

УДК 539.3

Оценка ширины зоны контакта между плоскоовальными каналами охлаждения и корпусом приёмо-передающего модуля активной фазированной антенной решётки

Добрянский В.Н.^{1*}, Рабинский Л.Н.^{1}, Радченко В.П.^{1***}, Соляев Ю.О.^{2****}**

¹*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

²*Институт прикладной механики РАН,
Ленинградский проспект, 7, Москва, 125040, Россия*

**e-mail: dobryanskijvn@mai.ru*

***e-mail: rabinskiy@mail.ru*

****e-mail: radchenko.v@radiofizika.com*

*****e-mail: yurysolyaev@ya.ru*

Аннотация

В работе представлена методика моделирования деформируемых тонкостенных каналов охлаждения, применяемых в системах терморегулирования мобильных радиолокационных станций (РЛС). Решена задача об определении ширины зоны контакта между деформируемыми каналами, имеющими плоскоовальное сечение, и охлаждаемыми поверхностями нагревающихся приёмо-передающих модулей активных фазированных антенных решеток (ППМ АФАР), с учетом действующего внутри каналов гидростатического давления, геометрии сечений каналов и зазоров между охлаждаемыми модулями. Решение контактной задачи для цилиндрической не осесимметричной оболочки сведено к решению

задачи о деформациях балки единичной ширины (контура поперечного сечения) для случая плоского деформированного состояния. Решение получено в неявном виде – ширина зоны контакта определяется, как корень полинома шестой степени. Исследована зависимость ширины зоны контакта от геометрических параметров модели (зазоров, размеров сечения) и действующего давления.

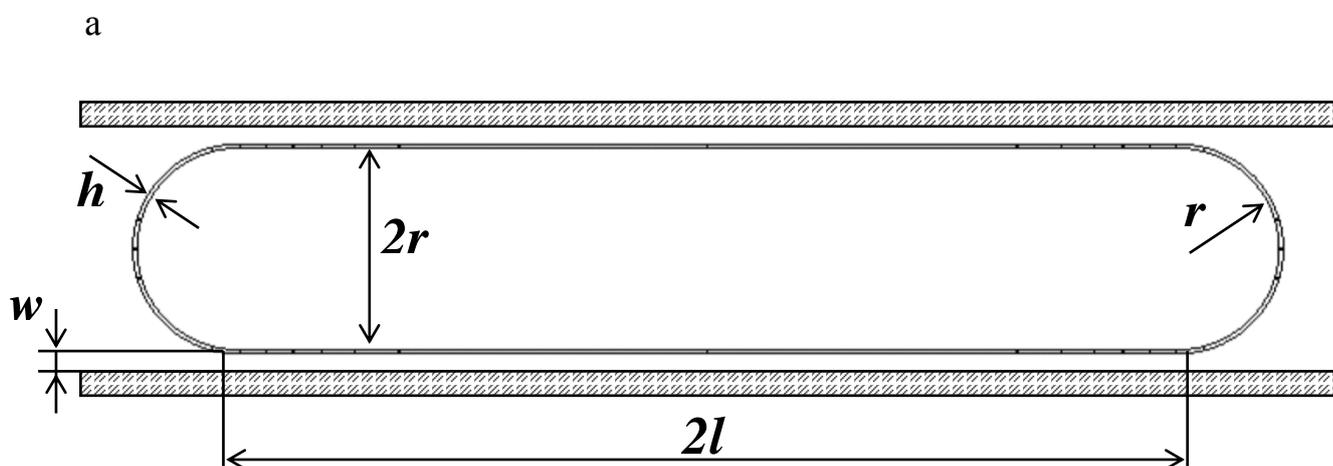
Ключевые слова: каналы охлаждения, оболочка плоскоовального поперечного сечения, ширина зоны контакта, системы терморегулирования

1. Введение

Особенностью современных цифровых АФАР является то, что приемопередатчики и цифровые схемы управления размещаются на антенном полотне в каждом излучателе. В зависимости от решаемых задач выбирается расстояние между излучателями кратное длине волны (шаг решетки) и в большинстве случаев заполнение антенного полотна получается очень плотное. Поэтому подводимая энергия, а, следовательно, и тепловая, достаточно плотно распределена по антенному полотну. С увеличением частоты излучаемой энергии, а, следовательно, и конструктивном уплотнении при размещении приемопередатчиков в антенном полотне, задачи отвода тепловой мощности от антенны выходят по сложности на первое место.

