следующими граничными условиями:

$$\sigma_{13}\big|_{z=0}=0,\ \sigma_{33}\big|_{z=0}=\delta\left(x\right)\delta\left(\tau\right),$$
$$\varphi=O\left(1\right),\ \psi=O\left(1\right),\ \text{при } r\to\infty.$$

Эта функция найдена в [3] и имеет вид:

$$G_f(x,\tau)=\sum_{l=1}^{2}G_{fl}(x,\tau)H\left(\tau-\eta_l|x|\right),$$

$$G_{f1}(x,\tau)=\frac{1}{\pi\eta^4}g_1\left(x^2,\tau^2\right)k_1\left(x^2,\tau^2\right),\, G_{f2}(x,\tau)=\frac{1}{\pi\eta^4}g_2\left(x^2,\tau^2\right)k_2\left(x^2,\tau^2\right),$$

$$g_1(x,\tau)=\frac{\tilde{g}_1(x,\tau)}{P_3(x,\tau)},\ g_2(x,\tau)=\frac{\tilde{g}_2(x,\tau)}{P_3(x,\tau)},$$

$$\tilde{g}_1(x,\tau)=\left(\eta^2x-2\tau\right)^2,\ \tilde{g}_2(x,\tau)=4\tau(\tau-x),$$

$$k_1(x,\tau)=\sqrt{\tau-x},\ k_2(x,\tau)=\sqrt{\tau-\eta^2x},$$

$$P_3(x,\tau)=P_1(x,\tau)P_2(x,\tau),\ P_1(x,\tau)=x-c_R^2\tau,\ P_2(x,\tau)=x^2-2\alpha^2x\tau+\beta^2\tau^2,$$

$$\alpha^2=\frac{4}{\eta^2}-\frac{c_R^2}{2},\ \beta^2=\frac{16\left(\eta^2-1\right)}{\eta^8c_R^2},\ \eta_1=1,\ \eta_2=\eta.$$

Отметим, что многочлен $P_2(z,1)$ не имеет действительных корней, т.к. $\alpha^4-\beta^2<0$ [4,5].

Функции $g_l(x,\tau)$ $(l=1,2)$ представим в виде суммы регулярного $g_{lr}(x,\tau)$ и сингулярного $g_{ls}(x,\tau)$ слагаемых:

$$g_l(x,\tau)=g_{ls}(x,\tau)+g_{lr}(x,\tau),$$

$$g_{ls}(x,\tau)=\frac{A_l}{P_1(x,\tau)},\ g_{lr}(x,\tau)=\frac{B_lx+C_l\tau}{P_2(x,\tau)},$$

$$A_l=\frac{\tilde{g}_l\left(c_R^2,1\right)}{P_2\left(c_R^2,1\right)},\ B_1=\eta^4-A_1,\ B_2=-A_2,\ C_l=\frac{A_l\beta^2-4}{c_R^2}.$$

Тогда функции G_{fl} записываются так:

$$G_{fl}(x,\tau)=G_{sl}(x,\tau)+G_{rl}(x,\tau),$$
$$G_{sl}(x,\tau)=\frac{1}{\pi\eta^4}g_{sl}(x^2,\tau^2)k_l(x^2,\tau^2), \tag{2.2}$$
$$G_{rl}(x,\tau)=\frac{1}{\pi\eta^4}g_{rl}(x^2,\tau^2)k_l(x^2,\tau^2).$$

С учетом граничных условий (1.4) и свойств дельта-функции [1] представление (2.1) принимает вид:

$$w_0(x,\tau)=-\sum_{l=1}^{2}w_l(x,\tau). \tag{2.3}$$

$$w_l(x,\tau)=\int_0^\tau G_{fl}\left[x-f(t),\tau-t\right]H\left(\tau-t-\eta_l\left|x-f(t)\right|\right)dt$$

В соответствии со структурой (2.2) функции G_{fl} для дальнейшего исследования нам понадобятся значения интеграла вида

$$I(a)=\int_{y_1}^{y_2}\frac{\sqrt{1-y^2}}{y-a}dy,\quad y_1,y_2\in[-1,1]. \tag{2.4}$$

При этом параметр a может быть как действительным $a\in R$, так и комплексным $a\in C$. В случае $a\in R$ возможны варианты: $a\notin[y_1,y_2]$, $a\in(y_1,y_2)$. В последнем случае интеграл (2.4) – сингулярный и понимается в смысле главного значения по Коши.

