

Научная статья
УДК 521.135; 531.352
DOI: [10.34759/trd-2022-126-03](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-03)

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ L_1 ПЛОСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Андрей Николаевич Авдюшкин

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ,

Москва, Россия

avdyushkin.a.n@ya.ru

Аннотация. Рассматривается плоская эллиптическая ограниченная фотогравитационная задача трёх тел, т.е. исследуется движение тела малой массы под влиянием как гравитационных сил, так и сил светового давления, действующих со стороны двух массивных тел, которые движутся по известным кеплеровским орбитам. Предполагается, что движение всех трех тел происходит в одной плоскости. В данной задаче существует частное решение, описывающее движение тела малой массы, при котором оно находится на отрезке между притягивающими центрами в так называемой коллинеарной точке либрации L_1 .

В данной работе исследуется задача об устойчивости коллинеарной точки либрации L_1 в случае малого эксцентриситета орбит массивных тел. Система уравнений

возмущенного движения записана в гамильтоновой форме. Установлено, что в данной системе возможны как основной, так и комбинационный параметрические резонансы, приводящие к неустойчивости L_1 .

Методом малого параметра в явном виде получена нормальная форма квадратичной части функции Гамильтона уравнений возмущенного движения. Это позволило свести линейную задачу об устойчивости L_1 к эквивалентной задаче об устойчивости линейной автономной системы с нормализованным гамильтонианом. На основе этой автономной системы были найдены явные выражения, определяющие границы областей параметрического резонанса и получены условия устойчивости L_1 в линейном приближении.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, устойчивость положения равновесия, коллинеарные точки либрации, методы нормализации гамильтониана

Благодарности: автор выражает благодарность своему научному руководителю - доктору физико-математических наук Бардину Борису Сабировичу за постановку интересной задачи и обсуждение полученных результатов.

Финансирование: Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №20-31-90064).

Для цитирования: Авдюшкин А.Н. О параметрическом резонансе в окрестности точки либрации L_1 плоской ограниченной фотогравитационной задачи трех тел // Труды МАИ. 2022. № 126. DOI: [10.34759/trd-2022-126-03](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-03)

Original article

ON PARAMETRIC RESONANCE NEAR THE LIBRATION POINT L_1 OF A PLANAR RESTRICTED PHOTOGRAVITATIONAL THREE- BODY PROBLEM

Andrey N. Avdyushkin

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia,
avdyushkin.a.n@ya.ru

Abstract. A planar elliptic restricted photogravitational three-body problem is considered, i.e. it is investigated the motion of a low-mass body under the influence of both gravitational forces and light pressure forces acting from two massive bodies that move along known Keplerian orbits. It is assumed that the all three bodies move in the same plane. There is a particular solution in this problem describing the motion, which the low-mass body is located on the segment between the attracting centers at the so-called collinear libration point L_1 .

In this paper, we study the problem of the collinear libration point L_1 stability in the case of small eccentricity of the massive bodies' orbits. The system of perturbed motion equations is written in Hamiltonian form. It is established that in this system there are possible both basic and combinational parametric resonances leading to instability L_1 .

The normal form of the Hamiltonian quadratic part of the perturbed motion equations is obtained in explicit form by the method of a small parameter. This made it possible to reduce the linear stability problem L_1 to the equivalent stability problem of a linear autonomous system with a normalized Hamiltonian. The explicit expressions defining the boundaries of the parametric resonance regions were found on the basis of

this autonomous system and it was obtained the stability conditions L_1 in the linear approximation. Previously, the regions of stability and instability were obtained numerically in [12]. Carried out in that work the numerical analysis results are in good agreement with the results obtained analytically for small values of eccentricity in this article.

Keywords: Hamiltonian systems, stability of equilibrium position, collinear libration points, methods of Hamiltonian normalization

Acknowledgements: The author expresses gratitude to his scientific adviser Boris Sabirovich Bardin, Doctor of Physics and Mathematics, for setting the interesting problem statement and discussing the obtained results.

Funding: The reported study was performed at the Moscow Aviation Institute (National Research University) and funded by RFBR, project number №20-31-90064.

For citation: Avdyushkin A. N. On parametric resonance near the libration point L_1 of planar restricted photogravitational three-body problem. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. DOI: [10.34759/trd-2022-126-03](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-03)

1. Введение

Ограниченная фотогравитационная задача трех тел представляет собой естественное обобщение классической ограниченной задачи. В ней исследуется движение небольшого тела (частицы) в ньютоновском гравитационном поле двух тел. Частица рассматривается как пассивная гравитирующая точка, которая не влияет на движение массивных тел. Помимо гравитационного притяжения,

массивные тела воздействуют на частицу репульсивными силами светового давления. Если массивные тела движутся по круговым копланарным орбитам вокруг своего центра масс, а частица лежит в плоскости их движения, то задача называется плоской круговой ограниченной фотогравитационной задачей трех тел [1]. Уравнения движения частицы допускают три замечательных решения (так называемые прямолинейные решения), описывающие стационарные движения, в которых частица расположена на прямой, соединяющей массивные тела. Вышеуказанные стационарные движения соответствуют положениям равновесия в системе координат, вращающейся вместе с массивными телами. Эти положения равновесия обычно называются эйлеровыми (или коллинеарными) точками либрации. Они существуют как в классической, так и в фотогравитационной задаче трех тел [2]. Положение равновесия, расположенное между массивными телами, обозначается L_1 . Анализ движения в окрестности коллинеарных точек либрации имеет как теоретическое, так и прикладное значение. В частности, периодические орбиты в их окрестности могут быть использованы для проведения астрономических наблюдений. В связи этим, появляется все больше исследований по организации космических миссий и их окрестности [3,4,5,6,7].