В работах [1-4] были предложены новые варианты систем терморегулирования АФАР, реализованные с использованием деформируемых тонкостенных каналов охлаждения. В нерабочем состоянии каналы охлаждения

размещаются между ППМ АФАР с небольшими зазорами, что позволяет осуществлять их удобный монтаж и ремонт (рис. 1а). В процессе работы в каналах нагнетается гидростатическое давление охлаждающей жидкости, приводящее к тому, что каналы деформируются и касаются стенок ППМ, обеспечивая отведение выделяющегося тепла во внешнюю систему охлаждения (рис. 2а). Одним из основных параметров, который характеризует интенсивность теплоотведения, является ширина зоны контакта, которая реализуется между каналами и стенками ППМ. Знание этого параметра необходимо для проектирования системы охлаждения, выбора размера каналов, зазоров и т.д. В настоящей работе предложена аналитическая методика расчета этого параметра – ширины зоны контакта (обозначена $2b$ на рис. 2а).



б

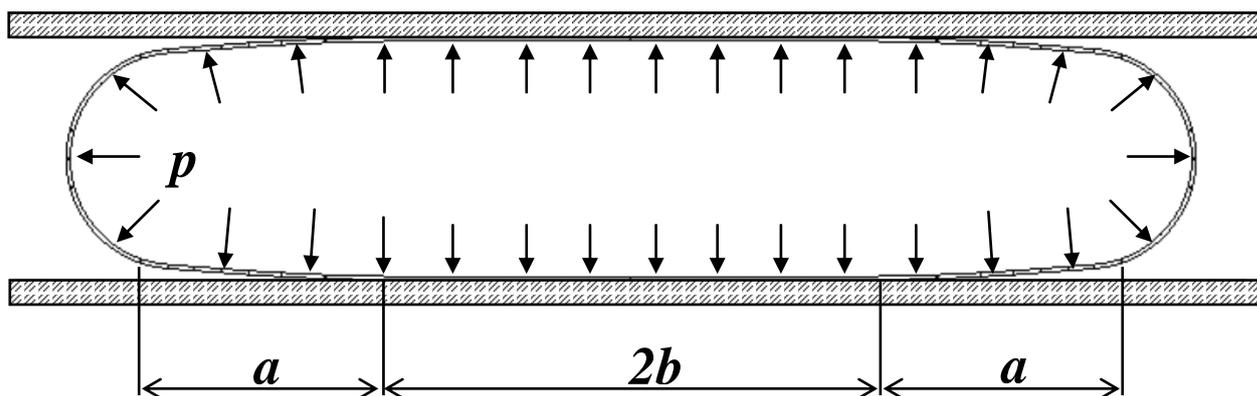


Рис. 1. а: Вид недеформированного плоскоовального поперечного сечения канала охлаждения, б: Деформированное состояние канала при действии внутреннего гидростатического давления p и при наличии жестких поверхностей, ограничивающих перемещения оболочки. Обозначения: r – радиус круговых участков поперечного сечения канала ($2r$ – высота сечения канала), $2l$ – длина прямолинейного участка канала, w – зазоры между каналом и жесткими стенками, $2b$ – ширина зоны контакта при деформировании, $a = l - b$ – ширина прямолинейного участка, не касающегося стенок.

С точки зрения механики деформируемого тела, рассматривается проблема связана с определением напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек, которые не являются оболочками вращения, работают в условиях действия внутреннего гидростатического давления и контактируют с поверхностью охлаждаемых элементов. Эти поверхности можно считать абсолютно жесткими и

плоскими, что определяется конструкцией ППМ АФАР, выполняемых из стали толщиной до 5-10 мм.

Сложность, которая возникает в рассматриваемых задачах, заключается в наличие контакта оболочки с жесткими поверхностями, которые ограничивают ее перемещения при деформациях. Проблеме решения подобных задач посвящено большое количество работ, в частности, известные работы Э. И. Григолюка [5], Э. И. Григолюка и В.И. Шалашилина [6], В.З. Власова [7], В.И. Моссаковского [8], Э.Э. Лавенделла [9]. Контактные задачи для анизотропных оболочек рассматривались в [10]. Задачи в нелинейной постановке с учетом больших прогибов рассматривались в [11]. Задачи нестационарного взаимодействия оболочек с препятствиями рассматривались в [12-14]. Точные аналитические и численно-аналитические решения контактных задач для круговой цилиндрической оболочки были получены в [15-17], для сферической в [18, 19]. Для пластинок и мембран такие решения были представлены в [20-23].

