

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ АГРЕГИРОВАННЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ РЕГУЛЯТОРОВ

В.В. Сурков

*Рассматривается аналитический способ синтеза оптимальных по быстродействию агрегированных регуляторов. Приводится пример, иллюстрирующий применение предлагаемого способа аналитического конструирования быстродействующих регуляторов.*

### Введение.

При формулировке задач оптимального управления для достаточно большого класса электромеханических объектов и процессов, динамические свойства которых можно выразить матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = F(X) + B \cdot u(t), \quad (1)$$

где  $F(X) = [f_1(X), \dots, f_n(X)]^T$  - матрица-столбец в общем случае нелинейных функций координат объекта;  $B$  - матрица-столбец постоянных коэффициентов, причем  $b_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $b_n \neq 0$ , обычно требуется определить допустимое управление  $u(t)$  при наличии ограничения

$$|u(t)| \leq 1, \quad (2)$$

переводящее объект (1) из некоторого произвольного начального состояния  $x_1(0) = x_{10}, \dots, x_n(0) = x_{n0}$  в конечное нулевое  $x_1(t_k) = 0, \dots, x_n(t_k) = 0$  при условии, что выбранный критерий качества (функционал)

$$J = \int_0^{t_k} f_0(x_1, \dots, x_n) dt \quad (3)$$

достигает минимально возможного значения.

Среди всего множества возможных критериев оптимальности (3) наиболее актуальны критерии быстродействия и точности. Из них особо важное значение имеет критерий быстродействия. Оказалось, что этот критерий обладает целым рядом замечательных свойств [1], таких как минимальное время переходных процессов, обеспечивающее повышение производительности промышленного оборудования; максимально возможная область асимптотической устойчивости системы, позволяющей снизить расход энергии на управление; естественный учет ограничения на управление и координаты, улучшающее условия безопасности функционирования объектов. Таким образом, для автоматических систем, от которых требуется обеспечение высокой точности и отработки перемещения за минимально возможное время,

достаточно универсальным критерием является быстродействие [1].

### Постановка задачи.

Наиболее подходящим методом в решении задач оптимального управления является динамическое программирование Р. Беллмана. Суть динамического программирования заключается в получении для оптимизируемого объекта дифференциального уравнения в частных производных, которое известно как уравнение Беллмана. Этот метод позволяет исследовать влияние на переходный процесс различных критериев оптимальности и быстрее всего приводит к определению обратных связей, необходимых для реализации оптимального управления. Однако непосредственное применение метода динамического программирования к нелинейному объекту (1) наталкивается на непреодолимые трудности [2], возрастающие с повышением размерности объекта.

Одним из путей решения данной задачи является введение обобщенной (агрегированной) переменной [2], позволяющей свести дифференциальные уравнения объекта (1) к одному дифференциальному уравнению первого порядка относительно агрегированной переменной  $\psi(X)$ , которое в общем случае может быть записано так:

$$\dot{\psi}(X) = f(X) + \varphi(X) \cdot u. \quad (4)$$

Уравнение (4) можно получить, например, если ввести в рассмотрение вектор строку вспомогательных функций  $A(X) = [a_1(X), \dots, a_n(X)]$  и составить функцию

$$\dot{\psi}(X) = A(X) \cdot \dot{X} = \sum_1^n a_i(X) \cdot f_i(X) + a_n(X) \cdot b_n \cdot u. \quad (5)$$

Вводя обозначения:  $f(X) = \sum_1^n a_i(X) \cdot f_i(X)$  и  $\varphi(X) = a_n(X) \cdot b_n$  приходим к уравнению (4).

В работе ставится задача определения оптимального управления для объекта (1) по критерию (3), в том числе и по критерию быстродействия, при ограничении (2) с использованием агрегированной переменной  $\psi(X)$ , удовлетворяющей уравнению (4). В отличие от теории А.А. Колесникова, где агрегированной переменной  $\psi(X)$  заранее задаются из дополнительных соображений, здесь поставлена задача аналитического синтеза агрегированной переменной  $\psi(X)$ , удовлетворяющей рассмотренным далее условиям, в том числе и условиям быстродействия.

### Методы и алгоритм решения.

Для решения поставленной задачи рассмотрим вначале вспомогательную задачу оптимального управления: найти методом динамического программирования закон обратной

связи  $u(\psi)$ , переводящий объект управления (4) из некоторого произвольного начального состояния  $\psi(0) = \psi_0$  в нулевое конечное  $\psi(t_k) = 0$  с минимальным значением функционала (3) с учетом ограничения (2).

