

Труды МАИ. 2022. № 126
Trudy MAI, 2022, no. 126

Научная статья
УДК 519.633
DOI: [10.34759/trd-2022-126-06](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-06)

НОВЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Иван Иванович Кутыш

ООО «ЭКОГИБЕНТ»,

Москва, Россия

ecogibent@mail.ru

Аннотация: Представлены новые результаты исследований сходимости тригонометрических рядов Фурье (далее ТРФ или просто рядов) с коэффициентами Фурье, построенными различными методами.

Используя понятие квадрата относительной нормы, детально проанализирована возможность аналитического представления заданной функции рядом и установлено, что причиной расходимости ТРФ при достаточном увеличении его степени является возникновение эффекта Гиббса, то есть колебания ряда относительно своей функции.

Показано, что при оценке сходимости ТРФ к его функции в качестве независимой переменной относительной нормы вместо текущего значения степени ряда k целесообразно использовать текущее значение обобщенной переменной $\theta = k\pi/n$, которая позволяет получить более общие результаты.

Установлено, что свойства ТРФ полностью определяются методами построения их коэффициентов Фурье.

Предложены методы построения сходящихся и равномерно сходящихся ТРФ и исследована сходимость этих рядов к своим функциям.

Построенные равномерно сходящиеся ТРФ сопоставлены с известными рядами Филона и Ланцоша.

Даны рекомендации по построению такого ТРФ, который обеспечивает равномерную сходимость к своей функции $f(x)$ и корректное нахождение его первых производных, свободных от эффекта Гиббса.

Ключевые слова: Расходимость тригонометрических рядов Фурье, эффект Гиббса, коэффициенты Фурье, степень ряда, узлы аппроксимации, нормированная функция, скорость сходимости ряда Фурье, квадрат относительной нормы, обобщенная переменная, равномерно сходящийся тригонометрический ряд Фурье, укороченный тригонометрический ряд Фурье с разложением только по синусам, квадратурная формула.

Для цитирования: Кутыш И.И. Новые методы построения равномерно сходящихся тригонометрических рядов Фурье // Труды МАИ. 2022. № 126. DOI: [10.34759/trd-2022-126-06](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-06)

Original article

NEW METHODS FOR CONSTRUCTING UNIFORMLY CONVERGENT TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES

Ivan I. Kutysh

Company "ECOGIBENT",

Moscow, Russia

ecogibent@mail.ru

Abstract: New results of studies of convergence of trigonometric Fourier series (TFS) with Fourier coefficients constructed by various methods are presented.

Using the concept of the square of the relative norm, the possibility of an analytical representation of a given TFS function is analyzed in detail and it is established that the cause of the divergence of the TFS with a sufficient increase in its degree is the occurrence of the Gibbs effect.

It is shown that when assessing the convergence of the TFS to its function as an independent change of the relative norm, instead of the current value of the degree of the series k , it is reasonable to use the current value of the generalized variable $\Theta=k\pi/n$, which allows us to obtain more general results. Moreover, it is sufficient to control only the value of Θ , which determines the amount of calculations.

Recommendations are given for the construction of such Fourier coefficients that ensure uniform convergence of the TFS to its functions $f(x)$ and the correct finding of their first derivatives free of the Gibbs effect.

Uniformly convergent TFSs constructed according to the proposed method are compared with the known Filon and Lanczos series.

In contrast to the Lanczos method, it is proposed to use variables σ -multipliers depending on the new variable ζ , which affects the rate of convergence of the series to its function $f(x)$ and the accuracy of determining the first derivatives of the series without the occurrence of the Gibbs effect.

The results on the construction of uniformly convergent TFSs relate to any maximum-normalized periodic function $f(x)$ in the interval $[-\pi, \pi]$ satisfying Dirichlet conditions. Moreover, if the function $f(x)$ has zeros at the ends of a given interval, then it is advisable to build a shortened TFS with decomposition only in terms of sines, hence a simpler TFS.

The proposed uniformly converging TFSs can find application in solving various problems of gas dynamics and heat and mass transfer described by partial differential equations.

Keywords: Fourier coefficients, approximation nodes, Gibbs effect, series step, normalized function, convergence rate of Fourier series, uniformly converging trigonometric Fourier series, square of relative norm, generalized variable, quadrature formula, Fourier series with sine expansion only.

For citation: Kutysh I.I. New methods for constructing uniformly convergent trigonometric Fourier series. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. DOI: [10.34759/trd-2022-126-06](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-06)

Введение

При решении экологических проблем предметом изучения часто являются процессы разложения и образования вредных веществ в газах, сопровождающиеся

эмиссией вредных веществ в продуктах сгорания различных энергоустановок.

Обеспечение работоспособности камер сгорания авиационных двигателей и стационарных энергоустановок, связано с исследованием процессов тепло-массообмена с учетом физико-химических превращений, осложненных турбулентностью течений газа.

При организации тепловой защиты поверхностей летательных аппаратов (самолетов, ракет и пр.), движущихся с большими скоростями, также приходится моделировать процессы тепло-массообмена и физико-химических превращений.

Для моделирования таких процессов, как правило, применяют дифференциальные уравнения математической физики, которые в зависимости от сложности решаемой технической задачи могут быть гиперболическими, параболическими и эллиптическими [1 - 4].

Дифференциальные уравнения, моделирующие процессы тепло-массообмена в газах, требуют получения решений с высокой степенью точности. Бурный темп развития вычислительной техники, к сожалению, пока не обеспечивает получение требуемых характеристик при решении таких задач на основе известных численных методов. Требования к точности алгоритмов повышаются так быстро, что это обстоятельство побуждает математиков к поиску более универсальных численных методов решения дифференциальных уравнений, ориентированных на использование ЭВМ, и более экономичных численных алгоритмов их реализации. Эти методы условно можно разделить на три различных типа:

- метод разделения переменных (МРП) [1];
- спектральные методы (СМ) [5 – 8];

- методы конечных элементов (МКЭ) [9, 18];
- методы конечных разностей (МКР) [10 – 15, 19 - 22].

Чтобы использовать современные ЭВМ, необходимо преобразовать непрерывную задачу, описанную дифференциальным уравнением, к чисто алгебраической форме, включающей только основные арифметические операции. Среди различных возможных видов дискретизации одним из простейших является МКР. Значительная часть вычислительных алгоритмов при реализации МКР основана на сведении исходной дифференциальной задачи к задачам линейной алгебры. Итерационные методы решения больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений приведены в монографии [15]. Размерность такой системы зависит от параметра редукции. Обычно таким параметром является шаг разностной сетки. Следовательно, чем более высокую точность мы хотим обеспечить в решении задачи, тем меньший параметр редукции мы должны выбрать. Уменьшая этот параметр, мы увеличиваем количество линейных уравнений и объем вычислительной работы. Как известно, наиболее простые и экономичные схемы дают решение, точность которого пропорциональна первой либо второй степени этого параметра. Линейная комбинация численных решений линейных задач с различными параметрами редукции по методу Ричардсона [16] позволила повысить порядок точности решения разностных схем, однако с одновременным увеличением объема вычислительной работы. При значительном уменьшении параметра редукции неизбежно нарушается устойчивость вычислительного процесса. Однако, с точки зрения экономичности вычислительного процесса, увеличение точности численного решения за счет все большего измельчения разностной сетки является бесперспективным.

Возможен иной подход в численном решении дифференциальных уравнений, при котором искомое решение представляется рядом Фурье. Именно этот подход, реализованный при разработке СМ, в настоящее время является наиболее мощным и универсальным средством повышения точности решения уравнений математической физики и устойчивости вычислительного процесса, так как, в противоположность МКР, производные в СМ определяются через производные базисных функций, без использования каких-либо аппроксимаций.

В отличие от СМ в МКЭ применяются базисные функции ограниченной гладкости, которые кусочно-непрерывны и отличны от нуля только на определенных элементах расчетной области, что требует введения дополнительных условий для «сшивки» элементов и ограничивает гладкость полученного решения.

Главным достоинством СМ следует считать высокую скорость сходимости вычислительного процесса.

Необходимо обратить внимание также на то, что размеры матриц в МКР и в СМ определяются различными параметрами. В МКР размер матрицы зависит от числа узлов разностной сетки. В зависимости от размеров расчетной области и требований к точности искомого приближенного решения размер матрицы в МКР может достигать огромных размеров, так как точность полученного решения зависит от степени измельчения разностной сетки. В СМ размер матрицы и точность искомого приближенного решения определяется степенью конечного ряда Фурье, которым оно представляется. Это обстоятельство является еще одним важным преимуществом СМ по сравнению с МКР.

Важно отметить, что при решении с помощью СМ самых сложных задач,

описываемых дифференциальными уравнениями, подкупает логическая простота получения искомого приближенного решения, которое всегда остается аналитическим.