Исследование устойчивости коллинеарной точки либрации L_1 выполнялось ранее в различных постановках задачи. В [8,9,10] исследовалась устойчивость L_1 в рамках плоской ограниченной круговой фотогравитационной задачи трёх тел, когда эксцентриситет e орбит притягивающих центров равен нулю, а возмущения движения не выводят частицу из плоскости их вращения. В [11,12] рассматривалась линейная задача об устойчивости L_1 в фотогравитационной эллиптической задаче

трёх при различных значениях масс и коэффициентов редукции притягивающих центров. Численно были построены диаграммы устойчивости в линейном приближении для произвольных значений эксцентриситетов. Частный случай нелинейной задачи об устойчивости коллинеарной точки L_1 был рассмотрен в связи с исследованием устойчивости положения равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова [13].

2. Постановка задачи

Для описания движения тела P малой массы введем подвижную систему координат Ox с началом в центре масс массивных тел P_1 и P_2 . Ось Ox направим по прямой P_1P_2 в сторону P_2 . Кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy совпадает с направлением вращения тела P_2 по орбите (см. рис. 1).

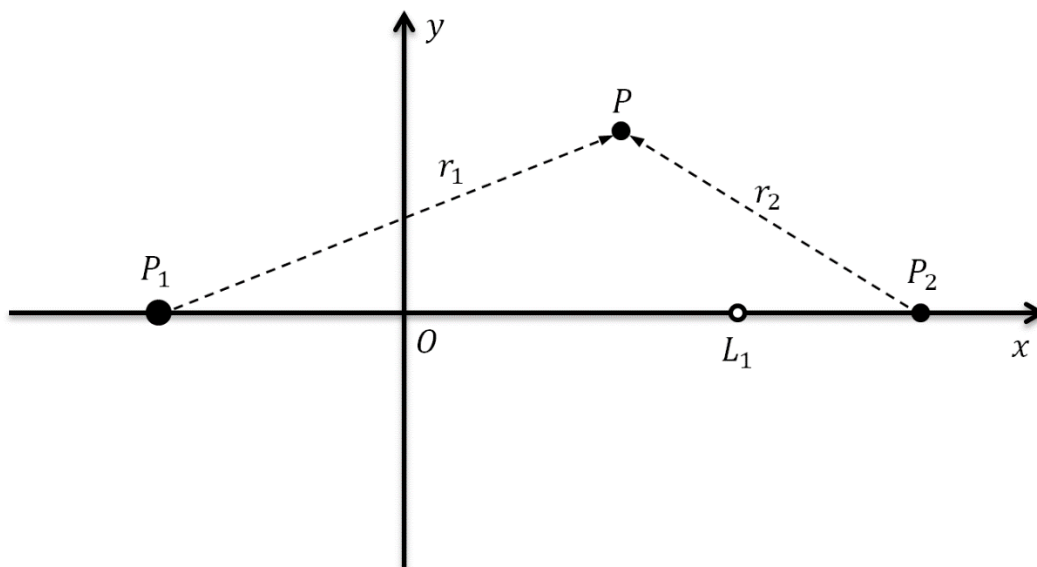


Рис. 1 Подвижная система координат

Введём безразмерные координаты Нехвила ξ , η , которые связаны с координатами x , y тела P в системе Ox формулами

$$x = r\xi, \quad y = r\eta, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (1)$$

где p и e – параметр и эксцентриситет эллиптических орбит тел P_1 и P_2 , r – расстояние между массивными телами. Уравнения движения частицы P могут быть записаны в следующей канонической форме

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\xi}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\eta}, \quad \frac{dp_\xi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \frac{dp_\eta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad (2)$$

а функция Гамильтона данной системы будет иметь вид

$$H = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi\eta - p_\eta\xi + \frac{e \cos \nu (\xi^2 + \eta^2)}{2(1 + e \cos \nu)} - \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left(\frac{Q_1(1 - \mu)}{r_1} + \frac{Q_2\mu}{r_2} \right), \quad (3)$$

где Q_1 и Q_2 – коэффициенты редукции масс, характеризующие силы светового давления тел P_1 и P_2 . Коэффициенты Q_i ($i = 1, 2$) могут принимать значения $(-\infty; 1]$. Если $Q_i < 0$, то силы светового давления превосходят гравитационные силы. В случае $Q_i = 1$ получается классическая задача трёх тел. Величины r_1 и r_2 – расстояния частицы P до тел P_1 и P_2 соответственно

$$r_1 = \sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2}, \quad r_2 = \sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

Уравнения движения допускают следующее частное решение

$$\xi = \xi_0, \quad \eta = 0, \quad p_\xi = 0, \quad p_\eta = \xi_0, \quad (5)$$

которое соответствует положению равновесия тела P в коллинеарной точке либрации L_1 , где ξ_0 – решение уравнения

$$\xi_0 - Q_1(1 - \mu) \frac{|\xi_0 + \mu|}{(\xi_0 + \mu)^3} - Q_2\mu \frac{|\xi_0 + \mu - 1|}{(\xi_0 + \mu - 1)^3} = 0, \quad (6)$$

расположенное в интервале $(-\mu, 1 - \mu)$.