Применить метод динамического программирования непосредственно к объекту (4) нельзя, поскольку кроме агрегированной переменной  $\psi$  в уравнении (4) присутствуют функции  $f(X)$  и  $\varphi(X)$ . Для решения вспомогательной задачи введем дополнительно функцию  $\alpha(X)$  и преобразуем уравнение (4), умножив его на  $\alpha(X)$ :  $\alpha\dot{\psi} = \alpha f + \alpha\varphi \cdot u$ . Найдем производную от произведения  $\alpha\psi$  с учетом последнего уравнения:

$$\frac{d(\alpha\psi)}{dt} = \dot{\alpha}\psi + \alpha f + \alpha\varphi \cdot u. \quad (6)$$

Выберем функцию  $\alpha(X)$  так, чтобы в уравнении (6)

$$\dot{\alpha}\psi + \alpha f = 0. \quad (7)$$

При необходимости из уравнения (7) всегда можно найти функцию  $\alpha(X) = \alpha(\psi, f)$ , поскольку  $\alpha[X(t)]$  является общим решением обыкновенного линейного дифференциального уравнения (7) с непрерывно изменяющимися во времени коэффициентами  $\psi[X(t)]$  и  $f[X(t)]$ . Такое решение, как известно, существует и единственно, так как при  $\psi(X) = 0$  переменная  $\alpha(X) = 0$ , а при  $\psi(X) \neq 0$  всегда найдется константа Липшица  $L$  для правой части уравнения  $\dot{\alpha} = -\alpha f / \psi$ , полученного из уравнения (7).

Запишем уравнение (6) с учетом (7) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}[\alpha\psi \cdot \text{sign}(\alpha\varphi)] = |\alpha\varphi| \cdot u. \quad (8)$$

Рассмотрим произведение под знаком производной в уравнении (8) как новую агрегированную переменную и определим оптимальное управление, методом динамического программирования [3]:  $u = -\text{sign}[\alpha\psi \cdot \text{sign}(\alpha\varphi)]$ . Учитывая, что при определении управления важен только знак выражения, стоящего в последнем выражении под знаком  $\text{sign}$  и  $\alpha \cdot \text{sign}(\alpha) = |\alpha|$ , получим:  $u = -\text{sign}(\psi \cdot \varphi)$ . При этом уравнение (4) можно записать так:

$$\dot{\psi}(X) = f(X) + |\varphi(X)| \cdot u^*, \quad (9)$$

где  $u^* = -\text{sign}(\psi)$ , то есть сомножителем при управлении в уравнении (4) должна быть определенно положительная функция  $\varphi(X)$ . Таким образом, решением вспомогательной задачи для объекта (4) является управление

$$u(\psi) = -\text{sign}(\psi), \quad (10)$$

при условии  $\varphi(X) > 0$ .

Уравнения (10) и (4) определяют множество допустимых законов управления, обеспечивающих перевод объекта (1) из произвольного начального состояния в окрестность

многообразия  $\psi(X) = 0$ , являющегося по существу поверхностью переключения. Поскольку агрегированная переменная  $\psi(X)$  равна нулю на поверхности переключения, то ее всегда можно записать в виде:  $\psi(X) = x_1 + \psi^*(x_2, x_3, \dots, x_n)$ , тогда  $\dot{\psi}(X) = \dot{x}_1 + \dot{\psi}^*(x_2, x_3, \dots, x_n)$ , то есть в выражении (5) можно принять коэффициент  $a_1 = 1$ . При этом агрегированную переменную  $\psi(X)$  можно рассматривать как функцию переключения, а  $\dot{\psi}(X)$  в уравнении (4) - как скорость проникновения, то есть как проекцию вектора относительной скорости изображающей точки на нормаль к поверхности переключения  $\Psi = 0$ . Известно [4], что если скорость проникновения не меняет знака на поверхности переключения, то скользящий режим не возникает и фазовая траектория либо имеет продолжение за поверхностью переключения, либо принадлежит поверхности переключения, то есть происходит движение системы по кускам фазовых траекторий с переключениями на поверхности  $\psi(X) = 0$  и приближением к центру фазового пространства (по крайней мере для устойчивого объекта). Следовательно, необходимым условием для оптимального по быстродействию управления является отсутствие скользящих режимов вплоть до центра фазового пространства. Обозначая скорость проникновения до переключения за  $\dot{\psi}_-$ , а после переключения как  $\dot{\psi}_+$ , запишем условие отсутствия скользящих режимов в виде:  $\dot{\psi}_- \cdot \dot{\psi}_+ \geq 0$ . Пусть, например, до переключения управление было  $u_- = -1$ , а после переключения стало  $u_+ = +1$  или наоборот, тогда подставляя соответствующие производные от функции переключения из уравнения (4) в последнее неравенство и учитывая  $\varphi(X) > 0$ , получим необходимое условие для оптимального по быстродействию управления