3. Свойства интеграла $I(a)$

При $a\in R$, $a\notin[y_1,y_2]$ его подынтегральная является непрерывной действительной, следовательно, для (2.4) применима формула Ньютона-Лейбница:

$$I(a) = J(y_2;a) - J(y_1;a), \tag{3.1}$$

где

$$J(y;a) = \begin{cases} \sqrt{1-y^2} + a\arcsin(y) + \sqrt{1-a^2}\ln\left|F_1(a,y)\right| & \text{при } a<1; \\ \sqrt{1-y^2} + a\arcsin(y) + 2\sqrt{a^2-1}\operatorname{arctg}\left(F_2(a,y)\right) & \text{при } a>1; \\ F_3(a,y) - 2\operatorname{arctg}\left(F_3(a,y)\right) & \text{при } a=1. \end{cases}$$

$$F_1(a,y) = \frac{\sqrt{1-a}\sqrt{1+y} - \sqrt{1+a}\sqrt{1-y}}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+y} + \sqrt{1+a}\sqrt{1-y}}, F_2(a,y) = \frac{\sqrt{a-1}\sqrt{1+y}}{\sqrt{a+1}\sqrt{1-y}}, F_3(a,y) = \frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1-y}}$$

При $a \in C$ имеет место равенство:

$$I(a) = J_c(y_2,a) - J_c(y_1,a), \tag{3.2}$$

где

$$J_c(y;a) = \sqrt{1-y^2} + a\arcsin y + \sqrt{1-a^2}\ln\left(F_1(a,y)\right).$$

Здесь под $\ln z$ понимается главная ветвь комплексного логарифма.

При $a \in R$, $a \in (y_1, y_2)$ интеграл сингулярный.

Утверждение 1. Главное значение интеграла (2.4) определяется формулой (3.1).

Доказательство.

При $y_1 < a < y_2$

$$I(a) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{1-y^2}}{y-a}\,dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-a^2}}{y-a}\,dy + \sqrt{1-a^2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y-a} =$$

$$= \left[J(y;a) - \sqrt{1-a^2}\ln\left|y-a\right| \right]_{y_1}^{y_2} + \sqrt{1-a^2}\ln\frac{y_2-a}{a-y_1} = J(y_2;a) - J(y_1;a).$$

Что и требовалось доказать. ■

Отметим, что утверждение 1 дает основание проводить вычисление регулярных и сингулярных интегралов с помощью одних и тех же формул (3.1).

Утверждение 2. Пусть $a \in R$. Тогда при $a \to y_2 \pm 0$ интеграл (2.4) стремится к $+\infty$ по логарифмическому закону, а при $a \to y_1 \pm 0$ он стремится к $-\infty$ по логарифмическому закону.

Доказательство. Пусть $a = y_2 \pm \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, тогда учитывая утверждение 1 и используя формулы (3.1) получаем:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[J\left(y_2; y_2 \pm \varepsilon\right) - J\left(y_1; y_2 \pm \varepsilon\right)\right] = C_{21} + \frac{1}{\sqrt{1-y_2^2}} \lim_{\varepsilon \to 0} \ln\left[C_{22} f\left(\varepsilon, y_2\right)\right],$$

где

$$C_{21} = \sqrt{1-y_2^2} - \sqrt{1-y_1^2} + y_2\left(\arcsin y_2 - \arcsin y_1\right),$$
$$C_{22} = \frac{1}{2\sqrt{1-y_2^2}}\left|\frac{\sqrt{1-y_2}\sqrt{1+y_1} + \sqrt{1+y_2}\sqrt{1-y_1}}{\sqrt{1-y_2}\sqrt{1+y_1} - \sqrt{1+y_2}\sqrt{1-y_1}}\right|,$$
$$f\left(\varepsilon, y_2\right) = \left|\sqrt{1-\left(y_2 \pm \varepsilon\right)}\sqrt{1+y_2} - \sqrt{1+\left(y_2 \pm \varepsilon\right)}\sqrt{1-y_2}\right|.$$

Определяя асимптотически эквивалентную функцию для $f\left(\varepsilon, y_2\right)$

$$f\left(\varepsilon, y_2\right) \sim \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-y_2^2}} \ \left(\varepsilon \to 0\right),$$

получаем асимптотическое выражение для интеграла $I\left(a\right) \sim I_{\varepsilon 2}$ при $a \to y_2 \pm 0$:

$$I_{\varepsilon 2} = C_{21} + \frac{1}{\sqrt{1-y_2^2}} \ln\left(\frac{C_{22}}{\sqrt{1-y_2^2}}\varepsilon\right) \sim \frac{1}{\sqrt{1-y_2^2}} \ln \varepsilon \ \left(\varepsilon \to 0\right),$$