Частным случаем СМ является СМ Галеркина [6], в котором в качестве искомого приближенного решения используют конечные тригонометрические ряды Фурье (ТРФ), сходимость которых к своей функции априори лишь предполагается. А поскольку, при использовании ЭВМ имеют дело только с конечными ТРФ, то остается неисследованной важная проблема сходимости конечного ТРФ. Без решения проблемы сходимости ТРФ СМ Галеркина можно рассматривать только как формальный метод решения уравнений математической физики, применять который следует с большой осторожностью.

Если вместо обычных ТРФ в СМ Галеркина использовать сходящиеся или равномерно сходящиеся ТРФ, то такой СМ Галеркина будем называть улучшенным спектральным методом (УСМ).

Именно проблеме построения сходящихся и равномерно сходящихся ТРФ посвящена данная статья. Результаты по сходимости ТРФ, полученные в статье, существенно повышают эффективность СМ Галеркина и превращают его в наиболее экономичный и устойчивый метод решения дифференциальных уравнений в частных производных.

После замены на заданной разностной сетке искомого точного решения дифференциального уравнения конечным ТРФ найденное приближенное решение можно аналитически дифференцировать, интегрировать и получать с его помощью гораздо больше информации, по сравнению с той информацией, которая может быть получена с помощью разностного решения. В отличие от разностных методов УСМ

ведет себя так, что при последовательном измельчении сетки степень устойчивости вычислительного процесса только повышается. Объем вычислений возрастает незначительно. Точность решения определяется преимущественно степенью ТРФ. При таком подходе можно практически независимо управлять точностью решения и устойчивостью вычислительного процесса. Предложенные автором методы построения сходящихся и равномерно сходящихся ТРФ позволили получить полную независимость в управлении скоростью сходимости ТРФ и точностью решения. Ранее между оптимальным значением степени ряда и параметром редукции существовала строгая зависимость, что вызывало неудобства при выполнении расчетов и ограничивало точность решения.

Чтобы показать значение сходящихся и равномерно сходящихся ТРФ, построению которых посвящена данная статья, для СМ Галеркина и УСМ, кратко рассмотрим принципы их построения и математическое обоснование.

Рассмотрим в метрическом пространстве $L_2[0, 1]$ уравнение

$$Au = f, \quad (1)$$

где A – положительно определенный дифференциальный оператор на линейном пространстве D_A , плотном в метрическом пространстве $L_2[0, 1]$.

Так как элемент $u_0 \in D_A$, минимизирующий соответствующий функционал [25], является решением уравнения (1), то этот элемент, как обобщенное решение уравнения (1), однозначно определяется из скалярного произведения

$$(Au_0 - f, \varphi_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где $R = Au_0 - f$ – невязка, а φ_k – весовые функции.

Пусть элементы

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots \quad (3)$$

образуют ортогональный базис в $L_2[0, 1]$, для которого выполняются условия

$$(\varphi_l, \varphi_k)_A = \begin{cases} 0 & (l \neq k), \\ \lambda_k & (l = k, \lambda_k > 0) \end{cases} \quad (l, k = 1, 2, \dots, m). \quad (4)$$

В качестве базиса (3) рассмотрим тригонометрическую систему

$$1, \cos \pi x, \sin \pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \dots, \cos m\pi x, \sin m\pi x, \quad (5)$$

ортогональность которой в $L_2[0, 1]$ проверяется вычислением соответствующих интегралов [17].

Будем искать приближенное решение \hat{u}_m уравнения (1) в виде конечного ТРФ с разложением только по синусоидальным элементам базиса (5)

$$u_0 \approx \hat{u}_m = \sum_{l=1}^m b_l \sin l\pi x \quad (l = 1, 2, \dots, m; \forall \hat{u}_m \in D_A), \quad (6)$$

где m – положительное целое число;

b_l – неизвестные коэффициенты.

Подставить \hat{u}_m в соотношение (2) вместо u_0 справедливо только в том случае, если выполняется условие

$$\hat{u}_m \Big|_{m \rightarrow \infty} \rightarrow u_0. \quad (7)$$

Ниже будут построены такие ТРФ, которые обеспечивают выполнение этого условия.

Минимизируя в $L_2[0, 1]$ невязку $R_m = A\hat{u}_m - f$ и после подстановки ТРФ (6) в соотношение (2) вместо u_0 , получим условия

$$\left(\sum_{l=1}^m b_l A \sin l\pi x - f, \sin k\pi x \right) \cong 0 \quad (l, k = 1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

для определения неизвестных коэффициентов b_l .

Если оператор A линейный и, к тому же, симметричный, то условия (8) можно представить в векторно-матричном виде

$$|K| b = h. \quad (9)$$

Причем элементы матрицы $|K|$ и компоненты вектора h вычисляются из соотношений

$$\begin{cases} K_{lk} = (\sin l\pi x, \sin k\pi x)_A & (1 \leq l, k \leq m), \\ h_k = (f, \sin k\pi x) & (1 \leq k \leq m). \end{cases} \quad (10)$$

Поскольку выполняются условия (4) и для элементов тригонометрической системы (5), то матрица (9) приобретает диагональную структуру, которая позволяет сразу выписать решение (6) в явном виде и представить формулы для определения коэффициентов b_l

$$b_l = (f, \sin l\pi x) = 2 \int_0^1 f(x) \sin l\pi x \, dx \quad (l = 1, 2, \dots, m). \quad (11)$$

Формулы (11) совпадают с формулами для коэффициентов Фурье [17], следовательно, ряд (6) является ТРФ с разложением только по синусам.

Таким образом, мы приходим к необходимости определения таких коэффициентов Фурье ТРФ, которые бы обеспечили выполнение условия (7), и тогда скалярное произведение (2) равнялось бы нулю.

Основное содержание статьи. Сходимость ТРФ давно представляет значительный интерес для математиков [23, 27 - 30].

Известно, что для любой периодической функции $f(x)$ в интервале $[-\pi, \pi]$, удовлетворяющей условиям Дирихле, можно построить сходящийся ТРФ:

$$Q_{\infty}(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

где $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$. (13)

Кроме того, любую функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$, одна из которых будет иметь нули на концах заданного интервала. Тогда для такой периодической функции на интервале $[0, 1]$ целесообразно строить укороченный ТРФ с разложением только по синусам, следовательно, более простой ТРФ:

$$Q_m(x) = \sum_{k=1}^m b_k \sin k\pi x \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (14)$$

где $b_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx$. (15)

Однако их практическое применение в качестве искомым решений дифференциальных уравнений, а также для аналитического представления функций, заданных таблично или аналитических функций, плохо поддающихся дифференцированию и интегрированию, сдерживалось возникновением эффекта Гиббса при достаточном увеличении степени ТРФ.

Точки, в которых задана функция $f(x)$ и по которым вычисляются коэффициенты Фурье, назовем узлами аппроксимации. Соответствующую этим узлам сетку назовем крупной сеткой

$$\omega_{\tau} = \{x_i = i\tau; i = 0, 1, \dots, n\} \quad (16)$$

с шагом $\tau = 1/n$ ($n \geq 2$), где n – четное, целое число участков разбиения интервала $[0, 1]$, на котором задана функция $f(x)$.

Чтобы исследовать поведение ряда (14) между узлами аппроксимации и влияние эффекта Гиббса, ряд и его функцию $f(x)$ необходимо вычислять на более мелкой сетке

$$\omega_\tau^* = \{x_i = i\tau; i = 0, 1, \dots, n^*\}, \quad (17)$$

где $n^* = 10n$.

Если задача заключается в обеспечении точности аналитического восстановления функции $f(x)$ рядом (14), то его сходимость к функции $f(x)$ оценивают по квадрату относительной нормы

$$S_m(x) = \|Q_m(x) - f(x)\|^2 / (n+1) = \sum_{i=0}^n [Q_m(x) - f(x)]^2 / (n+1) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (18)$$

вычисленной на крупной сетке ω_τ .

Если же задача заключается в обеспечении точности определения первых производных ряда, то его сходимость к функции $f(x)$ оценивают по квадрату относительной нормы

$$S_m^*(x) = \|Q_m(x) - f(x)\|^2 / (n^* + 1) = \sum_{i=0}^{n^*} [Q_m(x) - f(x)]^2 / (n^* + 1) \quad (i = 0, 1, \dots, n^*), \quad (19)$$

вычисленной на мелкой сетке ω_τ^* .

При этом коэффициенты Фурье этого ряда вычисляют по значениям функции $f(x)$, заданной только в узлах аппроксимации.

Для краткости функции $S_m(x)$ и $S_m^*(x)$ далее будем называть относительными нормами. Причем в качестве независимой переменной функции $S_m(x)$ или $S_m^*(x)$ вместо текущей степени ряда k будем использовать обобщенную переменную $\theta =$

$k\pi/n$, позволяющую получить более общие результаты по сходимости рядов.