$$|f(X)| \geq \varphi(X) > 0. \quad (11)$$

Здесь знак равенства означает, что сразу же после первого переключения движение системы происходит точно по поверхности переключения или, другими словами, поверхность переключения точно совпадает с естественной фазовой траекторией системы. Для консервативных систем, при комплексных корнях характеристического уравнения поверхность переключения может не совпадать с фазовой траекторией [4] и в этом случае необходимо в условии (11) ставить знак больше.

Итак, управление (10) обеспечит перевод объекта (1) из произвольного начального состояния в окрестность многообразия  $\psi(X) = 0$ . Естественно, это движение должно быть устойчивым. Найдем условие асимптотической устойчивости в целом уравнения (4) относительно многообразия  $\psi(X) = 0$ . Это условие можно получить, используя, например, функцию Ляпунова  $V = 0.5 \cdot \psi^2 > 0$ . Тогда производная  $\dot{V} = \psi \cdot \dot{\psi}$  должна быть определено отрицательной. С учетом уравнения (4) и управления (10)  $\dot{V} = \psi \cdot f - \varphi \cdot |\psi| < 0$ , откуда, с учетом (11), получаем следующее

условие асимптотической устойчивости в целом движения объекта (1) к многообразию  $\psi(X) = 0$ :  $\psi \cdot f < 0$  или

$$\text{sign}(f) = -\text{sign}(\psi) = u. \quad (12)$$

Полученное условие справедливо только для рассматриваемого интервала движения объекта (1) к многообразию  $\psi(X) = 0$ .

Предположим, что объект неосциллирующий, для которого выполняется условие  $|f| = \varphi$ . Тогда из уравнений (4) и (12) следует, что при движении к многообразию  $\psi(X) = 0$  и первом же изменении знака функции  $\psi(X)$ , знак сигнала управления изменяется на противоположный,  $\dot{\psi}(X)$  становится равной нулю, и  $\psi(X)$  остается равной нулю. Условие (12) оказывается недействительным, так как  $\psi(X) = 0$  и дальнейшее движение будет происходить вдоль многообразия  $\psi(X) = 0$ .

Для осциллирующего объекта  $|f| > \varphi$ . В этом случае при первом изменении знака функции  $\psi(X)$ , знак сигнала управления также изменяется на противоположный, однако  $\dot{\psi}(X)$  не становится равной нулю ( $\dot{\psi}(X)$  не меняет знака из-за того, что  $|f| > \varphi$ ). Следовательно,  $\psi(X)$  не остается равной нулю, ее знак изменяется на противоположный, изменяется в соответствии с (12) и знак функции  $f(X)$ , а управление  $u(X)$  по-прежнему определяется формулой (4). Это означает, что интервал движения объекта (1) к многообразию  $\psi(X) = 0$  еще не закончился. Если для осциллирующего объекта выбрать условие  $|f| = \varphi$ , то за счет колебательного характера процессов, происходящих в системе, при относительно больших начальных условиях, пересечение многообразия  $\psi(X) = 0$  происходит при  $\dot{\psi}(X) \neq 0$  и смена знака управления сопровождается, в соответствии с (12), сменой знака функции  $f(X)$  уравнения (4). Это означает, что  $\psi(X)$  не остается равной нулю при данном переключении и рассматриваемый интервал продолжается. В процессе управления функции  $f(X)$  и  $\varphi(X)$  уменьшаются по величине и как только  $|f(X)|$  станет равной  $\varphi(X)$ , а  $\dot{\psi}(X)$  станет равной нулю,  $\psi(X)$  останется равной нулю. Условие (12) оказывается недействительным и дальнейшее движение будет происходить вдоль многообразия  $\psi(X) = 0$  при  $|f| = \varphi$ . Другими словами, независимо от знака в условии (11) данный интервал заканчивается в тот момент времени, когда  $|f| = \varphi$  и  $\dot{\psi}(X) = 0$ .