Аналогично получаем асимптотическое выражение для интеграла $I\left(a\right) \sim I_{\varepsilon 1}$ при $a \to y_1 \pm 0$:

$$I_{\varepsilon 1} = C_{11} - \frac{1}{\sqrt{1-y_1^2}} \ln\left(\frac{C_{12}}{\sqrt{1-y_1^2}} \varepsilon \right) \sim -\frac{1}{\sqrt{1-y_1^2}} \ln \varepsilon \ \left(\varepsilon \to 0\right).$$

где

$$C_{11} = \sqrt{1-y_2^2} - \sqrt{1-y_1^2} + y_1\left(\arcsin y_2 - \arcsin y_1\right),$$

$$C_{12} = \frac{1}{2\sqrt{1-y_1^2}} \left| \frac{\sqrt{1-y_1}\sqrt{1+y_2} + \sqrt{1+y_1}\sqrt{1-y_2}}{\sqrt{1-y_1}\sqrt{1+y_2} - \sqrt{1+y_1}\sqrt{1-y_2}} \right|. \blacksquare$$

4. Равномерный режим движения нагрузки

Полагаем $f\left(\tau\right) = V\tau$, где $V = \text{const}$. Тогда соотношение (2.3) преобразуется так:

$$w_l\left(x,\tau\right) = w_{sl}\left(x,\tau\right) + w_{rl}\left(x,\tau\right),$$
$$w_{sl}\left(x,\tau\right) = \int\limits_{\tau_{l1}}^{\tau_{l2}} G_{sl}\left(x - Vt, \tau - t\right) dt, w_{rl}\left(x,\tau\right) = \int\limits_{\tau_{l1}}^{\tau_{l2}} G_{rl}\left(x - Vt, \tau - t\right) dt. \tag{4.1}$$

Пределы интегрирования τ_1 и τ_2 в (4.1) определяются из решений системы неравенств:

$$0 < t < \tau, \ \ \tau - t - \eta_l \left| x - Vt \right| > 0 \tag{4.2}$$

при всех возможных значениях параметров τ, x, η_l, V.

Ее решение удобно получить графоаналитическим способом. При этом рассмотрим 3 характерных режима движения нагрузки: сверхзвуковой $V > 1$, трансзвуковой $1/\eta < V < 1$ и дозвуковой $V < 1/\eta$.

Графоаналитический способ решения продемонстрируем на примере сверхзвукового режима движения, рис. 1. Сплошные линии соответствуют прямым $\xi = \pm\dfrac{\tau - t}{\eta}$, штриховые - $\xi = \pm\left(\tau - t\right)$, а штрихпунктирная - $\xi = Vt - x$. Границы τ_{l1}, τ_{l2}

области решений неравенств (4.2) являются абсциссами точек пересечения прямой $\xi = Vt - x$ с границами областей

$$D_l = \left\{ (t,\xi) : 0 < t < \tau,\ -\frac{\tau - t}{\eta_l} < \xi < \frac{\tau - t}{\eta_l} \right\}, l = 1,2.$$

Эти области геометрически представляют собой треугольники с вершинами $(\tau,0)$, $(0,\pm\tau/\eta_l)$. Фиксируя определенное значение $V > 1$ и перемещая прямую $L:\ \xi = Vt - x$ в вертикальном направлении параллельно самой себе получаем 6 характерных случаев относительного расположения областей D_l и прямой L. На рис. 2 круглыми и квадратными маркерами обозначены точки пересечения прямой L с границами областей D_1 и D_2 соответственно. Абсциссы точек пересечения $t = t_{l1}, t_{l2}$ в случае неравенства их нулю определяются из следующих соотношений:

$$Vt - x = \pm\frac{\tau - t}{\eta_l},\ \ \tau > t_{l2} = \frac{\tau + \eta_l x}{V\eta_l + 1} > t_{l1} = \frac{\eta_l x - \tau}{V\eta_l - 1} > 0. \qquad (4.3)$$