Чтобы исследовать эффект Гиббса, для периодической функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям Дирихле, на интервале $[0, 1]$ воспользуемся рядом (14) с коэффициентами Фурье (15).

Свойства ряда (14) с коэффициентами Фурье (15) и их сходимость к заданной функции $f(x)$ были детально исследованы автором в работах [24 – 26], используя теорию гармонического анализа.

Применяя формулу Симпсона ко всему подынтегральному выражению интеграла (15) в работе [24] для коэффициентов Фурье b_k автором была получена квадратурная формула:

$$b_k = 4(2\sigma_1 + \sigma_2)/(3n) \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (20)$$

$$\text{где } \sigma_1 \equiv \sum_{i=1}^{n-1} f_i \sin(\theta_i) \quad (i = 1, 3, \dots, n-1), \quad \theta = k\pi/n,$$

$$\sigma_2 \equiv \sum_{i=2}^{n-2} f_i \sin(\theta_i) \quad (i = 2, 4, \dots, n-2).$$

На рис. 1 показано влияние параметра сетки n на сходимость ряда (14) с коэффициентами Фурье (20) к функции $f(x) = \sin(\pi x^2)$ по относительной норме (18).

Как видно из графиков (Рис. 1), ряд (14) имеет ограниченную сходимость, которая характеризуется значением обобщенной переменной

$$\theta_{opt} \equiv m_{opt}\pi/n = \pi/2. \quad (21)$$

Из соотношения (21) следует, что $m_{opt} = n/2$.

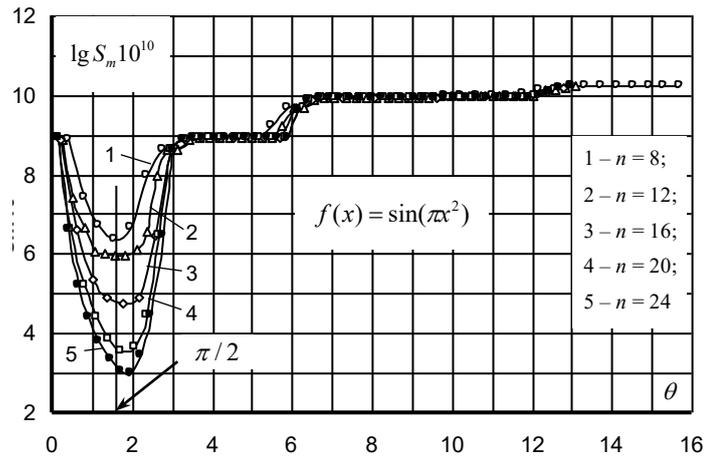


Рис. 1. Влияние параметра сетки n и обобщенной переменной θ на относительную норму $S_m(x)$.

Причем значения θ , при которых ряд (14) с коэффициентами Фурье (20) является равномерно сходящимся, изменяются в узком диапазоне $\pi/n \leq \theta \leq \pi/2$.

Ряд (14), обеспечивающий наилучшую сходимость по относительной норме (18) к его функции $f(x)$, принимает вид

$$Q_{m,opt}(x) = \sum_{k=1}^{n/2} b_k \sin(k\pi x) \quad (k=1, 2, \dots, n/2). \quad (22)$$

При $\theta > \theta_{opt} = \pi/2$ для всех значений n ТРФ расходятся, а значение $S_m(x)$ растет.

Но при достижении значения $\theta \approx \pi$ происходит стабилизация сходимости всех рядов при одном и том же значении $S_m(x)$. При $\theta \approx 2\pi$ $S_m(x)$ снова скачкообразно возрастает. При каждом новом скачке $S_m(x)$ период удваивается по отношению к периоду предыдущего скачка.

Явление Гиббса, показанное на рис. 2, носит сложный характер и проявляется в том, что вторые производные ряда теряют свой физический смысл.

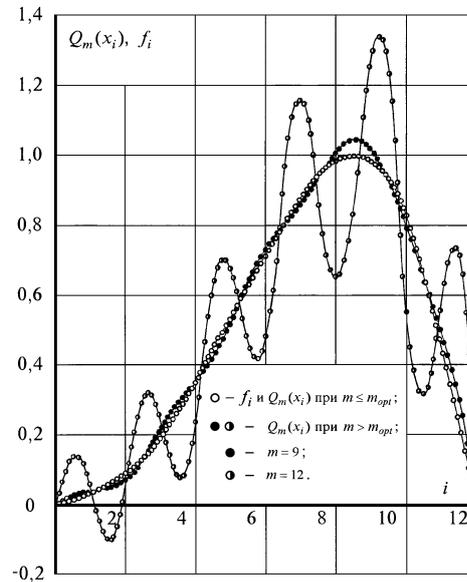


Рис. 2. Явление Гиббса.

Чтобы объяснить расходимость ряда, проанализируем изменение относительной нормы (18) по обобщенной переменной θ .

Так, в области $\theta < \theta_{opt}$ ряд (14) с коэффициентами Фурье (20) совпадает с функцией $f(x)$ качественно с точностью до знака второй производной и количественно с точностью до известного значения относительной нормы $S_m(x)$.

В области $\theta_{opt} < \theta \leq \pi$ ряд Фурье (14) дает, в основном, неверный качественный результат, заключающийся в том, что производные ряда, начиная со второй, имеют неверный физический смысл. Причем с ростом θ обратно пропорционально уменьшается период колебаний ряда относительно своей функции $f(x)$ (растет частота колебаний) и пропорционально растет их амплитуда. По длине интервала $[0, 1]$ явление Гиббса не носит строго периодический характер. В этой области, как видно из рис. 2,

рост погрешности восстановления функции рядом объясняется пропорциональным ростом амплитуды ряда относительно своей функции $f(x)$.

В области $\theta > \pi$, кроме того, результат становится неверным и количественно. Причем с ростом m сохраняются постоянными как период колебаний ряда, так и его амплитуды. Таким образом, как и следовало ожидать, в этой области погрешность восстановления функции рядом примерно одинакова (Рис. 2).

В данной статье представлены новые результаты исследований сходимости ряда (14) к его функции $f(x)$.

В частности, исследовалось поведение ряда (14) с коэффициентами Фурье (20) между узлами аппроксимации, используя относительные нормы (18) и (19). Результаты этих исследований приведены на рис. 3.

Следует обратить внимание на то, что поведение ряда (14) функции $f(x) = \sin(\pi x^2)$ с коэффициентами Фурье (20), как видно из рис. 3, не изменяется при использовании и крупной сетки ω_τ , и мелкой сетки ω_τ^* .

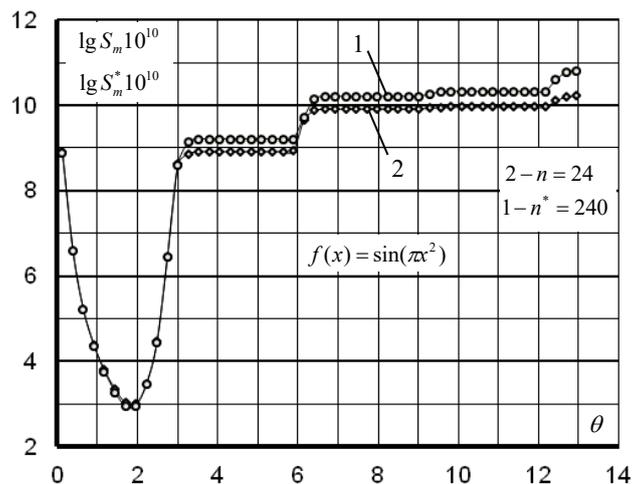


Рис. 3. Влияние числа узлов сетки на зависимости относительных норм $S_m(x)$ и $S_m^*(x)$ от обобщенной переменной θ .

Изменения относительных норм $S_m(x)$ и $S_m^*(x)$ проявляются только в областях их стабилизации, то есть при $\theta > \pi$. Такое же поведение этого ряда, как показывают результаты численных исследований, наблюдается для любой другой нормированной по максимуму функции $f(x)$, что свидетельствует об универсальности полученного результата.

При использовании равномерно сходящегося ряда (22) с коэффициентами Фурье (20) с целью определения его производных можно пользоваться как крупной, так и мелкой сеткой. Необходимо учитывать только то, что при использовании мелкой сетки объем вычислений будет гораздо больше. Для увеличения скорости сходимости ряда (22) необходимо применить более мелкую сетку, на которой вычисляются коэффициенты Фурье (20).

Таким образом, чтобы существенно уменьшить или полностью исключить влияние эффекта Гиббса и обеспечить при любых n всегда корректное определение первых производных ряда (22) с коэффициентами Фурье (20), построенного для функции $f(x)$, необходимо использовать оптимальное значение обобщенной переменной $\theta_{opt} = \pi/2$, при котором этот ряд обладает максимально возможной скоростью сходимости.