Особенностью проводимых расчетов является то, что рассматриваемые оболочки не являются осесимметричными. Исследованию таких конструкций посвящено не так много работ. Например, можно отметить решение о деформациях оболочки в виде трехосного эллипсоида под действием внутреннего давления, представленное в монографии Новожилова В.В. [24]. Для цилиндрических оболочек с эллиптическим или плоскоовальным сечением известны некоторые решения задач об определении НДС при действии внутреннего давления или иной механической нагрузки [25-29]. Контактные задачи для неосесимметричных оболочек, по всей видимости, ранее не рассматривались. Предложенная в настоящей работе методика

основана на предположении о плоской деформации оболочки (отсутствии перемещений и деформаций в стенках канала в направлении его ориентации). Построенное решение, в некоторой степени основано на подходе, которые впервые был предложен в В.И. Феодосьевым для оценки ширины зоны контакта между балкой и жесткой поверхностью. (см. [30] и обзор [31]).

2. Исходные данные и упрощающие гипотезы

Необходимо предложить аналитическую методику оценки ширины зоны контакта, реализующейся между цилиндрической оболочкой плоскоовального поперечного сечения, и плоскими жесткими поверхностями, ограничивающими ее перемещения при действии внутреннего гидростатического давления жидкости, протекающей внутри оболочки. Участок трехмерной модели цилиндрической трубы плоскоовального сечения представлен на рис. 2.

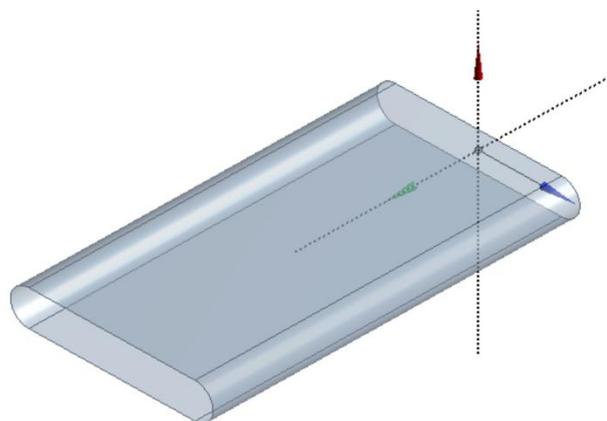


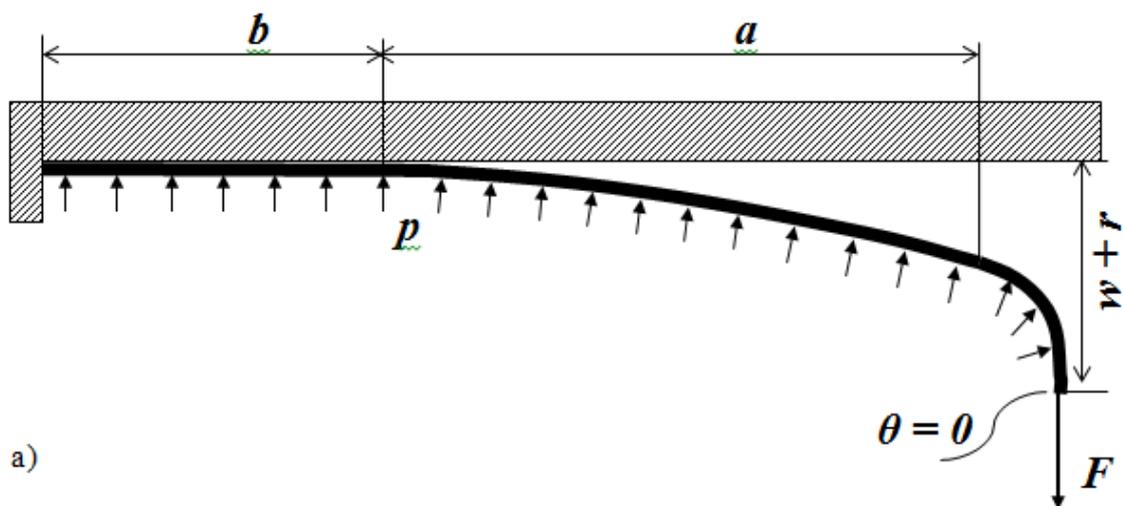
Рис. 2. Участок трубы-канала охлаждения с плоскоовальным поперечным сечением