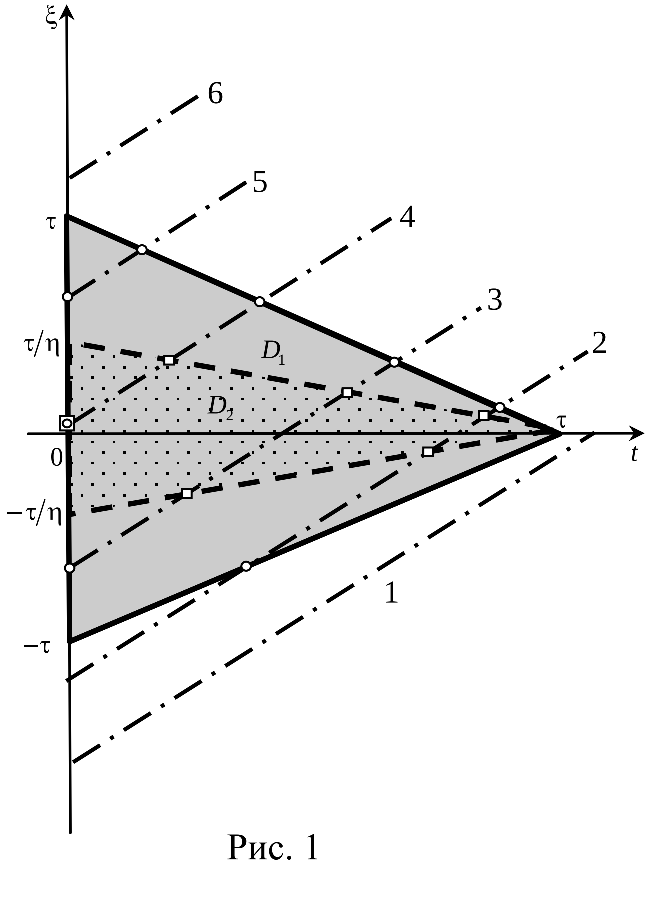

Рис. 1

Аналогично определяются все возможные случаи значения пределов в (4.1) при двух других характерных режимах движения нагрузки. В таблице 1. приведены значения τ_{l1} и τ_{l2} при всех возможных значениях параметров τ, x, η_l, V (знак $\varnothing$ означает пустое множество).

Таблица 1.

V	x	τ_{11}	τ_{12}	τ_{21}	τ_{22}
$V>1$	$x>V\tau$ или $x<-\tau$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
	$\tau<x<V\tau$	t_{11}	t_{12}	t_{21}	t_{22}
	$\tau/\eta<x<\tau$	0	t_{12}	t_{21}	t_{22}
	$\lvert x\rvert<\tau/\eta$	0	t_{12}	0	t_{22}
	$-\tau<x<-\tau/\eta$	0	t_{12}	$\varnothing$	$\varnothing$
$1/\eta<V<1$	$\lvert x\rvert>\tau$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
	$V\tau<x<\tau$	0	t_{11}	$\varnothing$	$\varnothing$
	$\tau/\eta<x<V\tau$	0	t_{12}	t_{21}	t_{22}
	$\lvert x\rvert<\tau/\eta$	0	t_{12}	0	t_{22}
	$-\tau<x<-\tau/\eta$	0	t_{12}	$\varnothing$	$\varnothing$
$V<1/\eta$	$\lvert x\rvert>\tau$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
	$\tau/\eta<x<\tau$	0	t_{11}	$\varnothing$	$\varnothing$
	$V\tau<x<\tau/\eta$	0	t_{11}	0	t_{21}
	$-\tau/\eta<x<V\tau$	0	t_{12}	0	t_{22}
	$-\tau<x<-\tau/\eta$	0	t_{12}	$\varnothing$	$\varnothing$

В случае, когда в таблице 1 значениям пределов интегрирования τ_{l1} и τ_{l2} соответствуют пустые множества, соответствующее слагаемое в (2.3) равно нулю.

В выражениях (4.1) сделаем замену переменной

$$z = \eta_l \frac{x - Vt}{\tau - t}. \tag{4.4}$$

Тогда приходим к следующим равенствам:

$$w_{sl}(x,\tau) = \frac{1}{\pi \eta_l^4} \sum_{j=1}^{3} A_{lj} I_{slj}(x,\tau), \tag{4.5}$$

$$I_{slj}(x,\tau) = \int_{z_{l1}}^{z_{l2}} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - a_{lj}} dz,\ a_{l1} = \eta_l V,\ a_{l2} = \eta_l c_R,\ a_{l3} = -\eta_l c_R,$$

$$A_{l1} = \frac{1}{V^2 - c_R^2},\ A_{l2} = \frac{1}{2c_R\left(c_R^2 - V^2\right)},\ A_{l3} = \frac{1}{2c_R\left(c_R^2 + V^2\right)}.$$

При этом все интегралы I_{slj} ($j = \overline{1,3}$) имеют конечные значения, определяемые формулой (3.1).