Постоянный контроль оптимального значения θ_{opt} при восстановлении функции $f(x)$ рядом (22) с коэффициентами Фурье (20), вызывает вычислительные неудобства.

Чтобы избежать подобных неудобств, можно построить сходящийся ряд, обобщенную переменную θ которого можно выбирать любой, ограничиваясь только

контролем объема вычислений.

Коэффициенты Фурье данного ряда были получены путем применения формулы Симпсона только к функции $f(x)$ из подынтегрального выражения интеграла (15).

Однако вывод формулы для коэффициента Фурье из-за его громоздкости не приведен.

$$Q_m^+(x) = \sum_{k=1}^m a_k \sin(k\pi x) \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (23)$$

где $a_k = 2[\beta\sigma_3 + \gamma(2\sigma_4 + \theta\sigma_5)]/n \quad (k = 1, 2, \dots, m).$ (24)

Причем

$$\sigma_3 \equiv \sum_{i=1}^{n-1} (f_{i+1} + f_{i-1}) \sin(\theta i) \quad (i = 1, 3, \dots, n-1),$$

$$\sigma_4 \equiv \sum_{i=1}^{n-1} (2f_i - f_{i+1} - f_{i-1}) \sin(\theta i) \quad (i = 1, 3, \dots, n-1),$$

$$\sigma_5 \equiv \sum_{i=1}^{n-1} (f_{i+1} - f_{i-1}) \cos(\theta i) \quad (i = 1, 3, \dots, n-1),$$

$$\beta \equiv \sin \theta / \theta, \quad \gamma \equiv (\sin \theta - \theta \cos \theta) / \theta^3, \quad \theta = k\pi / n.$$

Сходимость рядов (23) с коэффициентами Фурье (24) к функции $f_1(x) = \sin(\pi x^2)$ по обобщенной переменной θ для различных сеток n , в которых вычисляются коэффициенты Фурье, показана на рис. 4а. А на рис. 4б – сходимость этих же рядов к

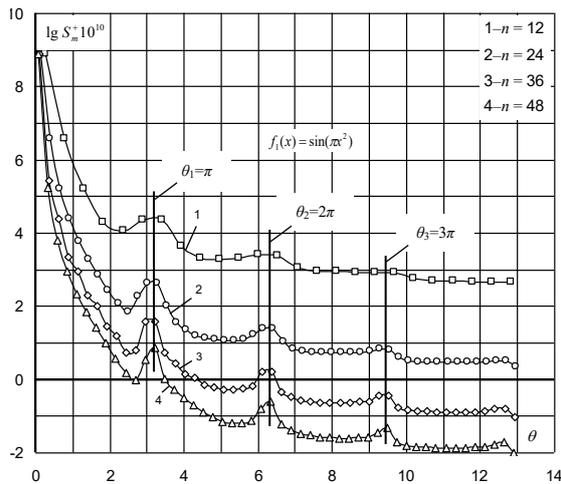


Рис. 4а. Влияние параметра сетки n и обобщенной переменной θ на относительную норму $S_m^+(x)$.

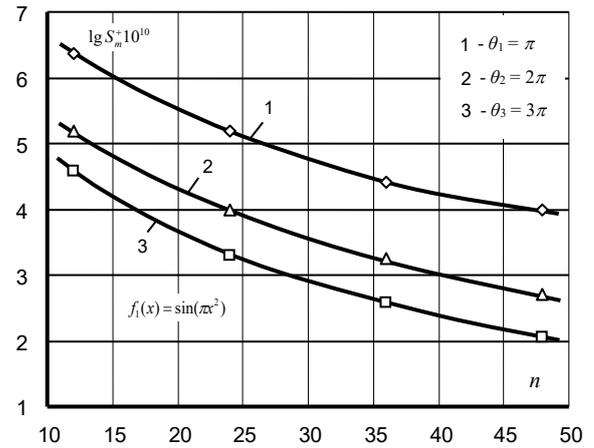


Рис. 4б. Влияние параметра сетки n на относительную норму $S_m^+(x)$ для трех значений обобщенной переменной θ .

функции $f_1(x) = \sin(\pi x^2)$ по параметру n для 3-х сечений по θ , в которых происходят возмущения функции $S_m^+(x)$.

Из рис. 4а видно, что получен сходящийся ряд (23) независимо от количества узлов аппроксимации n , но не равномерно сходящийся, так как возникают возмущения функции $S_m^+(x)$ с периодом π по θ , которые подавляются с ростом θ . Причем диапазон возмущения функции $S_m^+(x)$ с увеличением n уменьшается, а его амплитуда растет. Положения пиков возмущения при θ_1 , θ_2 и θ_3 для всех n строго сохраняется, а положение θ_{opt} с увеличением n незначительно смещается вправо, то есть в сторону

больших θ , за счет сужения диапазона возмущения функции $S_m^+(x)$.

Ряд (23) перестает быть равномерно сходящимся для всех n при $\theta_{opt} \geq 2.5 - 2.7$.

Из рис. 4б видно также, что скорость сходимости этого ряда существенно падает при переходе от сечения θ_1 к сечению θ_3 , то есть с ростом θ . Однако с увеличением n , как видно из рис. 4б, скорость сходимости ряда (23) во всех сечениях, где функция

$S_m^+(x)$ имеет возмущения, падает одинаково.

При выборе числа узлов аппроксимации эти важные факты необходимо учитывать, так как для достижения заданной точности восстановления функции $f(x)$ рядом (23) с коэффициентами Фурье (24) можно существенно уменьшить объем вычислений.

В работах [24 - 26] автором было показано, что не только ряда (14) с коэффициентами Фурье (20), но и ряд (23) с коэффициентами Фурье (24) не обеспечивают равномерной сходимости к функции $f(x)$ и не позволяют устранить эффект Гиббса при $\theta > 2.5 - 2.7$.

Вопросу уменьшения или устранения эффекта Гиббса, преимущественно для разрывных функций, посвящено много работ различных авторов, среди которых следует отметить Филона, Хемминга, Фейера, Ланцоша [27] и Карслоу [28]. Метод, разработанный Ланцошем, за счет введения специальных сглаживающих коэффициентов позволяет только сильно уменьшить колебания ТРФ относительно своей функции. Метод Фейера, использующий среднее арифметическое частичных сумм, позволяет полностью исключить колебания ряда. Однако он уступает методу Ланцоша по точности, так как ряд Фейера является, по сути, огибающей колеблющегося ТРФ, который может существенно уклоняться от своей функции из-за эффекта Гиббса.

Сопоставления обычного ТРФ и тригонометрических рядов Фейера, Филона и Ланцоша по их сходимости к функции $f(x)$ выполнены автором в работе [24] и было показано, что, несмотря на значительные усилия различных исследователей, проблема устранения эффекта Гиббса в настоящее время пока не решена полностью.

Поэтому автором был построен равномерно сходящийся ряд, обеспечивающий не только высокую точность восстановления функции $f(x)$, но и позволяющий получить достоверные значения первых производных ряда путем подавления эффекта Гиббса для любых значений θ .

Для этого одно полное колебание ряда, сосредоточенное в достаточно малой окрестности произвольной точки x_0 , заменялось монотонной и только выпуклой (вогнутой) функцией в этой окрестности:

$$Q_m(x_0) \approx Q_m^*(x_0) = D \sin(\pi x_0). \quad (25)$$

Полагая, что коэффициент пропорциональности D в окрестности точки x_0 не зависит от x , он определялся из условия равенства интегралов в этой окрестности $(-h^*, h^*)$, подынтегральными функциями которых являются соответственно ряды $Q_m(x)$ и $Q_m^*(x)$, т. е.

$$\sum_{k=1}^m \int_{x_0-h^*}^{x_0+h^*} \sin(k\pi x) dx \approx D \int_{x_0-h^*}^{x_0+h^*} \sin(\pi x) dx. \quad (26)$$

Следует подчеркнуть, что шаг интегрирования $2h^*$ при исследовании сходимости рядов не совпадает с удвоенным промежутком $2h$, где $h = 1/n$, на который разбивается интервал $[0, 1]$.