В линейном приближении возмущенное движение, т.е. движение вблизи данного положения равновесия, описывается канонической системой с гамильтонианом

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi + \frac{e \cos \nu - 2a}{2(1 + e \cos \nu)} \xi^2 + \frac{e \cos \nu + a}{2(1 + e \cos \nu)} \eta^2, \quad (7)$$

где коэффициент a – обобщённый параметр, позволяющий исследовать задачу независимо от конкретных значений параметров μ, ξ_0, Q_1, Q_2

$$a = \frac{Q_1(1 - \mu)}{|\xi_0 + \mu|^3} + \frac{Q_2 \mu}{|\xi_0 + \mu - 1|^3}. \quad (8)$$

Целью данной работы является построение границ областей параметрического резонанса в окрестности L_1 при малых значениях эксцентриситета и получение условий линейной устойчивости и неустойчивости в явной аналитической форме. Частный случай этой задачи при положительных $Q_1 = Q_2 > 0$ был рассмотрен ранее в [14].

3. Аналитическое исследование при малых значениях эксцентриситета

Пусть орбиты притягивающих тел P_1 и P_2 являются слабоэллиптическими, т.е. эксцентриситет $e \ll 1$. В этом случае, полагая e в качестве малого параметра задачи, разложим гамильтониан (7) в ряд по степеням e

$$H_2 = H_2^{(0)} + eH_2^{(1)} + e^2H_2^{(2)} + \dots, \quad (9)$$

где

$$H_2^{(0)} = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi - a\xi^2 + \frac{a}{2}\eta^2, \quad (10)$$

$$H_2^{(1)} = \left(\frac{1}{2} + a\right) \cos(\nu) \xi^2 + \left(\frac{1 - a}{2}\right) \cos(\nu) \eta^2, \quad (11)$$

$$H_2^{(2)} = -\left(\frac{1}{2} + a\right) \cos(\nu)^2 \xi^2 - \left(\frac{1-a}{2}\right) \cos(\nu)^2 \eta^2. \quad (12)$$

Характеристическое уравнение линейной канонической системы с гамильтонианом (10) имеет вид

$$\lambda^4 - a\lambda^2 + 2\lambda^2 - 2a^2 + a + 1 = 0. \quad (13)$$

Если $a \notin \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left[\frac{8}{9}; 1\right]$, то уравнение (13) имеет корни с отличными от нуля вещественными частями, и положение неустойчиво по Ляпунову. Если же $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{8}{9}; 1\right)$, то уравнение (13) имеет два чисто мнимых корня, поэтому положение равновесия тела P в линейном приближении устойчиво по отношению к плоским возмущениям. В случае достаточно малых ε исследование устойчивости при $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{8}{9}; 1\right)$ можно выполнить аналитически. С этой целью выполним ряд канонических замен переменных, приводящих функцию Гамильтона (9) к удобной для исследования устойчивости (нормальной) форме.

Линейной канонической заменой переменных

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\kappa_1(\omega_1^2 - a + 1)}{\omega_1} q_1 + \frac{\kappa_2(\omega_2^2 - a + 1)}{\omega_2} q_2, \\ \eta &= 2\kappa_1 p_1 - 2\kappa_2 p_2, \\ p_\xi &= \kappa_1(\omega_1^2 - a - 1)p_1 - \kappa_2(\omega_2^2 - a - 1)p_2, \\ p_\eta &= \frac{\kappa_1(-\omega_1^2 - a + 1)}{\omega_1} q_1 + \frac{\kappa_2(-\omega_2^2 - a + 1)}{\omega_2} q_2, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\kappa_i = \left(\frac{\omega_i}{\omega_i^4 - 2a\omega_i^2 + a^2 + 2\omega_i^2 + 2a - 3} \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

$$\omega_1 = \left(1 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{9a^2 - 8a}\right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left(1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{9a^2 - 8a}\right)^{1/2}, \quad (16)$$

гамильтониан (5) можно привести к виду

$$\tilde{H}_2 = \frac{1}{2}\omega_1(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2(q_2^2 + p_2^2) + e\tilde{H}_2^{(1)} + e^2\tilde{H}_2^{(2)} + O(e^3), \quad (17)$$

Если выполнено хотя бы одно из резонансных соотношений: $2\omega_1 = n_1$, $2\omega_2 = n_2$ или $\omega_1 - \omega_2 = k$ (где n_1, n_2, k – некоторые целые числа), то при $e \neq 0$ в системе с гамильтонианом (7) возможно явление параметрического резонанса, приводящее к неустойчивости. Указанные резонансные соотношения выполняются в одной внутренней точке интервала $\left(\frac{8}{9}; 1\right)$, в трёх внутренних точках интервала $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ и на их границах. В точках $a = \frac{5+\sqrt{97}}{16}$ и $a = \frac{5-\sqrt{97}}{16}$ имеет место равенство $2\omega_2 = 1$, в точке $a = \frac{13-3\sqrt{41}}{16}$ – равенство $2\omega_1 = 3$, в точке $a = -\frac{1}{3}$ – равенство $\omega_1 - \omega_2 = 1$. На границах $a = 1$ и $a = -\frac{1}{2}$ имеет место равенство $\omega_2 = 0$, а на границах $a = \frac{8}{9}$ и $a = 0$ – равенство $\omega_1 = \omega_2$.

