

Применение 2D моментов Лежандра для обработки двумерных дискретных сигналов

Нго Хыу Фук

В статье рассмотрен способ вычисления моментных лежандровых характеристик двумерного дискретного сигнала, инвариантных относительно преобразования поворота. Предлагаемый автором алгоритм может быть использован во многих задачах анализа сигналов.

Моменты с полиномами Лежандра в качестве ядра были представлены Теагуе (Teague) [1]. Моменты Лежандра принадлежат классу ортогональных моментов[2,3,4], и они использовались, чтобы достигнуть близкого к нулю значения меры избыточности в наборе функций момента, так, чтобы моменты соответствовали независимым характеристикам объекта в пространстве.

Прежде аффинные моментные инварианты не получались непосредственно из исходного момента Лежандра исследуемого изображения. В этом разделе мы вводим новый способ вычисления инвариантов 2D моментов Лежандра относительно сдвига, поворота и масштабирования, основанных на полиномах Лежандра. Полученные инварианты основаны на центральных моментах Лежандра. Они развиты для асимметричных и симметрических объектов. Мы решили проблемы, связанные с исчезновением нечетного порядка моментов Лежандра симметрических объектов. Масштабные инварианты построены, алгебраическим устранением масштабного множителя, содержащегося в вычисленных моментах Лежандра. Масштабные инварианты остаются неизменными для удлиненных, сжатых и отраженных объектов. Инварианты поворотов тоже получены с использованием центральных моментов Лежандра. Они обобщены для различных изображений. Другая проблема, связанная с изменением размера объекта при сдвиге также решена. Мы также вводим новое понятие полутонового изображения для 2D моментов Лежандра.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОСНОВА

Рассмотрим основы теории моментов Лежандра[5,6]. 2D моменты Лежандра порядка $(m + n)$ определены как:

$$\lambda_{mn} = \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m(x) * P_n(y) f(x, y) dx dy \quad (1)$$

где $m, n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, P_m и P_n – полиномы Лежандра и $f(x, y)$ – непрерывная функция объекта. Полиномы Лежандра образуют полный ортогональный базис, определенный на интервале $[-1, 1]$. Функция объекта $f(x, y)$ определена на том же самом интервале. Для выполнения условия ортогональности, полинома Лежандра n -го порядка определен как:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_{nj} x^j \quad (2)$$

и a_{nj} - коэффициенты Лежандра, определены:

$$a_{nj} = (-1)^{\frac{(n-j)}{2}} \frac{1}{2^n} \frac{(n+j)!}{\left(\frac{n-j}{2}\right)! \left(\frac{n+j}{2}\right)! j!} \quad \text{где } n-j = \text{чётно} \quad (3)$$

Рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра, $P_n(x)$ задается следующим образом:

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)}{n} \quad (4)$$

где $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ и $n > 1$.

Несколько первых полиномов Лежандра[5,6]:

$$P_0(x) = 1 \quad (5)$$

$$P_1(x) = x \quad (6)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (7)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad (8)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \quad (9)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \quad (10)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \quad (11)$$

Поскольку область определения полиномов Лежандра принадлежит интервалу $[-1,1]$, блок объекта $N \times N$ пикселей с функцией интенсивности $f(i, j)$, $0 \leq i, j \leq (N-1)$, должен быть отображен на область $-1 \leq x, y \leq 1$. В результате этого, теперь выражение (1) может быть выражено в дискретной форме как:

$$\lambda_{mn} = \kappa_{mn} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} P_m(x_i) * P_n(y_j) f(i, j) \quad (12)$$

где $\kappa_{mn} = \frac{(2m+1)(2n+1)}{N^2}$ – нормализующий коэффициент; x_i, y_j обозначает нормализованные координаты пиксела в интервале $[-1,1]$, которые определены в соответствии с рис. 1:

$$x_i = \frac{2i+1}{N} - 1 \text{ и } y_j = \frac{2j+1}{N} - 1. \quad (13)$$

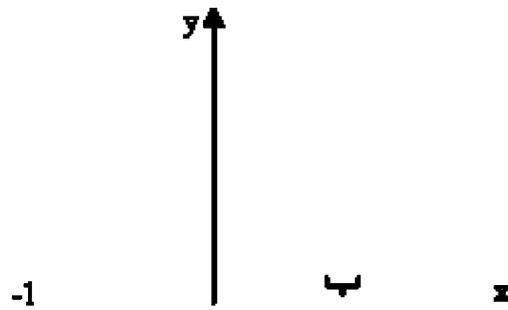


Рис. 1: Положение x_i , рассчитано в дискретном интеграле.