Решим последовательно интегралы, входящие в приближенное равенство (26).

$$1. \int_{x_0-h^*}^{x_0+h^*} \sin(\pi x) dx = -\cos(\pi x) \Big|_{x_0-h^*}^{x_0+h^*} / \pi = [\cos(\pi(x_0 - h^*)) - \cos(\pi(x_0 + h^*))]. \quad (27)$$

Применим формулы приведения к каждому слагаемому полученной суммы:

$$\cos(\pi x_0 - \pi h^*) = \cos(\pi x_0) \cos(\pi h^*) + \sin(\pi x_0) \sin(\pi h^*),$$

$$\cos(\pi x_0 + \pi h^*) = \cos(\pi x_0) \cos(\pi h^*) - \sin(\pi x_0) \sin(\pi h^*).$$

Подставим формулы приведения в соотношение (27) и после некоторых преобразований получим:

$$\int_{x_0-h^*}^{x_0+h^*} \sin(\pi x) dx = 2[\sin(\pi x_0) \sin(\pi h^*)] / \pi \quad (28)$$

2. По аналогии с интегралом (27) решим второй интеграл из приближенного равенства (26):

$$\int_{x_0-h^*}^{x_0+h^*} \sin(k\pi x) dx = 2[\sin(k\pi x_0) \sin(\pi h^*)] / (k\pi). \quad (29)$$

Выражения (28) и (29) подставим в (26) и после сокращений будем иметь:

$$D \approx [1/(\sin \pi h^* \sin \pi x_0)] \sum_{k=1}^m (a_k / k) \sin(k\pi h^*) \sin(k\pi x_0). \quad (30)$$

Здесь a_k – коэффициенты Фурье (24) ряда (23).

Распространяя коэффициент D для любой точки x интервала $[0, 1]$, из равенства (25) с учетом того, что $\theta_h = k\pi h^*$, получим

$$Q_m^*(x) = (1/\sin \pi h^*) \sum_{k=1}^m (a_k / k) \sin(\theta_h) \sin(k\pi x) \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Далее, замечая, что для малых πh^* , можно заменить $\sin(\pi h^*)$ просто на πh^* . Тогда окончательно получим выражение для нового ТРФ

$$Q_m^*(x) = \sum_{k=1}^m b_k^* \sin(k\pi x) \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (31)$$

где $b_k^* = \sigma_k a_k$, $\sigma_k = \sin(\theta_h) / \theta_h$, $\theta_h = k\pi h^*$. (32)

Введем новую переменную $h^* = 1/(\zeta m)$. Тогда $\theta_h = k\pi/(\zeta m)$, где $\zeta = 1, 2, \dots, n$.

Легко видеть из выражения (32), что при $\zeta = n$ для любых k из-за малых θ_h $b_k^* = a_k$ и ряд (31) превращается в ряд (23).

В выражении для коэффициентов Фурье (32) присутствуют σ_k -множители,

подобные σ_k -множителям Ланцоша [27].

Однако, в методе Ланцоша σ_k -множители - постоянные величины, остающиеся неизменными при построении ряда Ланцоша после выбора числа n : $\sigma_k = \sin(k\pi/2n)/(k\pi/2n)$, где n – число участков разбиения интервала $[0, 1]$.

В отличие от метода Ланцоша, содержащиеся в коэффициентах Фурье (32) σ_k -множители являются переменными величинами за счет введения новой переменной h^* , которая позволяет путем задания значения ζ изменять частоту колебаний ряда (31) и влиять как на эффект Гиббса, так и на его скорость сходимости к своей функции $f(x)$, следовательно, позволяет одновременно влиять и на точность восстановления функции $f(x)$ рядом. При этом задача состоит в том, чтобы найти такое значение переменной ζ , при которой построенный ряд (31) стал бы равномерно сходящимся.

Равномерно сходящийся ряд (31) удобен в использовании, так как, увеличивая степень ряда m , достигается значительно бо́льшая точность и достоверность представления функции $f(x)$, а также достоверность представления ее первых производных рядом, хотя растет объем вычислений.

Чтобы получить универсальные рекомендации по выбору оптимального значения степени ряда m , исследуем сходимость ряда (31) с коэффициентами Фурье (32) к двум функциям, различным по своим свойствам: $f_1(x) = \sin(\pi x^2)$, действующая на всем интервале $[0, 1]$, и $f_2(x) = -x$ при $0 \leq x \leq 0.5$ и $f_2(x) = 4(x - 0.5)^2 - x$ при $0.5 \leq x \leq 1$.

Выбор функции $f_1(x)$ оправдан тем, что она имеет нули на концах интервала, имеет точку перегиба внутри интервала $[0, 1]$, то есть она вогнуто-выпуклая, и, кроме того, она нормирована по максимуму.

Функция $f_2(x)$ примечательна тем, что она только выпуклая, и тоже имеет нули на концах интервала. Однако на первой половине интервала $[0, 1]$ $f_2(x)$ представляет собой прямую, которую, как известно, трудно восстанавливать рядом и обеспечивать достоверные значения ее первых производных. А на второй половине интервала $[0, 1]$ $f_2(x)$ – парабола. В точке $x = 0.5$ она сопряжена с прямой, а на правом конце интервала $[0, 1]$ она равна нулю. Причем функция $f_2(x)$ требует предварительной нормировки по максимуму.

При численном исследовании новый ТРФ (31) будем сравнивать со сходящимся ТРФ, полученным Филоном [27]:

$$Q_m^{**}(x) = \sum_{k=1}^m b_k^{**} \sin(k\pi x) \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (33)$$

где $b_k^{**} = 4(2\gamma\sigma_1 + \beta_2\sigma_2) / n \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (34)$

$$\sigma_1 \equiv \sum_{i=1}^{n-1} f_i \sin(\theta i) \quad (i = 1, 3, \dots, n-1),$$

$$\sigma_2 \equiv \sum_{i=2}^{n-2} f_i \sin(\theta i) \quad (i = 2, 4, \dots, n-2),$$

$$\gamma \equiv (\sin \theta - \theta \cos \theta) / \theta^3, \quad \beta_2 \equiv [\theta(1 + \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta] / \theta^3, \quad \theta = k\pi / n.$$

Причем σ_1 и σ_2 в формуле для коэффициента Фурье (34) – суть те же выражения, что и в формуле (20), полученной автором, а γ в формуле (34) – суть то же, что и в формуле (24).

Зависимости относительных норм $S_m^*(x)$, $S_m^{**}(x)$ и $S_m^+(x)$ от обобщенной переменной θ при $n = 24$, найденные вначале на крупных сетках ω_τ для рядов (23), (31) и (33) со своими коэффициентами Фурье (24), (32) и (34) соответственно, для каждой из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ представлены на рис. 5 и рис. 6.

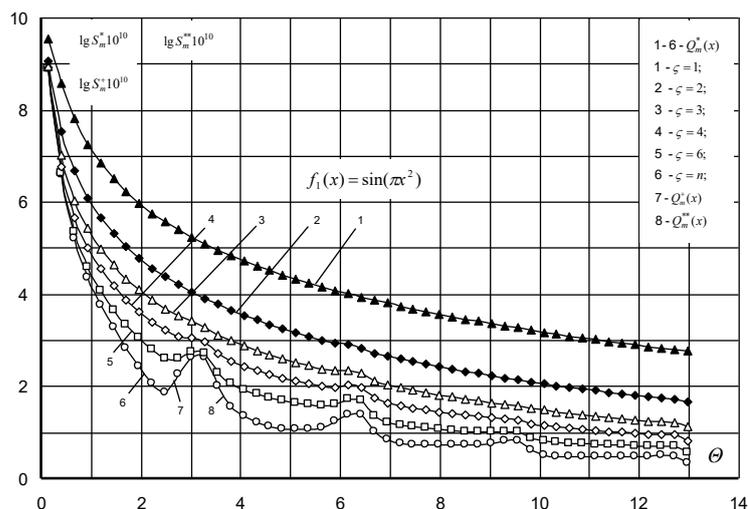


Рис. 5. Зависимость относительных норм $S_m^*(x)$, $S_m^{**}(x)$ и $S_m^+(x)$ от обобщенной переменной θ и переменной ζ при $n = 24$ для функции $f_1(x)$.

Прежде всего, необходимо отметить, сравнивая рис. 5 и рис. 6, что ряды (31), построенные соответственно по функциям с принципиально разными математическими свойствами, дают одинаковые и количественные, и качественные результаты для соответствующих им относительных норм $S_m^+(x)$, $S_m^*(x)$ и $S_m^{**}(x)$, как функций обобщенной переменной θ . По сути, как и для ряда (14) с коэффициентами Фурье (20), для ТРФ (31) с коэффициентами Фурье (32) тоже получен универсальный результат,

который позволяет распространить его на любые нормированные по максимуму функции, имеющие нули на концах интервала $[0, 1]$.