В плоскости параметров a, e из точек с координатами $(1, 0)$, $\left(\frac{5+\sqrt{97}}{16}, 0\right)$, $\left(\frac{8}{9}, 0\right)$, $(0, 0)$, $\left(\frac{5-\sqrt{97}}{16}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{13-3\sqrt{41}}{16}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ исходят области неустойчивости. Если значение эксцентриситета мало, то границы указанных областей можно получить аналитически в виде сходящихся рядов по степеням e

$$a = a_0 + ea_1 + e^2a_2 + \dots, \quad (18)$$

где в качестве a_0 следует положить одно из указанных выше резонансных значений:

$$1, \frac{5+\sqrt{97}}{16}, \frac{8}{9}, 0, \frac{5-\sqrt{97}}{16}, -\frac{1}{3}, \frac{13-3\sqrt{41}}{16} \text{ или } -\frac{1}{2}.$$

Вид нормализованной функции Гамильтона зависит от типа резонанса, поэтому каждый резонансный случай необходимо рассмотреть отдельно. Рассмотрим сначала так называемые резонансы основного типа, когда выполнены равенства $2\omega_2 = 1$. В этом случае линейной аналитической по e заменой переменных $q_1, q_2, p_1, p_2 \rightarrow x_1, x_2, y_1, y_2$ функцию Гамильтона можно привести к следующей нормальной форме

$$K_2 = \frac{1}{2}(\omega_1 + 2k_{10})(x_1^2 + y_1^2) + k_{20}x_2^2 + k_{22}x_2y_2 + k_{02}y_2^2, \quad (19)$$

где $k_{10}, k_{20}, k_{22}, k_{02}$ – не зависят от ν и представляют собой ряды по степеням эксцентриситета e , коэффициенты которых выражаются через коэффициенты разложения (18). Линейная замена переменных, приводящая исходный гамильтониан к виду (19) может быть построена при помощи метода Депри-Хори [15].

Задача об устойчивости исходной линейной системы с гамильтонианом (9) и нормализованной линейной системы с гамильтонианом (19) эквивалентны. Поэтому далее будем рассматривать нормализованную систему. На границах области неустойчивости (параметрического резонанса) характеристическое уравнение этой системы имеет два нулевых корня, что возможно только при выполнении условия

$$k_{22}^2 = 4k_{20}k_{02} \quad (20)$$

Из данного условия можно получить аналитические выражения для границ областей параметрического резонанса основного типа. Покажем, как это сделать для параметрических резонансов, встречающихся в данной задаче.

При выполнении соотношения $2\omega_2 = 1$, области параметрического резонанса исходят из точек $\left(\frac{5+\sqrt{97}}{16}, 0\right)$ и $\left(\frac{5-\sqrt{97}}{16}, 0\right)$. В случае $a = \frac{5+\sqrt{97}}{16}$ коэффициенты нормальной формы принимают вид

$$\begin{aligned}
 k_{20} = & \frac{97 + 19\sqrt{97}}{409728} (3104a_1 + 291 + 15\sqrt{97})e + \\
 & + \frac{59803 + 14701\sqrt{97}}{4451118870528} \left((41295616 + 561920\sqrt{97})a_2 - 30964736a_1^2 - \right. \\
 & - (67725504 + 7128000\sqrt{97})a_1 - 35280555 + 1888989\sqrt{97} \left. \right) e^2 + \\
 & + O(e^3), \\
 k_{22} = & O(e^3), \tag{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{02} = & \frac{97 + 19\sqrt{97}}{409728} (3104a_1 - 291 - 15\sqrt{97})e + \\
 & + \frac{59803 + 14701\sqrt{97}}{4451118870528} \left((41295616 + 561920\sqrt{97})a_2 - 30964736a_1^2 + \right. \\
 & + (67725504 + 7128000\sqrt{97})a_1 - 35280555 + 1888989\sqrt{97} \left. \right) e^2 + \\
 & + O(e^3).
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения (21) в условие (20) и приравнявая в полученном равенстве коэффициенты при равных степенях эксцентриситета, получим уравнения для последовательного определения коэффициентов a_j ($j = 1, 2, \dots$) ряда (18).

Вычисления показали, что уравнения границ области параметрического резонанса, исходящих из точки $\left(\frac{5+\sqrt{97}}{16}, 0\right)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
a_+ &= \frac{5 + \sqrt{97}}{16} + \frac{9(8 + \sqrt{97})}{4(97 + 19\sqrt{97})}e + \frac{27(444341\sqrt{97} - 9550369)}{32(97 + 19\sqrt{97})^2(97 + 107\sqrt{97})}e^2 + \\
&+ O(e^3), \\
a_- &= \frac{5 + \sqrt{97}}{16} - \frac{9(8 + \sqrt{97})}{4(97 + 19\sqrt{97})}e + \frac{27(444341\sqrt{97} - 9550369)}{32(97 + 19\sqrt{97})^2(97 + 107\sqrt{97})}e^2 + \\
&+ O(e^3).
\end{aligned} \tag{22}$$