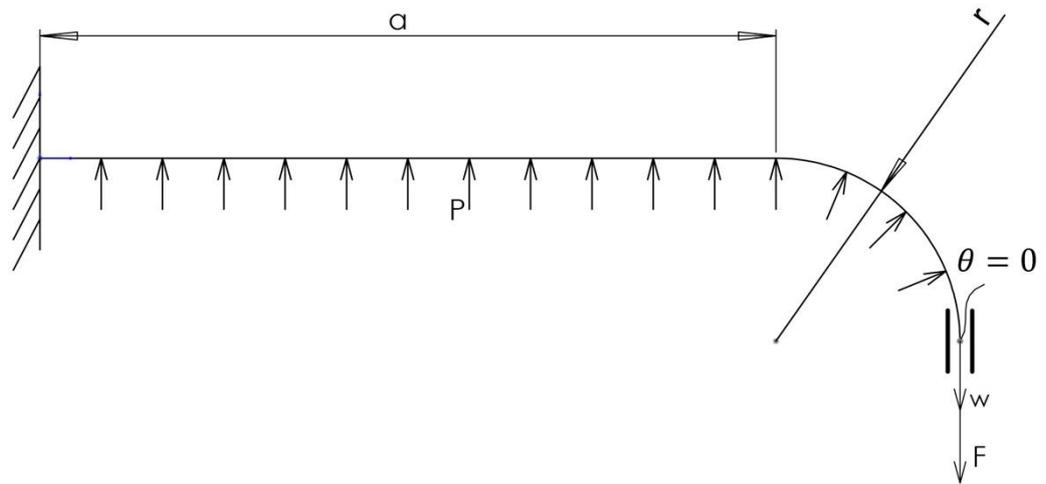
Трубы являются тонкостенными, так как толщина их стенки составляет 0,1-0,5 мм, а габаритные размеры сечений 3-5 мм по высоте и – до 50 мм по длине. Сечения имеют плоскоовальную форму. Это означает, что сечение состоит из двух прямолинейных отрезков и двух круглых частей. Таким образом, оболочка состоит из двух плоских пластин и двух соединяющих их половинок цилиндрических оболочек круглого сечения. В аналитических расчетах будут рассматриваться только прямолинейные участки труб. Эти участки являются основной рабочей зоной трубы, в которой реализуется основная доля теплоотдачи от охлаждаемой поверхности к охлаждающей жидкости. Геометрические параметры поперечного сечения оболочки, расположенной между двумя жесткими поверхностями с зазорами w , представлены на рис. 1.

В аналитическом расчете будем предполагать, что оболочка нагружена постоянным внутренним давлением. Оболочка находится в состоянии плоской деформации, то есть деформации в направлении ее образующих равны нулю. Трением в зоне контакта пренебрегаем. Наличием внутри оболочки жидкости пренебрегаем, предполагая, что ее воздействие сводится только к давлению на стенки канала.

На основании гипотезы о плоской деформации будем рассматривать деформации контура поперечного сечения оболочки, как замкнутой балки-полоски, нагруженной внутренним давлением. Вследствие симметрии, решение этой задачи также может быть построено для 1/4 части контура поперечного сечения (рис. 3а). Решение задачи сводится к следующему расчету: рассматривается деформированное состояние контура поперечного сечения оболочки в виде балки единичной ширины.

Участок сечения, касающийся жесткой поверхности, шириной b , имеет прямолинейную форму (как и до деформирования), поэтому в нем изгибающий момент равен нулю, вплоть до границы зоны контакта. Участок сечения, не касающийся жесткой стенки, имеет длину a и деформируется, как криволинейная балка, нагруженная распределенным давлением. На правом конце балки задан прогиб – он равен заданному зазору w между недеформированной формой контура и жесткими стенками. Из условий симметрии, на эти правые балки действует реакция F (со стороны отброшенной части сечения) и также запрещены повороты сечения. Горизонтальной реакции на конце балки не возникает, в частности потому, что наличием жидкости внутри оболочки пренебрегаем. На левом конце балки задается условие «заделки». Фактически, используется предположение о контакте балки с жесткой поверхностью без проскальзывания.





б)

Рис. 3. К решению задачи о деформация поперечного сечения цилиндрической оболочки плоскоовального сечения.

а: Одна четвертая часть контура, контактирующая с поверхностью,

б: Вспомогательная задача о деформациях криволинейной балки.

Заметим, что рассматриваемая балка-полоска нагружается, в том числе, и растягивающими усилиями, вследствие проекции от результирующего давления в закругленной части контура. Однако, деформациями, связанными с таким нагружением, при оценке ширины зоны контакта будем пренебрегать.

3. Построение решения

В расчетах используем классическую теорию изгиба балок. В этом случае неизвестная длина части балки, не касающейся жесткой поверхности a , может определяться из дополнительного условия равенства нулю изгибающего момента на границе зоны контакта в точке $x = b$. Как было отмечено выше, внутри зоны контакта, контур сечения остается прямолинейным и в нем изгибающий момент равен нулю вплоть до границы зоны контакта. Использование этого условия,

фактически, означает, что нагрузка, приложенная к участку контура поперечного сечения, не касающегося жесткой стенки, является самоуравновешенной и по силам, и по моментам [30, 31].