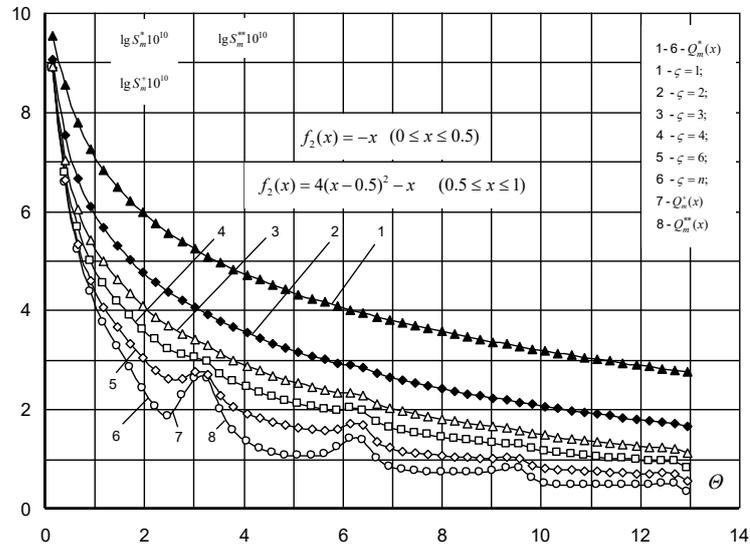


Рис. 6. Зависимость относительных норм $S_m^*(x)$, $S_m^{**}(x)$ и $S_m^+(x)$ от обобщенной переменной θ и переменной ζ при $n = 24$ для функции $f_2(x)$.

Кроме того, из рис. 5 и рис. 6 видно, что ТРФ (31) с коэффициентами Фурье (32) при $\zeta = n$ для всех k совпадает с рядом (23) и рядом Филона (33) для обеих функций, как и следовало ожидать, на основании теоретического анализа, выполненного выше.

Максимальная скорость сходимости ряда (31) с коэффициентами Фурье (32) при $\zeta = n$, построенного на мелких сетках ω_τ^* , к функции $f(x)$, то есть минимальное значение функций $S_m^*(x)$, достигается при значении обобщенной переменной $\theta = 2.5$.

При изменении ζ от $\zeta = n$ до $\zeta = 1$ локальные возмущения ряда (31) уменьшаются и прекращаются полностью при $\zeta = 1$, когда ряд (31) становится равномерно сходящимся, но значительно теряет в скорости сходимости по сравнению с тем же рядом (31) при $\zeta = n$.

Чтобы меньше потерять в скорости сходимости ряда (31) при проведении

практических расчетов:

- следует принять $\zeta = 2$, так как ряд уже можно считать с хорошей точностью почти равномерно сходящимся, скорость сходимости которого гораздо выше, чем скорость сходимости того же ряда при $\zeta = 1$;

- либо применить более мелкую сетку на интервале $[0, 1]$ (см. рис. 4а и рис. 4б).

После построения сходящегося ряда (23) с коэффициентами Фурье (24) значение степени ряда было расширено на всю действительную ось t . Однако не гарантировалось обеспечение достоверности определения первых производных функции, особенно при значениях t в местах локального возмущения переменной $S_m^*(x)$. Поэтому в тех случаях, когда требовалось обеспечить достоверность определения первых производных функции $f(x)$ с помощью ряда Фурье, приходилось ограничивать значение t , снижая точность представления функции $f(x)$ рядом Фурье.

После построения равномерно сходящегося ТРФ (31) с коэффициентами Фурье (32) ограничение на значение t снято, так как при любом значении t при $\zeta = 1$ или даже при $\zeta = 2$ гарантируется отсутствие эффекта Гиббса и обеспечивается достоверность определения первых производных функции $f(x)$ с помощью этого ряда.

Рост значения t может сдерживать только объем вычислений. В этом случае значение t можно определить из соотношения

$$\theta_{opt} = m_{opt} \pi / n \cong \pi . \quad (35)$$

$$\text{Откуда следует, что } m_{opt} = n . \quad (36)$$

Выбор этого значения m_{opt} определяется тем, что при $\theta = \pi$ равномерно сходящийся ряд (31) менее всего уклоняется от просто сходящегося ряда (31) в местах

локального возмущения относительной нормы $S_m^*(x)$ при $\zeta = n$.

Если нужна большая точность аналитического представления функции $f(x)$ рядом, необходимо принять $\theta_{opt} \cong 2\pi$ или $\theta_{opt} \cong 3\pi$, при которых равномерно сходящийся ТРФ (31) также менее уклоняется от сходящегося ряда (23). Откуда следует, что $m_{opt} = 2n$ или $m_{opt} = 3n$ соответственно.

Выше было показано, что при сопоставлении сходимости рядов (23), (31) и (33), построенных для любых нормированных функций, имеющих нули на концах интервала $[0, 1]$, результат получается одним и тем же.

Поэтому далее исследуем зависимость относительной нормы $S_m^*(x)$ ряда (31) при различных ζ от обобщенной переменной θ только для функции $f_1(x)$, используя мелкую сетку ω_τ^* , и сопоставим ее с зависимостями относительных норм $S_m(x)$ и $S_m^+(x)$ рядов (14) и (23) со своими коэффициентами Фурье (20) и (24) соответственно от обобщенной переменной θ , найденных тоже на мелких сетках ω_τ^* .

Результаты этих исследований представлены на рис. 7.

Из рис. 7 видно, что относительная норма $S_m^*(x)$, построенная для ТРФ (31) на мелкой сетке ω_τ^* при $\zeta = n$, совпадает с относительной нормой $S_m^+(x)$, построенной для сходящегося ТРФ (23) тоже на мелкой сетке ω_τ^* . Эти зависимости $S_m^*(x)$ и $S_m^+(x)$ от обобщенной переменной θ , построенные на мелких сетках ω_τ^* , радикально отличаются от этих же зависимостей, построенных для тех же рядов на крупных сетках ω_τ^* и от зависимости $S_m(x)$, построенной для исходного ТРФ (14) с коэффициентами Фурье (20) на крупной и мелкой сетках. Максимальная скорость

сходимости ТРФ (31) при $\zeta = n$ и ряда (23), построенных на мелких сетках ω_τ^* , к функции $f_1(x)$, то есть минимальное значение функций $S_m^*(x)$ и $S_m^+(x)$, достигается при значении обобщенной переменной $\theta = 2.5$ и равно такому же значению $\theta = 2.5$, если использовать крупные сетки. Но с увеличением θ при использовании мелких сеток наблюдаются некоторые незначительные ухудшения сходимостей рядов (31) и (23) к функции $f_1(x)$. Затем происходит стабилизация зависимостей относительных норм $S_m^*(x)$ и $S_m^+(x)$ от обобщенной переменной θ при $\theta \geq \pi$.

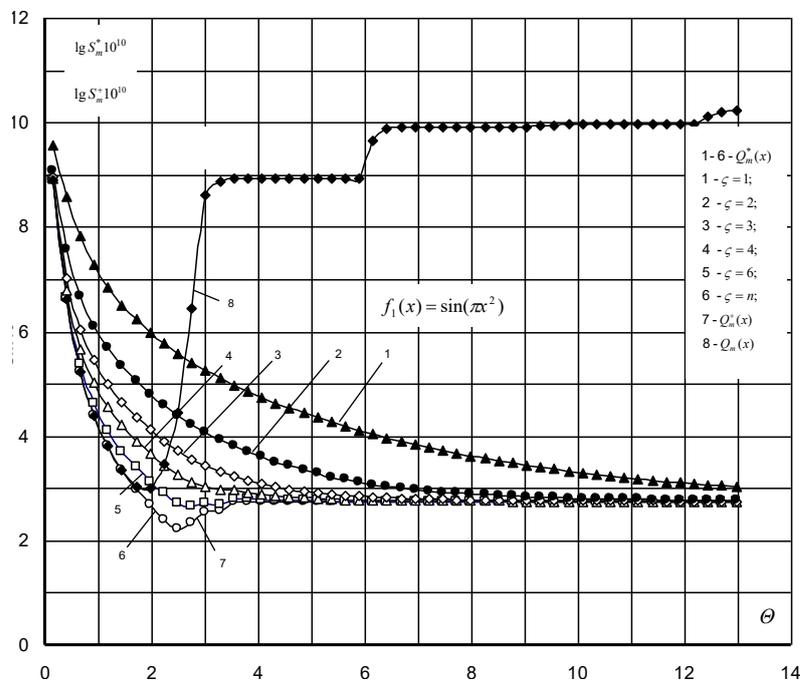


Рис. 7. Составление только для функции $f_1(x)$ зависимостей относительных норм $S_m^*(x)$, $S_m^{**}(x)$ и $S_m^+(x)$ от обобщенной переменной θ и переменной ζ , вычисленных на мелкой сетке ω_τ^* для рядов Фурье (31), (14) и (23) со своими коэффициентами Фурье (32), (20) и (24) соответственно.

Следует обратить внимание на то, что θ , дающее равномерно сходящийся ТРФ (14) с коэффициентами Фурье (20), изменяется в более узком диапазоне $\pi/n \leq \theta \leq \pi/2$, чем диапазон $\pi/n \leq \theta \leq 2.5$, дающий равномерно сходящийся ТРФ (31) с коэффициентами Фурье (32) при $\zeta = n$.