Рассмотрим теперь движение на втором интервале вдоль многообразия  $\psi(X) = 0$  при  $x_1 = -\psi^*(x_2, x_3, \dots, x_n)$ ,  $|f(X)| = \varphi(X)$  и  $\dot{\psi}(X) = 0$ . Из уравнения (4) следует, что управление второго интервала  $u_2$  будет определяться функцией  $f(X)$ :

$$u_2 = -\text{sign}[f(x_2, x_3, \dots, x_n)]. \quad (13)$$

Это управление будет удерживать объект в окрестности многообразия  $\psi(X) = 0$ , причем в управлении  $u_2$  уже не будет координаты  $x_1$ . Происходит скачкообразное уменьшение

размерности пространства состояний объекта на единицу при последнем переключении в конце первого интервала. Заметим, что знак управления при переходе с предыдущего интервала на следующий изменяется на противоположный.

Если функцию  $f(x_2, x_3, \dots, x_n)$  в управлении (13) принять за новую агрегированную переменную  $\psi_2(x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_2, x_3, \dots, x_n)$ , то по отношению к  $\psi_2$  можно повторить все рассуждения, что и для  $\psi$ . В результате применения рассмотренной методики последовательно  $n-1$  раз фазовое пространство постепенно сжимается  $n-1$  раз до единицы и последнее управление  $u_n = -\text{sign}[\psi_n] = -\text{sign}[x_n]$  переводит объект (1) по линии переключения в начало координат. Таким образом, имеем  $n$  интервалов управления вида  $u_i = -\text{sign}[\psi_i]$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ , а управление на первом интервале при  $i = 1$  определяется формулой (10) без индекса.

Для упрощения решения и реализации регулятора можно выбрать знак равенства в условии (11), однако для консервативных систем это означает квазиоптимальность по быстродействию.

Рассмотренный подход к решению задач оптимального управления дает возможность аналитически синтезировать оптимальные по быстродействию управления.

### Пример.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального торможения математического маятника [1], являющегося осциллирующим объектом:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u. \quad (13)$$

Управление  $u(t)$  удовлетворяет ограничению  $|u(t)| \leq 1$ .

Поскольку система уравнений (13) второго порядка, то имеем два интервала управления. На первом интервале в соответствии с (4)  $\dot{\psi}(X) = x_2 + \varphi(X) \cdot u$ . Выберем вначале в условии (11) знак равенства, при этом  $|x_2| = \varphi(X)$  и  $\dot{\psi}(X) = x_2 + |x_2| \cdot u$  или в силу уравнений объекта (13):  $\dot{\psi}(X) = \dot{x}_1 + |x_2| \cdot \dot{x}_2 + |x_1| \cdot x_1$ .

Интегрируя последнее уравнение, получим квазиоптимальный по быстродействию закон управления

$$u = -\text{sign}[\psi(X)] = -\text{sign}\left[x_1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \cdot \text{sign}(x_2)\right]. \quad (14)$$

Структурная схема объекта (13) с законом управления (14) приведена на рис.1.

Запишем закон управления (14) в следующей форме:

$$u = -\text{sign}\left\{\left[(x_1 + \text{sign}(x_2))^2 + x_2^2 - 1\right] \cdot x_2\right\}. \quad (15)$$

Из (15) следует, что линия переключения  $\psi(X) = 0$  в случае квазиоптимального по быстродействию закона управления состоит всего лишь из двух полуокружностей радиусом

равным единице с центрами на оси  $x_1$  в точках  $x_1 = \pm 1$  и прямой  $x_2 = 0$  за пределами полуокружностей.