Аналогично определяются границы области параметрического резонанса, исходящие из точки $\left(\frac{5-\sqrt{97}}{16}, 0\right)$. Здесь коэффициенты нормальной формы (19) имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
k_{22} &= O(e^3), \\
k_{20} &= \frac{97 - 19\sqrt{97}}{409728}(3104a_1 + 291 - 15\sqrt{97})e + \\
&+ \frac{1}{22 + \sqrt{97}}\left(\frac{97 - 107\sqrt{97}}{44}a_2 + \frac{12259 + 29291\sqrt{97}}{15972}a_1^2 - \right. \\
&\left. - \frac{836307 - 81657\sqrt{97}}{21296}a_1 + \frac{3995634 + 727923\sqrt{97}}{340736}\right)e^2 + O(e^3), \\
k_{02} &= \frac{97 - 19\sqrt{97}}{409728}(3104a_1 - 291 + 15\sqrt{97})e + \\
&+ \frac{1}{22 + \sqrt{97}}\left(\frac{97 - 107\sqrt{97}}{44}a_2 + \frac{12259 + 29291\sqrt{97}}{15972}a_1^2 + \right. \\
&\left. + \frac{836307 - 81657\sqrt{97}}{21296}a_1 + \frac{3995634 + 727923\sqrt{97}}{340736}\right)e^2 + O(e^3).
\end{aligned} \tag{23}$$

После, подставив выражения (23) в условие (20) и вычислив коэффициенты ряда (18), получаем следующие уравнения границ области неустойчивости, исходящих из точки $\left(\frac{5-\sqrt{97}}{16}, 0\right)$

$$\begin{aligned}
 a_+ &= \frac{5 - \sqrt{97}}{16} + \frac{9(\sqrt{97} - 8)}{4(19\sqrt{97} - 97)}e + \frac{27(444341\sqrt{97} + 9550369)}{32(19\sqrt{97} - 97)^2(107\sqrt{97} - 97)}e^2 + \\
 &+ O(e^3), \\
 a_- &= \frac{5 - \sqrt{97}}{16} - \frac{9(\sqrt{97} - 8)}{4(19\sqrt{97} - 97)}e + \frac{27(444341\sqrt{97} + 9550369)}{32(19\sqrt{97} - 97)^2(107\sqrt{97} - 97)}e^2 + \\
 &+ O(e^3).
 \end{aligned} \tag{24}$$

При резонансе $2\omega_1 = 3$ нормальная форма принимает следующий вид

$$K_2 = \frac{1}{2}(\omega_2 + 2k_{20})(x_2^2 + y_2^2) + k_{10}x_1^2 + k_{11}x_1y_1 + k_{01}y_1^2, \tag{25}$$

где k_{20} , k_{10} , k_{11} , k_{01} – также не зависят от ν и являются рядами по степеням эксцентриситета e , коэффициенты которых выражаются через коэффициенты ряда (18). Линейная замена переменных $q_1, q_2, p_1, p_2 \rightarrow x_1, x_2, y_1, y_2$, приводящая исходный гамильтониан к виду (25), может быть построена при помощи метода Депри-Хори [15].

Условие, когда на границах области параметрического резонанса характеристическое уравнение системы (25) имеет два нулевых корня, принимает вид

$$k_{11}^2 = 4k_{10}k_{01}. \tag{26}$$

При выполнении соотношения $2\omega_1 = 3$, область параметрического резонанса исходит из точки $\left(\frac{13-3\sqrt{41}}{16}, 0\right)$. В этом случае коэффициенты нормальной формы принимают вид

$$\begin{aligned}
k_{11} &= O(e^4), \\
k_{10} &= k_0 + \frac{48765\sqrt{41} - 312315}{4096} e^3 + O(e^4), \\
k_{01} &= k_0 - \frac{48765\sqrt{41} - 312315}{4096} e^3 + O(e^4), \\
k_0 &= -\frac{123 + 53\sqrt{41}}{1220} a_1 e + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{41} - 6} \left(\frac{39\sqrt{41} - 287}{244} a_2 - \frac{9631779 - 2218151\sqrt{41}}{68094300} a_1^2 + \right. \\
&+ \left. \frac{64485\sqrt{41} - 656910}{1155584} \right) e^2 + \\
&+ \frac{1}{1997\sqrt{41} - 12787} \left(\frac{21604\sqrt{41} - 138334}{61} a_3 + \right. \\
&+ \left. \frac{491447578 - 76752602\sqrt{41}}{680943} a_2 + \right. \\
&+ \left. \frac{25712263006566\sqrt{41} - 164783276157101}{68094300} \right) a_1 + \\
&+ \left. \frac{4440095377202\sqrt{41} - 28431991117658}{190034167725} a_1^3 \right) e^3 + O(e^4).
\end{aligned} \tag{27}$$

Подставляя выражения (27) в условие (26) и вычисляя коэффициенты ряда (18) и приходим к следующим уравнениям границ области неустойчивости, исходящих из точки $\left(\frac{13-3\sqrt{41}}{16}, 0\right)$.

$$\begin{aligned}
a_+ &= \frac{13 - 3\sqrt{41}}{16} + \frac{45(14598 - 1433\sqrt{41})}{4736(39\sqrt{41} - 287)} e^2 + \\
&+ \frac{915(3251\sqrt{41} - 20821)}{8192(10802\sqrt{41} - 69167)} e^3 + O(e^4), \\
a_- &= \frac{13 - 3\sqrt{41}}{16} + \frac{45(14598 - 1433\sqrt{41})}{4736(39\sqrt{41} - 287)} e^2 - \\
&- \frac{915(3251\sqrt{41} - 20821)}{8192(10802\sqrt{41} - 69167)} e^3 + O(e^4).
\end{aligned} \tag{28}$$

При комбинационном резонансе функция Гамильтона (9) уже не приводится к виду (19), но использованная выше методика построения границ областей неустойчивости в виде рядов по степеням малого параметра e , применима и в этих случаях.