Из рис. 7 видно также, что построен равномерно сходящийся ТРФ (31) с коэффициентами Фурье (32) при $\zeta < 4$. Причем его относительные нормы $S_m^*(x)$ при таких ζ асимптотически приближаются к стабилизированному значению $S_m^*(x)$, которое она приобретает при $\zeta = n$ и $\theta \geq \pi$. Из всех асимптот наибольший интерес представляет асимптота $S_m^*(x)$ при $\zeta = 3$, так как она менее всего уклоняется от стабилизированного значения $S_m^*(x)$ и имеет максимальную скорость сходимости ряда к своей функции, обеспечивая минимальный объем вычислений при максимальной точности.

Сравнивая поведение функции $S_m(x)$, вычисленной для исходного ряда (14) с коэффициентами Фурье (20) на мелкой сетке ω_τ^* , с функциями $S_m^+(x)$ и $S_m^*(x)$, вычисленными для рядов (23) и (31) с коэффициентами Фурье (24) и (32) соответственно тоже на мелких сетках ω_τ^* , можно прийти к выводу о том, что поведение относительных норм по обобщенной переменной θ полностью определяется методом нахождения их коэффициентов Фурье. И этот вывод справедлив для любых нормированных функций $f(x)$, имеющих нули на концах интервала $[0, 1]$.

Приведем пример. Данный пример подтверждает возможность достоверного определения первых производных от решения дифференциального уравнения, представленного в виде сходящегося или равномерно сходящегося ТРФ.

Для этого рассмотрим краевую задачу общего вида

$$au'' + cu = f(x) \quad (0 < x < 1), \quad (37)$$

с граничными условиями

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (38)$$

где $u = u(x); \quad u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$

$f(x)$ – заданная функция.

Чтобы можно было представить функцию $f(x)$ рядом Фурье, продолжим ее на интервале $[-1 < x < 0]$ нечетным способом, а за его пределами на всю вещественную ось по закону периодичности $f(x+2) = f(x)$.

Тогда, если периодическая функция $f(x)$ удовлетворяет в интервале $[-1, 1]$ условиям Дирихле, то она имеет сходящийся к ней ТРФ.

$$f(x) \cong Q_m(x) = \sum_{k=1}^m b_k \sin k\pi x, \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (39)$$

где $b_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin k\pi x dx.$ (40)

Затем мы предполагаем, что уравнение (37) имеет решение в виде ТРФ

$$u(x) \cong \tilde{u}(x) = \sum_{k=1}^m \beta_k \sin k\pi x \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (41)$$

который допускает многократное почленное дифференцирование.

Этот ряд удовлетворяет граничным условиям (38) при любом выборе коэффициентов Фурье β_k . После подстановки рядов (39) и (41) в уравнение (37) получим выражение для определения коэффициентов Фурье β_k

$$\sum_{k=1}^m [c - a(k\pi)^2] \beta_k \sin k\pi x = \sum_{k=1}^m b_k \sin k\pi x \quad (k=1, 2, \dots, m). \quad (42)$$

Откуда, приравнявая коэффициенты при подобных членах, находим

$$\beta_k = b_k / [c - a(k\pi)^2] \quad (k=1, 2, \dots, m). \quad (43)$$

Таким образом, мы получили формальное приближенное решение в виде ТРФ:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=1}^m b_k / [c - a(k\pi)^2] \sin k\pi x \quad (k=1, 2, \dots, m). \quad (44)$$

Из выражения (44) видно, что точность найденного решения полностью зависит от точности определения коэффициентов Фурье (40) ряда (39).

Поэтому для оценки точности дифференцирования решения (44), достаточно исследовать сходимость ТРФ (39) к его функции $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ задана в следующем виде

$$f(x) = \begin{cases} -x & 0 < x < 0.5 \\ 4(x-0.5)^2 - x & 0.5 < x < 1.0 \end{cases} \quad (45)$$

Для нормированной по максимуму функции (45) по аналогии с ТРФ (23) был построен равномерно сходящийся ТРФ

$$Q_m(x) = \sum_{k=1}^m c_k \sin k\pi x \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (46)$$

где $c_k = a_k \sin \theta_k / \theta_k$ $\theta_k \equiv k\pi / 2m$,

коэффициенты Фурье a_k которого вычислялись по формуле (24) на равномерной сетке

$\omega_\tau = \{x_i = i\tau; i = 0, 1, \dots, n\}$ с шагом $\tau = 1/n$ (при $n = 24$).

При сравнении рядов Фурье и заданной функции $f(x)$, чтобы выявить эффект Гиббса, их производные подсчитывались на равномерной сетке $\omega_\tau^* = \{x_i = i\tau; i = 0, 1, \dots, n^*\}$ с шагом $\tau^* = 1/n^*$, где $n^* = 10n$. Но графики, приведенные на рис. 8 и рис. 9, были построены с шагом $\tau^{**} = 1/n^{**}$ при $n^{**} = 5n$ и $m = 1799$, где на элементарном участке амплитуда эффекта Гиббса максимальная.

Из графиков (Рис. 8) видно, что 1-ые производные нормированной функции

$f^*(x) = f(x) / f_{\max}$, где f_{\max} – модуль максимального значения функции $f(x)$, и ее ряда Фурье (31) совпадают с высокой точностью при отсутствии эффекта Гиббса, несмотря на то, что 1-я производная исходной нормированной функции выглядит как две пересекающиеся прямые линии, обычно трудно поддающиеся восстановлению.

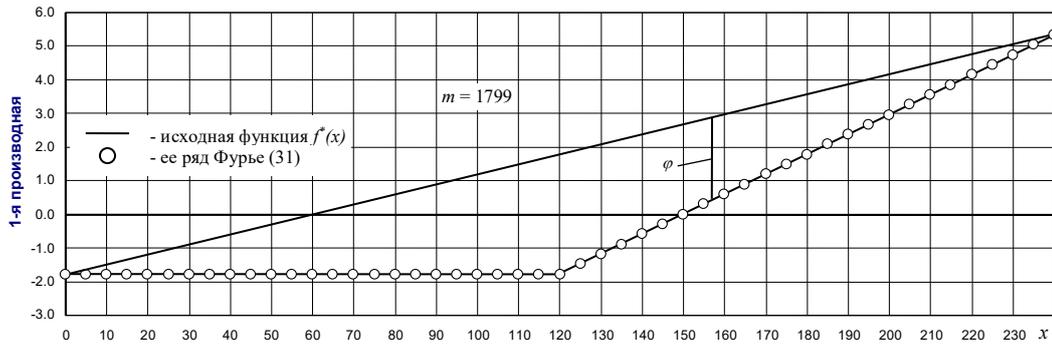


Рис. 8. Сопоставление первых производных исходной нормированной функции $f^*(x)$ и ее ряда Фурье (31) со своим коэффициентом Фурье (32).

После двукратного дифференцирования ТРФ (46) получим

$$Q_m''(x) = -\pi^2 \sum_{k=1}^m k^2 a_k \sin k\pi x \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (47)$$

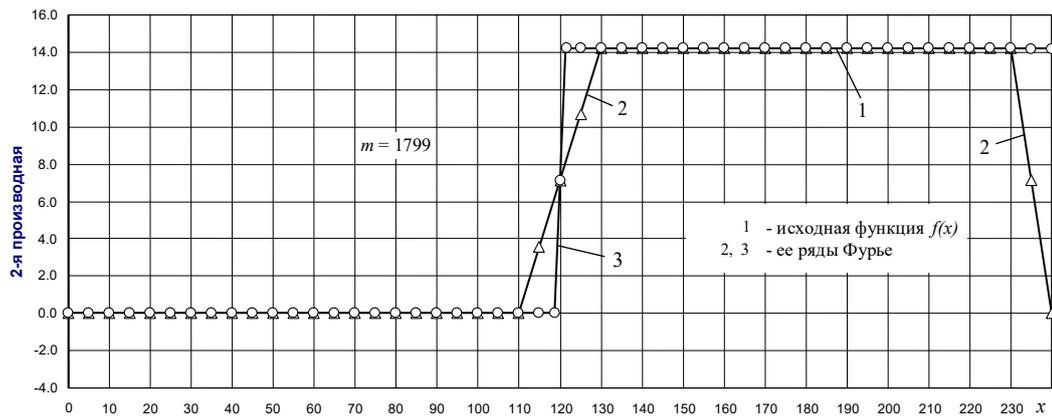


Рис. 9. Сопоставление вторых производных исходной нормированной функции $f^*(x)$ и ее рядов Фурье (47) и (48).

2-я производная, вычисленная по выражению (47) и показанная на графике (Рис. 9) в виде треугольных точек, дает на правой границе интервала $[0, 1]$ некорректный

результат и сильное размазывание разрыва при $x = 0.5$.