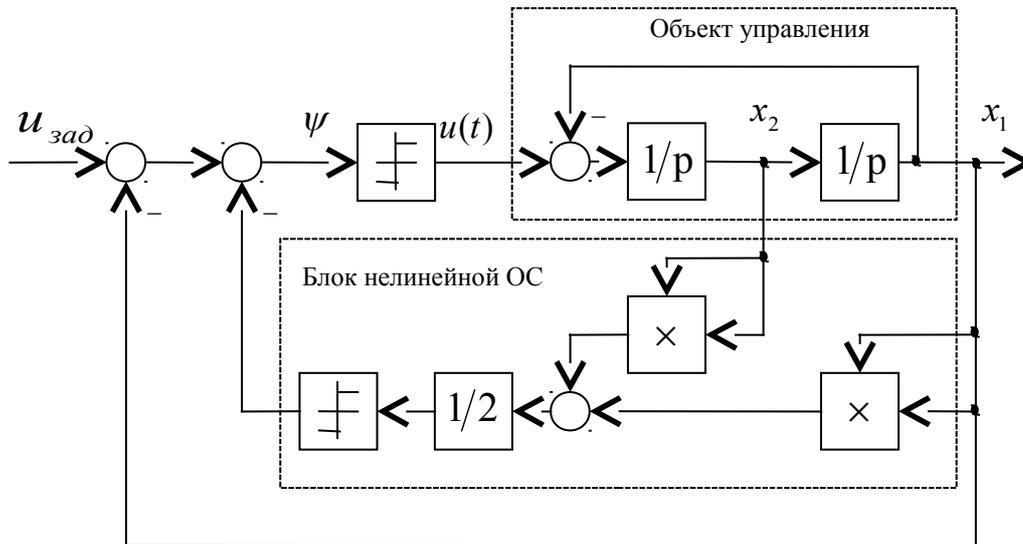


Рис.1. Структурная схема объекта (13) с законом управления (14),

$x_{1зад}$  - задающее воздействие,  $\times$  - блок умножения.

Для получения оптимального по быстродействию управления консервативной системой (13) необходимо в условии (11) на первом интервале использовать не знак равенства, а знак больше, что существенно затрудняет решение задачи. Как известно, точное решение для линии переключения состоит из бесконечного числа полуокружностей единичного радиуса с центрами по оси  $x_1$  в точках  $x_1 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ . С учетом этого оптимальное управление (14) примет вид:

$$u = -\text{sign} \left\{ \left[ \left( x_1 + \left( 2 \cdot \text{int} \left( \frac{|x_1| + 2}{2} \right) - 1 \right) \cdot \text{sign}(x_2) \right)^2 + x_2^2 - 1 \right] \cdot x_2 \right\}, \quad (16)$$

где  $\text{int}(x)$  - целая часть  $x$ .

На рис.2 приведены результаты моделирования системы (13) с квазиоптимальным (14) и оптимальным (16) по быстродействию законами управления. На рис.3 показаны фазовые траектории системы (13) с законами управления (14) и (16).

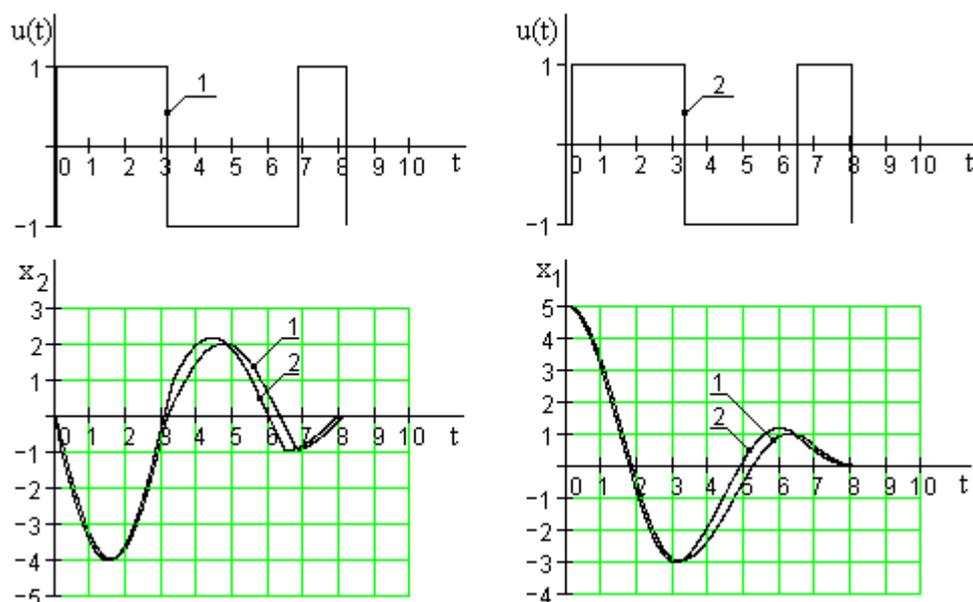


Рис. 2. Графики изменения сигнала управления и координат системы (13) с законом управления: 1 - (14), 2 - (16).

Из рис.2 и рис.3 следует, что в системе (13) с оптимальным управлением (16) амплитуда координат в переходном процессе несколько больше, чем с квазиоптимальным управлением (14), а время регулирования - несколько меньше (разность времен регулирования около 2 %). С увеличением начальных отклонений координат от положения равновесия эта разность становится все меньше. С точки зрения технической реализации квазиоптимальный по быстрдействию закон управления (14) более предпочтителен, чем оптимальный (16).