Регулярные интегралы в силу непрерывности подынтегральных функций являются непрерывными функциями двух переменных. С учетом замены переменной (4.4) они записываются так:

$$w_{rl}(x,\tau) = \frac{1}{\pi \eta_l^2} \int_{z_{l1}}^{z_{l2}} f_{rl}(z) \sqrt{1-z^2}\, dz,$$

$$f_{rl}(z) = \frac{1}{z - b_{l1}} \frac{B_l z^2 + \tilde{C}_l}{Q_{l2}(z) Q_{l2}(-z)},$$

где $b_{l1} = a_{l1} = \eta_l V$, $\tilde{C}_l = C_l \eta_l^2$, $Q_{l2}(z) = z^2 + \gamma_l z + \beta_l$, $\gamma_l = \eta_l \sqrt{2\left(\alpha^2 + \beta_l\right)}$, $\beta_l = \eta_l^2 \beta$, $\gamma_l^2 - 4\beta_l < 0$.

Далее представляем $Q_{l2}(z)$ и $Q_{l2}(-z)$ в виде

$$Q_{l2}(z) = (z - c_l)(z - \bar{c}_l),\ Q_{l2}(-z) = (z + c_l)(z + \bar{c}_l),$$
$$c_l = \frac{1}{2}\left(-\gamma_l + i\sqrt{4\beta_l - \gamma_l^2}\right)$$

Тогда приходим к следующим равенствам:

$$w_{rl}(x,\tau) = \frac{1}{\pi\eta_l^2}\sum_{j=1}^{5} B_{lj} I_{rlj}(x,\tau), \tag{4.6}$$

$$I_{rlj}(x,\tau) = \int_{z_{l1}}^{z_{l2}} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - b_{lj}} dz,$$
$$b_{l2} = c_l,\ b_{l3} = \bar{c}_l,\ b_{l4} = -c_l,\ b_{l5} = -\bar{c}_l,\ B_{lj} = \lim_{z \to b_{lj}} f_{rl}(b_{lj})(z - b_{lj}).$$

Таким образом, регулярное слагаемое также сводится к вычислению интегралов вида (2.4). При этом I_{rl1} имеет действительный параметр b_{l1} и совпадает с интегралом I_{sl1}. Для его вычисления используется формула (3.1). Остальные интегралы имеют комплексные параметры b_{lj}, $j = \overline{2,5}$ и вычисляются по формуле (3.2).

Пределы интегрирования в (4.5) и (4.6) определяются с учетом (4.4), (4.3) и таблицы 1. Значения пределов при всех скоростных режимах приведены в таблице 2.

Таблица 2.

V	x	z_{11}	z_{12}	z_{21}	z_{22}
$V>1$	$x > V\tau$ или $x < -\tau$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
	$\tau < x < V\tau$	1	–1	1	–1
	$\tau/\eta < x < \tau$	x/τ	–1	1	–1
	$\lvert x\rvert < \tau/\eta$	x/τ	–1	$\eta x/\tau$	–1
	$-\tau < x < -\tau/\eta$	x/τ	–1	$\varnothing$	$\varnothing$

	$\lvert x\rvert > \tau$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
	$V\tau < x < \tau$	x/τ	1	$\varnothing$	$\varnothing$
$1/\eta < V < 1$	$\tau/\eta < x < V\tau$	x/τ	-1	1	-1
	$\lvert x\rvert < \tau/\eta$	x/τ	-1	$\eta x/\tau$	-1
	$-\tau < x < -\tau/\eta$	x/τ	-1	$\varnothing$	$\varnothing$
	$\lvert x\rvert > \tau$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
	$\tau/\eta < x < \tau$	x/τ	1	$\varnothing$	$\varnothing$
$V < 1/\eta$	$V\tau < x < \tau/\eta$	x/τ	1	$\eta x/\tau$	1
	$-\tau/\eta < x < V\tau$	x/τ	-1	$\eta x/\tau$	-1
	$-\tau < x < -\tau/\eta$	x/τ	-1	$\varnothing$	$\varnothing$

5. Особенности решения

А. Сверхзвуковой режим. При $\tau/\eta < x < V\tau$ все интегралы, входящие в представление нормальных перемещений являются постоянными величинами, следовательно, нормальные перемещения в диапазоне $\tau < x < V\tau$ не зависят от x и τ (являются постоянной величиной). Это говорит о том, что динамические эффекты в точке границы полуплоскости, по которой в момент времени τ «прошла» сосредоточенная сила, перемещающаяся со сверхзвуковой скоростью, начинают проявляться не сразу, а после прохождения периода времени $\Delta\tau = V - 1$, что соответствует времени прохождения волной растяжения-сжатия расстояния между ее фронтом и фронтом движения нагрузки.