Для построения границ области неустойчивости, исходящих из точки $(-\frac{1}{3}; 0)$ выполним линейную замену переменных (14) и перейдем к каноническим полярным координатам $q_1 = \sqrt{2r_1} \sin \varphi_1$, $q_2 = \sqrt{2r_2} \sin \varphi_2$, $p_1 = \sqrt{2r_1} \cos \varphi_1$, $p_2 = \sqrt{2r_2} \cos \varphi_2$. В результате таких замен функция Гамильтона (9) принимает вид

$$\hat{H}_2 = \frac{\sqrt{33} + 3}{6} r_1 - \frac{\sqrt{33} - 3}{6} r_2 + e\hat{H}_2^{(1)} + e^2\hat{H}_2^{(2)} + O(e^3). \tag{29}$$

Далее при помощи линейной близкой к тождественной 2π -периодической по ν канонической замены переменных $r_i, \varphi_i \rightarrow \rho_i, \theta_i$, которую можно построить при помощи метода Депри-Хори [15], приведем гамильтониан (29) к следующей нормальной форме

$$K_2 = \Omega_1 \rho_1 - \Omega_2 \rho_2 + \kappa \cos(\theta_1 + \theta_2 - \nu) \sqrt{\rho_1 \rho_2}, \tag{30}$$

где Ω_1 , Ω_2 , κ представляют собой ряды по степеням эксцентриситета e , коэффициенты которых выражаются через коэффициенты ряда (18), и не зависят от ν . С точностью до e^2 имеем следующие выражения

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & \frac{\sqrt{33} + 3}{6} + \frac{5\sqrt{33} - 99}{88} a_1 e + \\ & + \left(\frac{5\sqrt{33} - 99}{88} a_2 + \frac{9801 - 2823\sqrt{33}}{15488} a_1^2 + \frac{\sqrt{33} - 462}{968} \right) e^2 + O(e^3) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 = & \frac{\sqrt{33} - 3}{6} - \frac{5\sqrt{33} + 99}{88} a_1 e - \\ & - \left(\frac{5\sqrt{33} + 99}{88} a_2 - \frac{9801 + 2823\sqrt{33}}{15488} a_1^2 + \frac{\sqrt{33} + 462}{968} \right) e^2 + O(e^3) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\kappa = -\frac{\sqrt{66}}{11} e - \frac{699\sqrt{66}}{1936} a_1 e^2 + O(e^3) \quad (33)$$

Далее, выполнив замену переменных

$$\theta_1 = \psi_1, \theta_2 = \psi_2 + \nu - \frac{\pi}{2}, \rho_1 = R_1, \rho_2 = R_2,$$

приходим к системе со следующим независимым от ν гамильтонианом

$$K_2 = \Delta_1 R_1 + \Delta_2 R_2 + \kappa \sin(\psi_1 + \psi_2) \sqrt{R_1 R_2}, \quad (34)$$

где $\Delta_1 = \Omega_1$ и $\Delta_2 = -\Omega_2 - 1$.

В декартовых канонических переменных, которые вводятся по формулам $u_1 = \sqrt{2R_1} \sin \psi_1$, $u_2 = \sqrt{2R_2} \sin \psi_2$, $v_1 = \sqrt{2R_1} \cos \psi_1$, $v_2 = \sqrt{2R_2} \cos \psi_2$, гамильтониан (34) принимает вид

$$K_2 = \frac{1}{2} \Delta_1 (u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2} \Delta_2 (u_2^2 + v_2^2) + \frac{1}{2} \kappa (u_1 v_2 + u_2 v_1), \quad (35)$$

Область неустойчивости системы с гамильтонианом (35), т.е. область исследуемого параметрического резонанса исходной системы определяется неравенством [15]

$$|\Delta_1 + \Delta_2| < \kappa. \quad (36)$$

Уравнения границ области неустойчивости можно определить, приравняв левую и правую части неравенства (36) и раскрыв модуль со знаком «+» и знаком «-». Далее, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях эксцентриситета, последовательно вычисляются коэффициенты ряда (18)

$$\begin{aligned} a_+ &= -\frac{1}{3} - \frac{4\sqrt{66}}{99}e + \frac{70}{1089}e^2 + O(e^3), \\ a_- &= -\frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{66}}{99}e + \frac{70}{1089}e^2 + O(e^3). \end{aligned} \quad (37)$$

Для построения границы области неустойчивости, исходящей из точки $\left(\frac{8}{9}; 0\right)$

выполним линейную замену переменных

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\sqrt{15}}{5}p_1 - \frac{\sqrt{3}}{5}q_2, & \eta &= \frac{\sqrt{15}}{5}q_1 - \sqrt{3}p_2, \\ p_\xi &= \frac{2\sqrt{3}}{3}p_2 - \frac{7\sqrt{15}}{15}q_1, & p_\eta &= \frac{7\sqrt{3}}{15}q_2 - \frac{2\sqrt{15}}{15}p_1, \end{aligned} \quad (38)$$