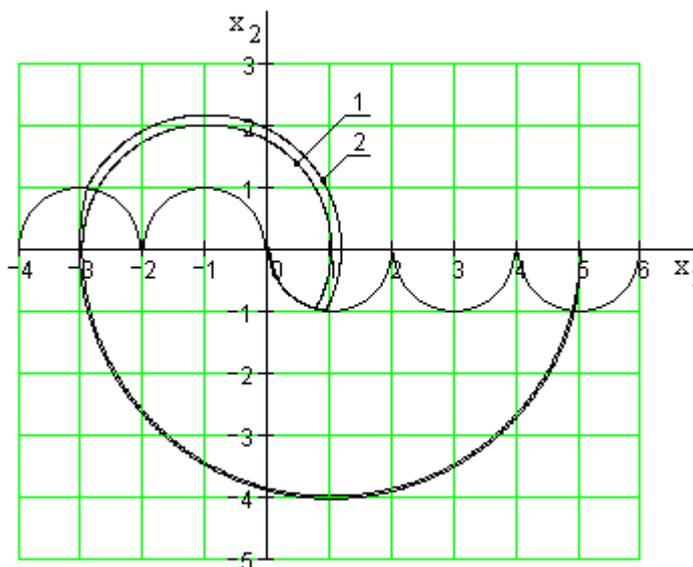


Рис.3. Фазовые траектории системы (13) с законом управления:  
1 - (14), 2 - (16).

### Выводы.

Предлагаемый в настоящей работе подход к решению задач оптимального быстродействия позволяет достаточно просто аналитически синтезировать квазиоптимальные по быстродействию управления для колебательных систем. При этом, несмотря на более простую реализацию квазиоптимального регулятора, время регулирования практически не отличается от времени регулирования при быстродействующем управлении.

Для оптимального по быстродействию процесса характерным является наличие  $n$  многообразий  $\psi_i = 0$ ,  $i = (1, \dots, n)$ ,  $\psi_1 = \psi$  (притягивающих многообразий [2] или аттракторов) и, следовательно,  $n$  интервалов управлений  $u_i = -\text{sign}(\psi_i)$ ,  $u_1 = u$ , которые появляются последовательно по мере понижения размерности пространства состояний объекта. Это утверждение можно сформулировать в виде теоремы, аналогичной известной теореме об  $n$  интервалах А.А. Фельдбаума:

**Теорема:** Если объект управления описывается дифференциальным уравнением (1)  $n$ -го порядка, то для оптимального управления необходимо и достаточно  $n$  интервалов управления  $u_i = -\text{sign}(\psi_i)$ , а знаки при смене интервалов должны чередоваться  $(n-1)$  раз. Для

колебательных систем некоторые интервалы управления будут иметь несколько чередующихся по знаку интервалов максимального значения управления. Для неконсервативных систем п интервалов управления  $u_i = -\text{sign}(\psi_i)$  равны п интервалам максимального значения управления теоремы А.А. Фельдбаума.

Для оптимального по быстродействию управления  $u_i = -\text{sign}(\psi_i)$  на каждом интервале необходимо, чтобы переменная  $\psi_i$  удовлетворяла дифференциальному уравнению первого порядка:  $\dot{\psi}_i(X) = f_i(X) + \varphi_i(X) \cdot u$ , а коэффициенты уравнения удовлетворяли условию  $|f_i(X)| \geq \varphi_i(X) > 0$ . Для неконсервативных объектов условие  $|f_i(X)| = \varphi_i(X) > 0$  на каждом интервале является также и достаточным.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бор-Раменский А.Е., Воронецкий А.Е., Святославский В.А. Быстродействующий электропривод. - М.: Энергия, 1969.- 168 с.
  2. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. - М.: Энергоатомиздат, 1994.- 344 с.
  3. Сурков В.В. Синтез агрегированных регуляторов методом динамического программирования./Сурков В.В. Сухинин Б.В., Ловчаков В.И., Феофилов Е.И. // Международная конференция и Российская научная школа "Системные проблемы качества, математического моделирования и информационных технологий", Сочи. 2000: Материалы конференции.- Москва, 2000. Часть 4. - с. 76-80.
  4. Красовский А.А. Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. - М.: Машиностроение, 1969. - 240 с.
- 

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

*Сурков Виктор Васильевич, доцент кафедры электротехники и электрооборудования,  
Тульского государственного университета, к.т.н.  
E-mail: viktor@home.tula.net*