Для построения решения предварительно необходимо решить вспомогательную задачу о консольном изгибе криволинейной балки – для участка балки, не касающегося поверхности (рис. 3б). Задачу решаем аналитически, считая, что длина балки задана и равна a . Из полученного решения найдем значение силы F , выраженное через величину смещения w . Далее запишем выражение для изгибающего момента в точке $x = b$ и приравняв его нулю, найдем длину балки a (и, следовательно, ширину зоны контакта $b = l - a$), которая реализуется в рассматриваемой контактной задаче.

Рассматриваемая балка является один раз статически неопределимой. На левом конце балки в заделке ($x = b$) заданы две реакции в горизонтальном F_{x0} и вертикальном F_{y0} направлениях и момент M_0 . На правом конце балки действует момент M_l , обеспечивающий отсутствие углов поворота.

Из условия равновесия проекций действующих сил на горизонтальную и вертикальную оси найдем:

$$\sum X = 0: F_{x0} = \int_0^{\pi/2} p r \cos \phi d\phi = p r$$

$$\sum Y = 0: F_{y0} = F - p a - \int_0^{\pi/2} p r \sin \phi d\phi = F - p(r + a)$$

Уравнение равновесия для изгибающих моментов относительно точки $x = b$ дает соотношение:

$$\begin{aligned}
\sum M|_{x=b} &= 0: \\
-M_0 + pa^2/2 + pr(a+r/2) + pr^2/2 - F(a+r) + M_1 &= 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow -M_0 + pa^2/2 + pr(a+r) - F(a+r) + M_1 &= 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \underline{-M_0 + pa^2/2 + (pr-F)(a+r) + M_1} &= 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

В записанном выражении вклад в изгибающий момент от распределенной нагрузки, приложенной на скругленной части сечения, записан с учетом выражений для проекций результирующей этого давления на горизонтальную и вертикальную оси.

Для раскрытия статической неопределимости воспользуемся методом сил. Во-первых, необходимо выбрать «основную систему», отбрасывая лишние связи и заменяя их силовыми факторами. Отбросим связь, запрещающую повороты свободного конца балки и заменим ее моментом M_1 . Дополнительным соотношением для определения этого момента является каноническое уравнение метода сил, которое в данном случае сводится к требованию равенства нулю поворота балки на свободном конце и записывается следующим образом:

$$\delta_{11}M_1 + \delta_{1F} = 0,$$

где δ_{11} – это угол поворота свободного конца балки под действием единичного момента $M_1=1$, заданного в этой точке, δ_{1F} – это угол поворота свободного конца балки под действием заданной нагрузки при $M_1=0$.

Величины углов определяем с использованием интеграла Мора, разбивая балку на два участка (круговой и прямой) и проводя интегрирование, начиная со свободного конца балки:

$$\theta_{11} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_{11}^2(\phi)}{D} r d\phi + \int_a^0 \frac{M_{11}^2(x)}{D} dx \quad (2)$$

$$\theta_{1P} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_{1P}(\phi)M_{11}(\phi)}{D} r d\phi + \int_a^0 \frac{M_{1P}(x)M_{11}(x)}{D} dx$$

При действии единичного момента $M_1 = 1$ на всех участках балки изгибающие моменты равны единице (рис. 4, а). При $M_1 = 0$ изгибающий момент от действующей внешней нагрузки на участках балки определяется следующими выражениями (см. рис. 4, б):

$$M_{1P}(\phi) = (pr^2 - Fr)(1 - \cos \phi)$$

$$M_{1P}(x) = (pr - F)(x + r) + \frac{px^2}{2}$$

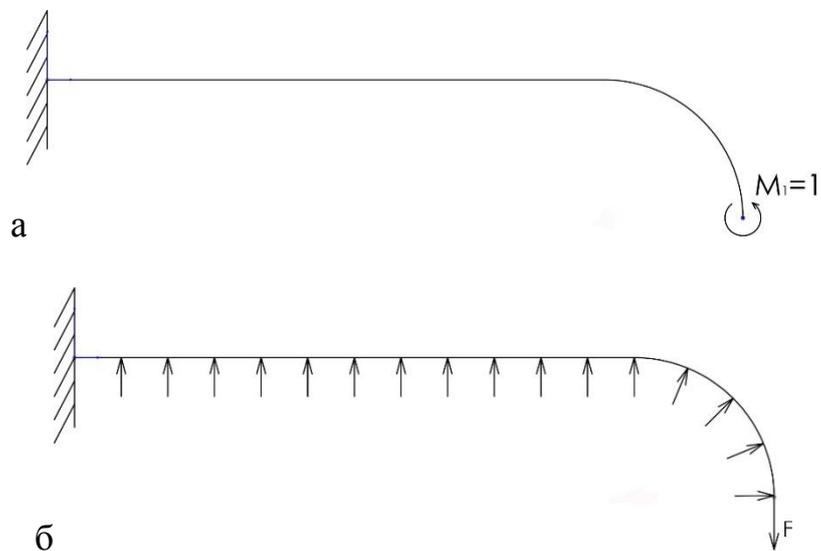


Рис. 4. Раскрытие статической неопределенности с использованием метода сил.