Исследуем поведение решения при $x \to \pm c_R\tau$.Пусть $x \to c_R\tau \pm \varepsilon$, тогда с помощью утверждения 2 получаем следующий результат:

$$I_{sl2}(x,\tau)=\int\limits_{\eta c_R\pm\varepsilon/\tau}^{-1}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z-\eta_l c_R}dz\sim\frac{1}{\sqrt{1-\eta_l^2 c_R^{\ 2}}}\ln\varepsilon_1\quad(\varepsilon_1=\varepsilon/\tau\to 0).$$

Аналогично соотношение имеет место при $x\to -c_R\tau\pm\varepsilon$:

$$I_{sl3}(x,\tau)\sim-\frac{1}{\sqrt{1-\eta_l^2 c_R^{\ 2}}}\ln\varepsilon_1\ \ (\varepsilon_1\to 0).$$

На рис. 2 изображены распределения нормальных перемещений границы полупространства в момент времени $\tau=1$ для различных значений скорости движения нагрузки. Красная кривая соответствует значению $V=1$, зеленая - $V=1.5$, синяя - $V=2$. Штриховые вертикальные прямые соответствуют положению фронтов волны Рэлея $x=\pm c_R\tau$, а штрихпунктирные - положению фронтов волны сдвига $x=\pm\tau/\eta$. Здесь и далее в качестве материала полупространства принята сталь с безразмерными параметром: $\eta=1.87$. При этом скорость волны Рэлея равна $c_R=0.496$ [1], а скорость волны сдвига $1/\eta=0.535$.

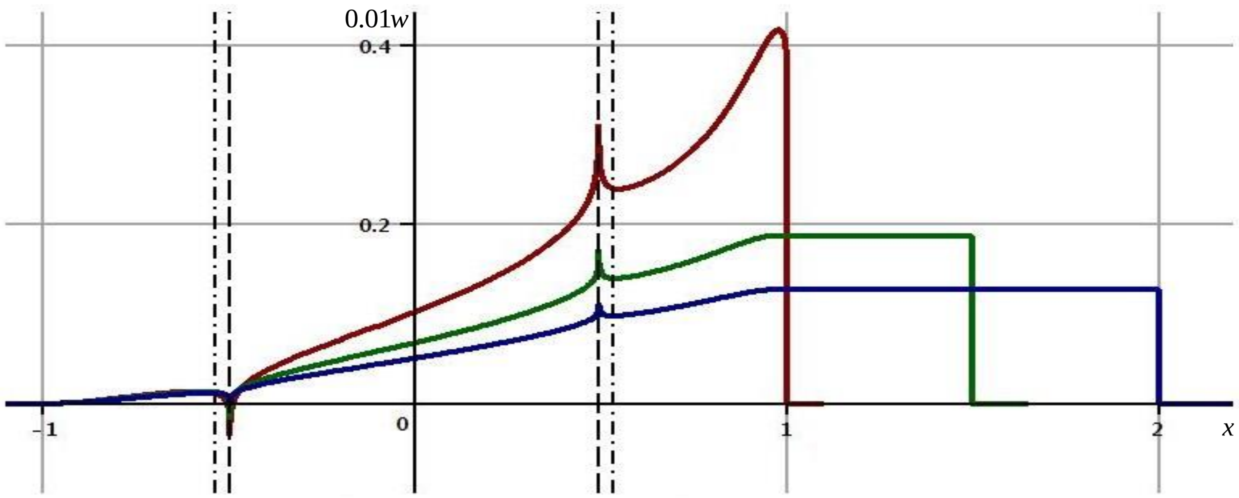

Рис. 2.

На рис. 3 проиллюстрировано поведение решения при $V=2$ в окрестности фронтов волн Рэлея.