которая приводит функцию Гамильтона (9) к виду

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{\sqrt{5}}{3}(q_1p_2 - q_2p_1) + e\hat{H}_2^{(1)} + e^2\hat{H}_2^{(2)} + O(e^3). \quad (39)$$

При помощи линейной близкой к тождественной 2π -периодической по v канонической замены переменных $u_i, v_i \rightarrow x_i, y_i$, которую можно построить с

помощью метода Депри-Хори [15], гамильтониан (39) приводится к следующей нормальной форме

$$K_2 = \frac{1}{2}(1 + 2k_{10})(x_1^2 + x_2^2) + k_{01}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{\sqrt{5}}{3}(x_1y_2 - x_2y_1) + k_{11}x_1y_1 + k_{21}x_2y_1. \quad (40)$$

где k_{10} , k_{01} , k_{11} , k_{21} – независимые от ν ряды по степеням эксцентриситета e , коэффициенты которых выражаются через коэффициенты ряда (18),

$$\begin{aligned} k_{10} &= \frac{9}{100}a_1e + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{50}a_2 - \frac{7047}{10000}a_1^2 - \frac{6766}{6655}\right)e^2 + O(e^3), \\ k_{01} &= \frac{9}{20}a_1e + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}a_2 + \frac{6237}{2000}a_1^2 + \frac{14}{121}\right)e^2 + O(e^3), \\ k_{21} &= \frac{21\sqrt{5}}{25}a_1e + \frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{84}{25}a_2 + \frac{19683}{2500}a_1^2 + \frac{14992}{6655}\right)e^2 + O(e^3), \\ k_{11} &= O(e^3). \end{aligned} \quad (41)$$

Граница области устойчивости определяется условием, которое через коэффициенты (41) записывается в виде равенства [15]

$$k_{01} = \frac{k_{11}^2(4\omega^2 - 4\omega k_{21} - k_{11}^2)}{8(1 + 2k_{10})(2\omega - k_{21})^2}. \quad (42)$$

Приравняв в левой и правой частях этого равенства члены при одинаковых степенях e , получим систему уравнений для искоемых коэффициентов a_j ($j = 1, 2, \dots$) разложения (18), задающего уравнение границы области неустойчивости

$$a_* = \frac{8}{9} - \frac{140}{1089}e^2 + O(e^3). \quad (43)$$

Отметим, что использованная в данной статье методика построения областей параметрического резонанса применялась ранее в ряде задач динамики спутников (см., например, [16,17]).

Заметим еще, что в данной задаче возможны и комбинационные резонансы и более высоких порядков. Для их исследования может быть применена методика работ [18,19,20].

Заключение

Было выполнено аналитическое исследование устойчивости в линейном приближении коллинеарной точки либрации L_1 плоской слабоэллиптической ограниченной фотогравитационной задаче трех тел. Исследовано явление параметрического резонанса, приводящее к неустойчивости. Были подробно рассмотрены резонансы как основного, так и комбинационного типа. При малых значениях эксцентриситета орбит массивных тел для каждого из резонансов аналитически вычислены коэффициенты нормальной формы функции Гамильтона задачи. Используя полученную нормальную форму, были построены границы областей параметрического резонанса в виде рядов по степеням эксцентриситета орбит массивных тел. Ранее области устойчивости и неустойчивости были получены численно в работе [12]. При малых значениях эксцентриситета результаты проведенного в указанной работе численного анализа хорошо согласуются с результатами, полученными в данной статье аналитически.

Список источников

1. Радзиевский В.В. Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления // *Астрономический журнал*. 1950. Т. 27. № 4. С. 249-256.
2. Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. О коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трёх тел // *Письма в Астрономический журнал*. 1983. Т. 9. № 7. С. 432-435.
3. Conley C. Low Energy Transit Orbits in the Restricted Three-Body Problems // *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1968, vol. 16, no. 4, pp. 732–746.
4. Ross S.D. Cylindrical manifolds and tube dynamics in the restricted three-body problem. PhD Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA. 2004.
5. Koon W.S., Lo M.W., Marsden J.E. et al. *Dynamical Systems, the Three-body Problem and Space Mission Design*, 2008, Springer, pp. 26–34.
6. Kakoï M., Howell K., Folta D. Access to Mars from Earth–Moon libration point orbits: manifold and direct options // *Acta Astronautica*, 2014, vol. 102, pp. 269–286.
7. Асланов В.С., Нерядовская Д.В. Тросовая система в коллинеарных точках либрации L1, L2 системы Марс-Фобос // *Труды МАИ*. 2022. № 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=163923>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-02)
8. Kunitsyn A.L., Tureshbaev A.T. On the collinear libration points in the photogravitational three-body problem // *Celestial mechanics*, 1985, vol. 35, pp. 105-112. DOI: [10.1007/BF01227664](https://doi.org/10.1007/BF01227664)
9. Bardin B.S., Avdyushkin A.N. Nonlinear stability analysis of a collinear libration point in the planar circular restricted photogravitational three-body problem // *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1925. DOI: [10.1088/1742-6596/1925/1/12018](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1925/1/12018)