Задание единичного момента вместо связи, ограничивающей угол поворота (а) и

схема нагружения балки в отсутствии этой связи (б)

Подставляя записанные выражения для моментов в (2) и выполняя интегрирование, найдем:

$$\delta_{11} = \frac{\pi r + 2a}{2D}$$

$$\delta_{1p} = \frac{a^3 p + (3(2 - \pi)r^2 - 3a^2 - 6ar)(F - pr)}{6D}$$

Откуда момент равен:

$$M_1 = -\theta_{1p} / \theta_{11} = -\frac{a^3 p + (3(2 - \pi)r^2 - 3a^2 - 6ar)(F - pr)}{3\pi r + 6a} \quad (3)$$

Таким образом, распределение изгибающего момента по длине балки (начиная от свободного конца) на круглом и прямолинейном участках следующее:

$$M(\phi) = -\frac{a^3 p + (3(2 - \pi)r^2 - 3a^2 - 6ar)(F - pr)}{3\pi r + 6a} + (pr^2 - Fr)(1 - \cos \phi) \quad (4)$$

$$M(x) = -\frac{a^3 p + (3(2 - \pi)r^2 - 3a^2 - 6ar)(F - pr)}{3\pi r + 6a} + (pr - F)(x + r) + \frac{px^2}{2} \quad (5)$$

Далее находим связь вертикальных перемещений w и усилия F на свободном конце балки с использованием интеграла Мора:

$$w = \int_0^{\pi/2} \frac{M_{F1}(\phi)M_{FP}(\phi)}{D} r d\phi + \int_a^0 \frac{M_{F1}(x)M_{FP}(x)}{D} dx \quad (6)$$

где моменты вычисляются для заданной единичной силы на конце балки и для заданной внешней нагрузки по формулам:

$$M_{FP}(\phi) = M_1 + (pr^2 - Fr)(1 - \cos \phi)$$

$$M_{FP}(x) = M_1 + (pr - F)(x + r) + \frac{px^2}{2}$$

$$M_{F1}(\phi) = -r(1 - \cos \phi)$$

$$M_{F1}(x) = -(x + r)$$

Проводя интегрирование в (6) и разрешая относительно силы F , находим:

$$F = \frac{p(2a^5 + a^4(4 + 3\pi)r + 8a^3(1 + \pi)r^2 + 48a^2r^3 + 12a\pi r^4 + 6(\pi^2 - 8)r^5) + 24D(2a + \pi r)w}{4a^4 + 8a^3\pi r + 48a^2r^2 + 12a\pi r^3 + 6(\pi^2 - 8)r^4} \quad (7)$$

Далее подставляя (7) и (3) в (1) и учитывая, что условие на границе контакта приводит к требованию $M_0 = 0$, после упрощений получим соотношение для определения длины прямолинейного участка балки a , не касающейся жесткой поверхности:

$$pa^6 + 3\pi r p a^5 + 30p r^2 a^4 + 12\pi p r^3 a^3 + 9(p(\pi^2 - 8)r^4 - 8Dw)a^2 - 72\pi r Dwa - 144D r^2 w = 0 \quad (8)$$

Искомым решением для a является положительный действительный корень в выражении (8), который, как показывают расчеты, всегда существуют для реальных геометрических и упругих параметров балки, входящих в это выражение. Искомая ширина зоны контакта определяется на основании соотношения: $2b = 2(l - a)$.

4. Результаты расчетов

Результаты расчетов ширины зоны контакта, полученные на основе решения (8) в сопоставлении конечно-элементным моделированием показаны на рис. 5. Численный расчет проводился в системе Ansys также для $\frac{1}{4}$ части контура поперечного сечения оболочки, но с учетом больших прогибов оболочки. Из численного решения задачи ширина зоны контакта определялась с использованием

функции Contact tool. Аналитические решения, то есть корни уравнения (8), определялись методом Ньютона-Рафсона в системе Mathematica. Результаты на рис. 5 показаны для размеров контура поперечного сечения $l = 22.5$ мм и $r = 1.6$ мм и $r = 2.2$ мм. Толщина стенок оболочки $h = 0.2$ мм.