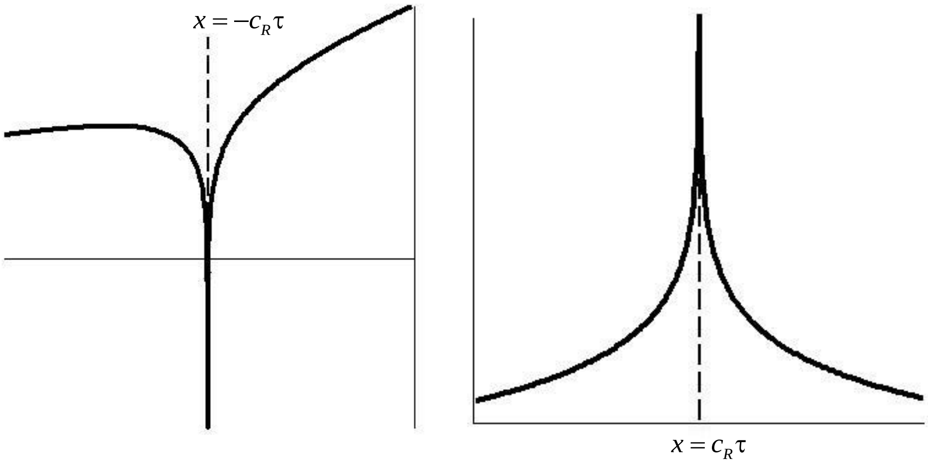

Рис. 3.

Б. Трансзвуковой режим. Здесь отметим следующий момент. На рис. 4 изображен график зависимости суммы коэффициентов $A_{11} + B_{11}$ при заданных свойствах материала (сталь) от скорости движения нагрузки. Вертикальная штрихпунктирная прямая соответствует скорости волны сдвига $V = 1/\eta$. Видно, что при $V = V_0 = 0.567$ сумма коэффициентов равна нулю.

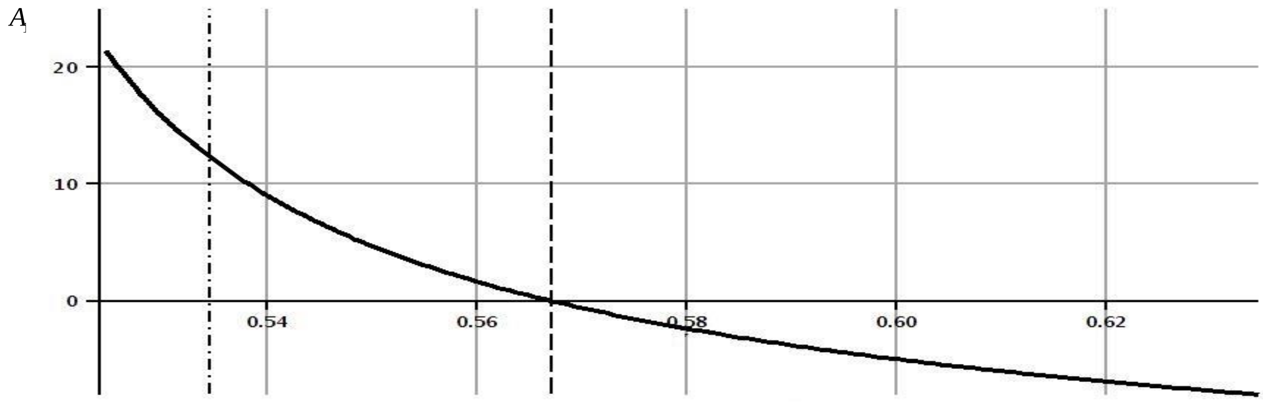

Рис. 4.

Это приводит к следующему выводу. При $V \neq V_0$ на фронте движения нагрузки при дозвуковом режиме имеется логарифмическая особенность. При этом в случае $V > V_0$ перемещения в окрестности фронта положительны, а при $V < V_0$ -

отрицательны. При $V = V_0$ особенность второго рода на фронте движения нагрузки исчезает, однако при этом на фронте перемещения имеют разрыв первого рода за счет скачкообразного изменения верхнего предела z_{12} от -1 к 1 (см. таблицу 2).

На рис. 5 изображены распределения нормальных перемещений границы полуплоскости в момент времени $\tau = 1$ для трех характерных значений скорости движения нагрузки.