Однако, рассмотренный метод зависит от размера изображения.

Сначала мы вычислим некоторые особенности изображения[4]. Предполагается, что мы имеем область R (рис. 3.3) содержащую N пикселей:

а. Центр масс.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{(x,y) \in R} x, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{(x,y) \in R} y. \quad (14)$$

Центральные моменты порядка $(m+n)$ преобразованы:

$$\mu_{mn} = \sum_{(x,y) \in R} (x - \bar{x})^m (y - \bar{y})^n \quad (15)$$

б. Ориентация.

Ориентация определяется как угол оси минимального значения момента инерции. Это получено минимизацией относительно θ суммы

$$I(\theta) = \sum_{(x,y) \in R} \sum_{(m,n)} D^2(m,n) = \sum_{(x,y) \in R} [(y - \bar{y}) \cos \theta - (x - \bar{x}) \sin \theta]^2 \quad (16)$$

В результате получим:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left[\frac{2\mu_{1,1}}{\mu_{2,0} - \mu_{0,2}} \right], \quad \theta_2 = \frac{1}{2} \operatorname{atan} 2[\mu_{2,0} - \mu_{0,2}, 2\mu_{1,1}]$$

$$\theta = \begin{cases} -\theta_1 & \text{if } \theta_1 < 0 \text{ and } \theta_2 > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \theta_1 & \text{if } \theta_1 * \theta_2 > 0 \\ \pi - \theta_1 & \text{if } \theta_1 > 0 \text{ and } \theta_2 < 0 \end{cases} \quad (17)$$

в. Рабочий прямоугольник.

Рабочий прямоугольник – наименьший прямоугольник, содержащий объект, который также способствует выявлению его ориентации (Рис. 2). Мы используем преобразование:

$$\begin{aligned} \alpha &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ \beta &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \quad (18)$$

Найдем α_{\min} , α_{\max} , β_{\min} , β_{\max} , если $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$ являются координатами точек, соответственно.

Поскольку мы определили $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ как нормализованные координаты пиксела в диапазоне $[-1, 1]$, которые зависят от (i, j) – координат в рабочем прямоугольнике:

$$x_{i,j}^\theta = \frac{2dx_0}{dx_1 + dx_2} - 1 \quad (19)$$

где $dx_1 = \left| j \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - i + y_3 - x_3 \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right|$, $dx_2 = \left| j \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - i + y_4 - x_4 \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right|$,

$$dx_0 = \begin{cases} dx_1 & \text{при } |\beta_{\max}| \geq |\beta_{\min}| \\ dx_2 & \text{при } |\beta_{\max}| < |\beta_{\min}| \end{cases}$$

и

$$y_{i,j}^\theta = \frac{2dy_0}{dy_1 + dy_2} - 1 \quad (20)$$

где $dy_1 = |j \tan(\theta) - i + y_1 - x_1 \tan(\theta)|$, $dy_2 = |j \tan(\theta) - i + y_2 - x_2 \tan(\theta)|$,

$$dy_0 = \begin{cases} dy_1 & \text{при } |\alpha_{\max}| \geq |\alpha_{\min}| \\ dy_2 & \text{при } |\alpha_{\max}| < |\alpha_{\min}| \end{cases}.$$

В этом случае, нормализованная константа определена как:

$$k\tau_{pq} = \frac{(2p+1)(2q+1)}{(|\alpha_{\min}| + |\alpha_{\max}|)(|\beta_{\min}| + |\beta_{\max}|)} \quad (21)$$

Эти значения используются для всех инвариантов моментов Лежандра относительно сдвига, поворота и масштабирования.