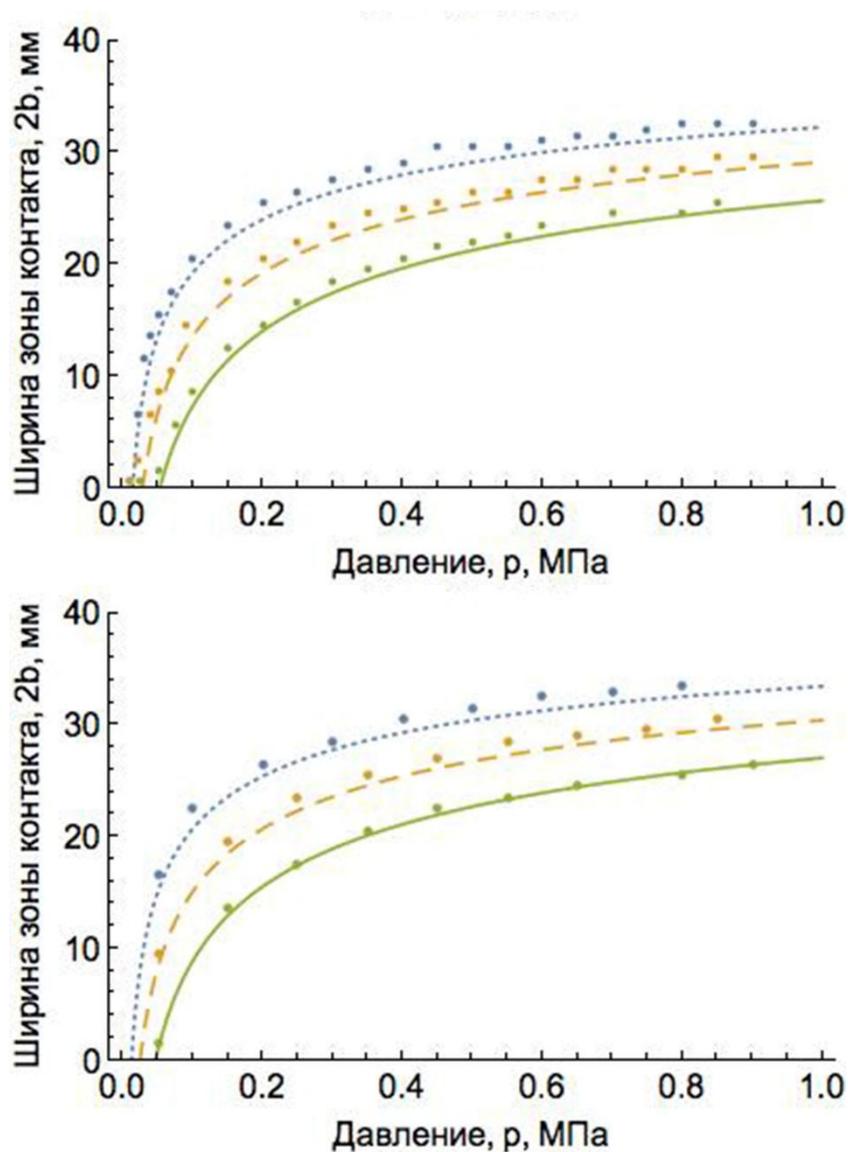


Рис. 5. Зависимость ширины зоны контакта от действующего давления. Точки – численный расчет в Ansys, линии – построенное аналитическое решение.

Сплошная линия – зазор $w = 2$ мм, штриховая – $w = 1$ мм, пунктир – $w = 0.5$ мм.

5. Выводы

Построено новое аналитическое решение для задачи о контакте цилиндрической оболочки с плоскоовальным поперечным сечением и жесткой стенкой. Ширина зоны контакта, определяемая из предложенного аналитического решения достаточно хорошо согласуется с результатами численного моделирования. Полученное решение может быть использовано при проектировании элементов конструкций систем терморегулирования РЛС. Для уточнения полученного решения в будущем, в аналитических расчетах желательно учесть трение, реализующееся в зоне контакта, для чего может потребоваться использовать модели балок более высокого порядка, а также необходимо учесть возможную неплоскостность формы поперечного сечения канала и решить аналогичную задачу для оболочки с эллиптическим контуром поперечного сечения.

Библиографический список

1. Крахин О.И., Радченко В.П., Венценовцев Д.Л. Методы создания системы отвода тепла теплонагруженных частей ФАР // Радиотехника. 2011. № 10. С. 88 – 94.
2. Токмаков Д.И. Проблемы создания системы охлаждения активной фазированной антенной решетки сантиметрового диапазона // Труды МАИ. 2013. № 68. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=41993>
3. Бабайцев А.В., Рабинский Л.Н., Радченко В.П., Венценовцев Д.Л. Оценка прочности и выбор оптимальной формы поперечного сечения тонкостенных металлических трубок системы охлаждения АФАР // Технология металлов. 2017. № 10. С. 38 - 46.