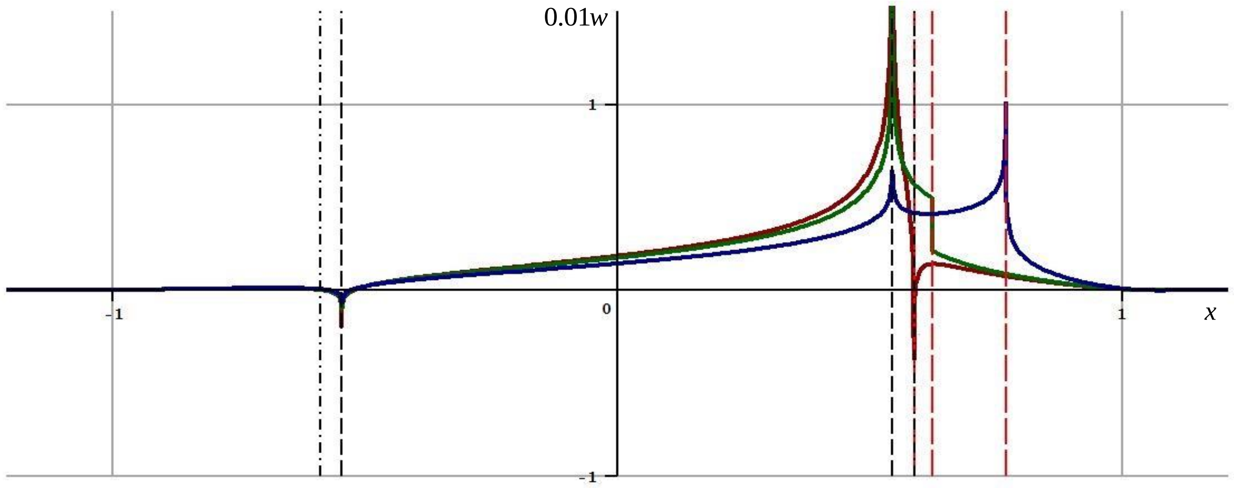

Рис. 5.

Красная кривая соответствует значению $V = 1/\eta$, зеленая - $V = V_0 = 0.567$, синяя - $V = 0.7$. Красная вертикальная штриховая прямая соответствует положению нагрузки.

B. Дозвуковой режим. На рис. 6. представлены распределения нормальных перемещений границы полупространства при дозвуковом режиме движения в момент времени $\tau = 1$. Красная кривая соответствует значению $V = 0.2$, зеленая - $V = 0.4$, синяя - $V = c_R - 0.001$. Красная вертикальная штриховая прямая соответствует положению нагрузки.

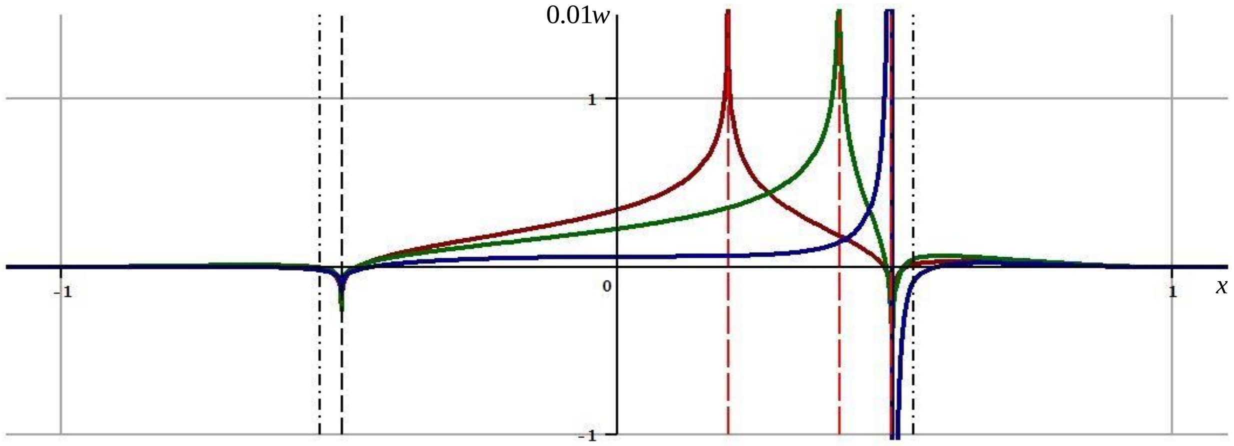

Рис. 6.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-01051) и гранта Президента РФ НШ-2029.2014.8.

Библиографический список

1.Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. -М.: Физматлит, 2004. - 472 с.

2.Тарлаковский Д.В., Федотенквов Г.В. Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // Известия РАН. Механика твердого тела. 2015. № 2. С. 118-128.

3.Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. -М.: Наука. Физматлит, 1995. - 351 с.

4. Медведский А.Л., Тарлаковский Д.В. Плоская нестационарная задача о взаимодействии твердого ударника с несовершенствами и упругого полупространства // Электронный журнал «Труды МАИ», 2011, №48: https://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=27499 (дата публикации 22.11.2011).

5. Медведский А.Л., Тарлаковский Д.В. Нестационарный контакт недеформируемого ударника с несовершенствами и упругой полуплоскости на сверхзвуковом участке внедрения // Вестник Московского авиационного института. № 6. 2011. Т. 18. – С. 125–132.