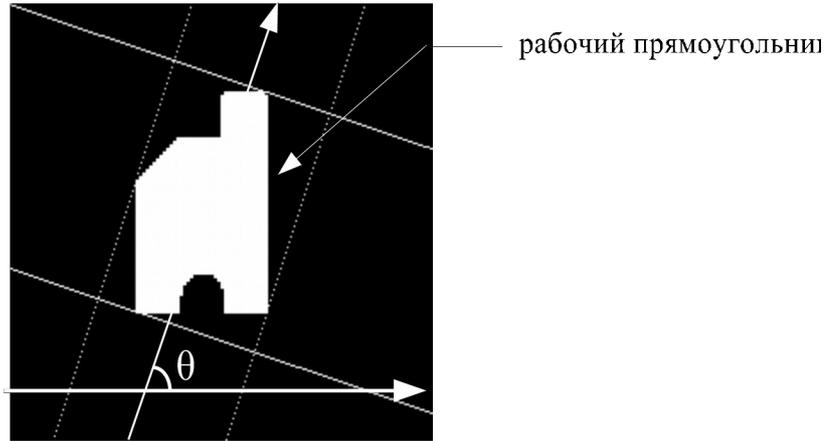


Рис. 2: Область R (рабочий прямоугольник) используется для вычисления моментов.

ИНВАРИАНТЫ 2D МОМЕНТОВ ЛЕЖАНДРА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОВОРОТА

а. Теоретическая основа.

После преобразования координат по формулам (19) и (20), мы можем использовать основную формулу:

$$\lambda_{mn}^{\theta} = \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m(x^{\theta}) * P_n(y^{\theta}) f(x^{\theta}, y^{\theta}) dx^{\theta} dy^{\theta}; x^{\theta}, y^{\theta} \in [-1,1] \quad (22)$$

$$\text{или } \lambda_{mn}^{\theta} = \kappa_{mn} \sum_{(i,j) \in BR} P_m(x_{i,j}^{\theta}) * P_n(y_{i,j}^{\theta}) f(i, j) \quad (23)$$

Предполагается, что масштабы объекта по осям x и y – a и b , соответственно инварианты 2D моментов Лежандра относительно сдвига, масштабирования и поворота могут быть получены следующим образом:

$$\lambda_{mn}^{t,s,\theta} = \frac{(2m+1)(2n+1)}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m(a(x^{\theta} - x_0^{\theta})) P_n(b(y^{\theta} - y_0^{\theta})) \times f(x^{\theta}, y^{\theta}) dx^{\theta} dy^{\theta}; (a, b) \in (R - \{0\}) \quad (24)$$

Уравнение (24) формирует ядро инвариантов 2D моментов Лежандра. Инварианты обозначены как χ_{mn} . Эти моменты получены следующим образом:

$$\chi_{mn} = \sum_{k=0}^m \sum_{d=0}^n \left[\frac{\kappa_{mn}}{\kappa_{kd}} \delta_{mk} \delta_{nd} \lambda_{kd}^{t,s,\theta} \right] = a^{m+1} b^{n+1} \sum_{k=0}^m \sum_{d=0}^n \left[\frac{\kappa_{mn}}{\kappa_{kd}} \delta_{mk} \delta_{nd} \lambda_{kd}^{t,\theta} \right] \quad (25)$$

Нормализованные инварианты 2D моментов Лежандра относительно аффинных преобразований ω_{mn}^{θ} , определены как :

$$\omega_{mn}^{\theta} = \frac{\chi_{mn} \chi_{00}^{\xi+1}}{\chi_{(m+\xi)0} \chi_{0(n+\xi)}}; \quad m, n = 0, 1, 2, \dots; \text{ and } \xi = 1, 2, \dots \quad (26)$$

б. Экспериментальные результаты

В наших приложениях, мы часто используем 3-й порядок 2D моментов Лежандра инвариантных относительно аффинных преобразований с $\xi = 2$. Сначала определим три порядка 2D моментов Лежандра, инвариантных относительно сдвига, масштабирования и поворота