10. Bardin B.S., Avdyushkin A.N. On stability of a collinear libration point in the planar circular restricted photogravitational three-body problem in the cases of first and second order resonances // Journal of Physics: Conference Series, 2021, vol. 1959. DOI: [10.1088/1742-6596/1959/1/012004](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1959/1/012004)
11. Тхай В.Н., Зимовщиков А.С. О возможности существования облачных скоплений микрочастиц в точках либрации двойной звезды // *Астрономический журнал*. 2009. Т. 86. № 6. С. 598-606.
12. Зимовщиков А.С., Тхай В.Н. Диаграммы устойчивости для гетерогенного амбля частиц в коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел // *Прикладная математика и механика*. 2010. Т. 74. № 2. С. 221-229.
13. Бардин Б.С., Авдюшкин А.Н. Исследование устойчивости коллинеарной точки либрации в одном частном случае ограниченной фотогравитационной задачи трёх тел // LIV Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: тезисы докладов (Москва, 14-18 мая 2018). – М.: РУДН, 2018, С. 151-155.
14. Bardin B.S., Avdyushkin A.N. Stability of the collinear point L1 in the planar restricted photogravitational three-body problem in the case of equal masses of primaries // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020, vol. 927. DOI: [10.1088/1757-899x/927/1/012015](https://doi.org/10.1088/1757-899x/927/1/012015)
15. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. - Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. - 396 с.

16. Бардин Б.С., Чекина Е.А. Об устойчивости резонансного вращения динамически симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=72568>
17. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=65212>
18. Холостова О.В. О взаимодействии резонансов третьего и четвертого порядков в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 4. С. 671–683.
19. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=93297>
20. Сафонов А.И., Холостова О.В. О периодических движениях симметричного спутника на слабоэллиптической орбите в одном случае кратного комбинационного резонанса третьего и четвертого порядков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. № 3. С. 373-394.

References

1. Radzievskii V.V. *Astronomicheskii zhurnal*, 1950, vol. 27, no. 4, pp. 249-256.
2. Kunitsyn A.L., Tureshbaev A.T. *Pis'ma v Astronomicheskii zhurnal*, 1983, vol. 9, no. 7, pp. 432-435.

3. Conley C. Low Energy Transit Orbits in the Restricted Three-Body Problems, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1968, vol. 16, no. 4, pp. 732–746.
4. Ross S.D. *Cylindrical manifolds and tube dynamics in the restricted three-body problem*. PhD Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA. 2004.
5. Koon W.S., Lo M.W., Marsden J.E. et al. *Dynamical Systems, the Three-body Problem and Space Mission Design*, 2008, Springer, pp. 26–34.
6. Kakoi M., Howell K., Folta D. Access to Mars from Earth–Moon libration point orbits: manifold and direct options, *Acta Astronautica*, 2014, vol. 102, pp. 269–286.
7. Aslanov V.S., Neryadovskaya D.V. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=163923>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-02)
8. Kunitsyn A.L., Tureshbaev A.T. On the collinear libration points in the photogravitational three-body problem, *Celestial mechanics*, 1985, vol. 35, pp. 105-112. DOI: [10.1007/BF01227664](https://doi.org/10.1007/BF01227664)
9. Bardin B.S., Avdyushkin A.N. Nonlinear stability analysis of a collinear libration point in the planar circular restricted photogravitational three-body problem, *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1925. DOI: [10.1088/1742-6596/1925/1/12018](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1925/1/12018)
10. Bardin B.S., Avdyushkin A.N. On stability of a collinear libration point in the planar circular restricted photogravitational three-body problem in the cases of first and second order resonances, *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1959. DOI: [10.1088/1742-6596/1959/1/012004](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1959/1/012004)
11. Tkhai V.N., Zimovshchikov A.S. *Astronomicheskii zhurnal*, 2009, vol. 86, no. 6, pp. 598-606.

12. Zimovshchikov A.S., Tkhai V.N. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2010, vol. 74, no. 2, pp. 221-229.
13. Bardin B.S., Avdyushkin A.N. *LIV Vserossiiskaya konferentsiya po problemam dinamiki, fiziki chastits, fiziki plazmy i optoelektroniki: tezisy dokladov*, Moscow, RUDN, 2018, pp. 151-155.
14. Bardin B.S., Avdyushkin A.N. Stability of the collinear point L1 in the planar restricted photogravitational three-body problem in the case of equal masses of primaries, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, vol. 927. DOI: [10.1088/1757-899x/927/1/012015](https://doi.org/10.1088/1757-899x/927/1/012015)
15. Markeev A.P. *Lineinye gamil'tonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoychivosti dvizheniya sputnika otnositel'no tsentra mass (The Linear Hamiltonian systems and some problems of the motion stability of the satellite with respect to its center of mass)*, Moscow-Izhevsk, NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», 2009, 396 p.
16. Bardin B.S., Chekina E.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 89. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=72568>
17. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212>
18. Kholostova O.V. *Nelineinaya dinamika*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 671–683.
19. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93297>
20. Safonov A.I., Kholostova O.V. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*, 2018, vol. 28, no. 3, pp. 373-394.

Статья поступила в редакцию 03.10.2022

Статья после доработки 04.10.2022

Одобрена после рецензирования 06.10.2022

Принята к публикации 12.10.2022

The article was submitted on 03.10.2022; approved after reviewing on 06.10.2022;
accepted for publication on 12.10.2022