4. Бабайцев А.В., Венценосцев Д.Л., Рабинский Л.Н., Радченко В.П. Оценка тепловых режимов приемопередающего модуля активной фазированной антенной решетки // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 9 (1). С. 365 – 374.
5. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. - М.: Машиностроение, 1980. - 411 с.
6. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения решения по параметру. - М.: Наука, 1988. - 231 с.
7. Власов В.З. Контактные задачи по теории оболочек и тонкостенных стержней // Известия АН СССР. 1949. № 6. С. 41 - 45.
8. Моссаковский Г. и др. Контактные задачи теории оболочек и стержней. - М.: Машиностроение, 1978. - 248 с.
9. Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий. Машиностроение. - М.: Машиностроение, 1976. - 232 с.
10. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. - Киев: Наукова думка, 1980.- 214 с.
11. Кантор Б.Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. - Киев: Наукова думка, 1990. - 136 с.
12. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Плоская задача о вертикальном ударе цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 151 - 158.

13. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53499>
14. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Двумерный нестационарный контакт упругих цилиндрических или сферических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 2. С. 69 - 76.
15. Christopher R.A., Essenburg F. The contact of axisymmetric cylindrical shells with smooth rigid surfaces // Developments in Mechanics: Proceedings of the Twelfth Midwestern Mechanics Conference, 1971, vol. 6, pp. 773.
16. Kulkarni S.V., Frederick D. On the adhesive contact of two coaxial cylindrical shells // Journal of Applied Mechanics, 1974, vol. 41(2), pp. 477 – 483.
17. Alexandrov S., Jeng Y.R., Lomakin E. An exact semi-analytic solution for residual stresses and strains within a thin hollow disc of pressure sensitive material subject to thermal loading // Meccanica, 2014, vol. 49(4), pp. 775 – 794.
18. Kitching R., Houlston R., Johnson W. A theoretical and experimental study of hemispherical shells subjected to axial loads between flat plates // International Journal of Mechanical Sciences, 1975, vol. 17(11–12), pp. 693 - 694, doi 10.1016/0020-7403(75)90072-7
19. Updike D.P., Kalnins A. Contact pressure between an elastic spherical shell and a rigid plate // Journal of Applied Mechanics, 1972, vol. 39(4), pp. 1110 – 1114, doi 10.1115/1.3422838
20. Essenburg F. On surface constraint in plate problems // Journal of Applied Mechanics of ASME, 1962, vol. 29(2), pp. 340 – 344, doi 1115/1.3640552

21. Long R., Shull K.R., Hui C.Y. Large deformation adhesive contact mechanics of circular membranes with a flat rigid substrate // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2010, vol. 58(9), pp. 1225 - 1242, doi 10.1016/j.jmps.2010.06.007
22. Srivastava A., Hui C.Y. Large deformation contact mechanics of long rectangular membranes. I. Adhesionless contact // *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 2013, 469:20130, 424, doi 10.1098/rspa.2013.0424
23. Patil A., DasGupta A. Constrained inflation of a stretched hyperelastic membrane inside an elastic cone // *Meccanica*, 2015, vol. 50(6), pp. 1495 – 1508.
24. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. - СПб.: Изд-во Санкт Петербургского университета, 2010. – 380 с.
25. Axelrad E.L. *Theory of Flexible Shells* // North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, 1987, vol. 28: available at: <https://www.elsevier.com/books/theory-of-flexible-shells/axelrad/978-0-444-87954-7>
26. Soldatos K.P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: A survey // *Applied Mechanics Reviews*, 1999, vol. 52(8), pp. 237 - 274, doi 10.1115/1.3098937
27. Kumar A, Patel BP (2017) Nonlinear dynamic response of elliptical cylindrical shell under harmonic excitation // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 98(1), pp. 102 - 113, doi 10.1016/j.ijnonlinmec.2017.10.008
28. Ibrahim S.M., Patel B.P., Nath Y. On the nonlinear dynamics of oval cylindrical shells // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2010, vol. 5(6), pp. 887 - 908, doi I 10.2140/jomms.2010.5.887

29. Vaziri A. Mechanics of highly deformed elastic shells // *Thin-Walled Structures*, 2009, vol. 47(6-7), pp. 692 - 700, doi 10.1016/j.tws.2008.11.009
30. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. - М.: Наука, 1967. – 376.
31. Kim J.H., Ahn Y.J., Jang Y.H., Barber J.R. Contact problems involving beams // *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51 (25-26), pp. 4435 - 4439.