Первый порядок:

$$\omega_{10}^{\theta} = \frac{\chi_{10} \chi_{00}^3}{\chi_{30} \chi_{02}}; \quad \omega_{01}^{\theta} = \frac{\chi_{01} \chi_{00}^3}{\chi_{20} \chi_{03}}$$

Второй порядок:

$$\omega_{20}^{\theta} = \frac{\chi_{20} \chi_{00}^3}{\chi_{40} \chi_{02}}; \quad \omega_{02}^{\theta} = \frac{\chi_{02} \chi_{00}^3}{\chi_{20} \chi_{04}}; \quad \omega_{11}^{\theta} = \frac{\chi_{11} \chi_{00}^3}{\chi_{30} \chi_{03}}$$

Третий порядок:

$$\omega_{30}^{\theta} = \frac{\chi_{30} \chi_{00}^3}{\chi_{50} \chi_{02}}; \quad \omega_{03}^{\theta} = \frac{\chi_{03} \chi_{00}^3}{\chi_{20} \chi_{05}}; \quad \omega_{21}^{\theta} = \frac{\chi_{21} \chi_{00}^3}{\chi_{40} \chi_{03}}; \quad \omega_{12}^{\theta} = \frac{\chi_{12} \chi_{00}^3}{\chi_{30} \chi_{04}}$$

Экспериментальные результаты для моментов полутонового 128x128 изображения объектов показаны в Таблице 1.

Изображение	Вращение	ω_{10}^{θ}	ω_{01}^{θ}	ω_{20}^{θ}	ω_{02}^{θ}	ω_{11}^{θ}	ω_{30}^{θ}	ω_{03}^{θ} ω_{21}^{θ}	$\mu\%$	
	$\theta = 0 \text{ deg}$	1,938 10^{-3}	1,946 10^{-3}	1,825 10^{-3}	1,850 10^{-3}	2,009 10^{-3}	1,709 10^{-3}	1,751 10^{-3}	1,894 10^{-3}	
	$\theta = 30 \text{ deg}$	1,931 10^{-3}	1,939 10^{-3}	1,819 10^{-3}	1,845 10^{-3}	2,002 10^{-3}	1,703 10^{-3}	1,747 10^{-3}	1,889 10^{-3}	0,32%
	$\theta = 100 \text{ deg}$	1,932 10^{-3}	1,94 10^{-3}	1,82 10^{-3}	1,844 10^{-3}	2,002 10^{-3}	1,705 10^{-3}	1,745 10^{-3}	1,89 10^{-3}	0,31%
	$\theta = -25 \text{ deg}$	1,933 10^{-3}	1,94 10^{-3}	1,821 10^{-3}	1,844 10^{-3}	2,003 10^{-3}	1,705 10^{-3}	1,745 10^{-3}	1,889 10^{-3}	0,3%

	$\theta = -50$	1,937	1,946	1,823	1,85	2,008	1,706	1,751	1,892	0,07%
	deg	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	

Таблица 1: 2D моменты Лежандра для повернутого полутонного изображения

Список литературы:

1. M. Teague. *Image analysis via the general theory of moments.* // J. Opt, Soc, Am. 1980,70 (8).- pp. 920-930.
2. M.K. Mandal, T. Aboulnasr, S. Panchanathan. *Image indexing using moments and wavelet.* // IEEE Trans. Consumer Electron. 1996,42 (3) .- pp. 557-565.
3. J. Haddadnia, K. Faez, P. Moallem. *Neural network based face recognition with moment invariant.* // Proceedings of International Conference on Image Processing. 2001, Vol.-pp. 1018-1021.
4. H. Qjidaa, L. Radouane. *Robust line fitting in a noisy image by the method of moments.* // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 1999,21 (11) .- pp. 1216-1223.
5. *Legendre moment.* website <http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CVonline/CVentry.html>.
6. *Legendre Polynomia.* website <http://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html>.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Нго Хыу Фук, аспирант кафедры вычислительной математики и программирования Московского авиационного института (государственного технического университета)
e-mail: ngohuiphuc76@mail.ru