Чтобы устранить этот предварительный результат, построим новый ряд Фурье для нечетной нормированной сеточной функции $\varphi^*(x) = \varphi(x)/\varphi_{\max}$, имеющей нули на концах интервала $[0, 1]$.

$$Q\varphi_m^*(x) = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k \sin k\pi x \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (48)$$

Далее возьмем от ТРФ (48) 1-ю производную по x

$$Q'\varphi_m^*(x) = \pi \sum_{k=1}^m k\varepsilon_k \cos k\pi x \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (49)$$

Из графиков (Рис. 9) видно, что 1-я производная (49) от ряда Фурье (48), обозначенная в виде кружочков, с хорошей точностью восстанавливает 2-ую производную нормированной функции $f''(x)$ на всем интервале $[0, 1]$ при отсутствии эффекта Гиббса. Причем размазывание разрыва для ТРФ (49) уменьшилось в несколько раз.

Выводы. 1. Установлено на основании численных экспериментов, что поведение относительных норм по обобщенной переменной $\theta = k\pi/n$, то есть сходимость ТРФ к своей функции $f(x)$, полностью определяется методом нахождения их коэффициентов Фурье. И этот вывод справедлив для любых нормированных функций $f(x)$, имеющих нули на концах интервала $[0, 1]$.

2. Из всех исследованных ТРФ рекомендован равномерно сходящийся ТРФ (31) с коэффициентами Фурье, вычисленными по формуле (32). Причем при вычислении его σ_k -множителей необходимо задавать $\zeta = 1$, при котором локальные возмущения ТРФ (31) прекращаются полностью и этот ряд становится равномерно сходящимся.

3. Чтобы меньше потерять в скорости сходимости ТРФ (31) при проведении практических расчетов:

- при вычислении σ_k -множителей следует принять $\zeta = 2$, так как ряд уже можно считать с хорошей точностью почти равномерно сходящимся;

- либо применить более мелкую сетку на интервале $[0, 1]$.

4. При проведении практических расчетах ограничение на значение степени m равномерно сходящегося ТРФ (31) с коэффициентами Фурье (32) снято, а его максимальное значение ограничено лишь допустимым объемом вычислений, так как при любом значении m при $\zeta = 1$ эффект Гиббса отсутствует.

5. На конкретном примере показано, что равномерно сходящийся ТРФ (31) с коэффициентами Фурье (32) может успешно применяться не только для восстановления плохо интегрируемых, плохо дифференцируемых и сеточных функций, но и при нахождении корректных разрывных решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

6. Равномерно сходящийся ТРФ (31) с коэффициентами Фурье (32) удобно дифференцировать и получать корректные первые производные от решений дифференциальных уравнений математической физики при отсутствии эффекта Гиббса.

7. Применение результатов по сходимости ТРФ, полученных в статье, позволяет существенно повысить эффективность СМ Галеркина и превратить его в один из наиболее экономичных и надежных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Список источников

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 736 с.
2. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
3. Дж. Ламли, Ж. Матье, Д. Жандель и др. Методы расчета турбулентных течений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 464 с.
4. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 432 с.
5. Эдвардс Ч.Г., Пенни Д.Э. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB: Пер. с англ. – М.: Издательский дом Вильямс, 2016. - 1104 с.
6. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
7. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. Т.1. - 1504 с.
8. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. Т.2. - 552 с.
9. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. - М.: Мир, 1986. - 318 с.
10. Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MATLAB. – М.: Издательский дом Вильямс, 2001. – 720 с.
11. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988.

– 544 с.

12. Роуч П. Вычислительная гидродинамика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

13. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.

14. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. - М.: Наука, 1967. – 368 с.

15. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 448 с.

16. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решения разностных схем. - М.: Наука, 1979. - 320 с.

17. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1968. Т. 2. - 464 с.

18. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред: Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. - 464 с.

19. Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С., Литвинчук С.Ю. Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости // Труды МАИ. 2010. № 40. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=22862>

20. Игнаткин Ю.М., Макеев П.В., Шомов А.И. Численное моделирование прикладных задач аэродинамики вертолета на базе нелинейной лопастной вихревой модели винта // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=65636>

21. Способин А.В. Бессеточный алгоритм расчета сверхзвуковых течений вязкого теплопроводного газа // Труды МАИ. 2021. № 121. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=162656>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-09)
22. Гягяева А.Г., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Вывод уравнения динамики геометрически нелинейной пластины, взаимодействующей с тонким слоем вязкой несжимаемой жидкости // Труды МАИ. 2021. № 121. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=162650>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-06)
23. Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. – М.: ГИТТЛ, 1954. - 398 с.
24. Кутыш И.И. Построение равномерно сходящихся рядов Фурье для сеточных функций: Некоторые задачи и методы исследования динамики механических систем: сборник научных трудов. – М.: Изд-во МАИ, 1985. С. 68-75.
25. Кутыш И.И. Основы и приложения улучшенного спектрального метода к решению краевых задач. - LAP LAMBERT Academic Publishing, 2018. - 399 с.
26. Кутыш И.И. Построения и приложения равномерно сходящихся тригонометрических рядов Фурье // Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, ВМСППС'2021 (Алушта, 4 - 13 сентября 2021). – М.: Изд-во МАИ, 2021. С. 53–55.
27. Хемминг Р.И. Численные методы. - М.: Наука, 1972. - 400 с.
28. Carslaw H.S. Fourier Series and Integrals, Dover Publication, New York, 1930.
29. Малиев А.С. Ряды Фурье повышенной сходимости для функций, определенных в данном промежутке // Известия АН СССР. 1932. № 10. С. 1437–1450.
30. Кутыш И.И. Исследование сходимости спектрального метода решения дифференциальных уравнений // Материалы XX юбилейной Международной конференции по

вычислительной механике и современным прикладным программным системам, ВМСППС'2017 (Алушта, 24 - 31 мая 2017). – М.: Изд-во МАИ, 2017. С. 78 – 81.

References

1. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow, Nauka, 1977, 736 p.
2. Farlou S. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* (Partial differential equations for scientists and engineers), Moscow, Mir, 1985, 384 p.
3. Dzh. Lamli, Zh. Mat'e, D. Zhandel' et al. *Metody rascheta turbulentnykh techenii* (Methods for calculating turbulent flows), Moscow, Mir, 1984, 464 p.
4. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Spravochnik po nelineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki: Tochnye resheniya* (Handbook of nonlinear equations of mathematical physics: Exact solutions), Moscow, FIZMATLIT, 2002, 432 p.
5. Edvards Ch.G., Penni D.E. *Differentsial'nye uravneniya i kraevye zadachi: modelirovanie i vychislenie s pomoshch'yu Mathematica, Maple i MATLAB* (Differential equations and boundary value problems: Modeling and calculation using Mathematica, Maple and MATLAB), Moscow, Izdatel'skii dom Vil'yams, 2016, 1104 p.
6. Fletcher K. *Chislennye metody na osnove metoda Galerkina* (Numerical methods based on the Galerkin method), Moscow, Mir, 1988, 352 p.
7. Fletcher K. *Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkosti* (Computational methods in fluid dynamics), Moscow, Mir, 1991, vol. 1, 1504 p.
8. Fletcher K. *Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkosti* (Computational methods in fluid dynamics), Moscow, Mir, 1991, vol. 2, 552 p.

9. Zenkevich O., Morgan K. *Konechnye elementy i approksimatsiya* (Finite elements and approximation), Moscow, Mir, 1986, 318 p.
10. Met'yuz D.G., Fink K.D. *Chislennye metody. Ispol'zovanie MATLAB* (Numerical methods. Using MATLAB), Moscow, Izdatel'skii dom Vil'yams, 2001, 720 p.
11. Shi D. *Chislennye metody v zadachakh teploobmena* (Numerical methods in heat transfer problems), Moscow, Mir, 1988, 544 p.
12. Rouch P. *Vychislitel'naya gidrodinamika* (Computational fluid dynamics), Moscow, Mir, 1980, 616 p.
13. Samarskii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* (Theory of difference schemes), Moscow, Nauka, 1983, 616 p.
14. Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z. *Chislennye metody analiza. Priblizhenie funktsii, differentsial'nye i integral'nye uravneniya* (Numerical methods of analysis. Approximation of functions, differential and integral equations), Moscow, Nauka, 1967, 368 p.
15. Kheigeman L., Yang D. *Prikladnye iteratsionnye metody* (Applied iterative methods), Moscow, Mir, 1986, 448 p.
16. Marchuk G.I., Shaidurov V.V. *Povyshenie tochnosti resheniya raznostnykh skhem* (Improving the accuracy of solving difference schemes), Moscow, Nauka, 1979, 320 p.
17. Fikhtengol'ts G.M. *Osnovy matematicheskogo analiza* (Fundamentals of mathematical analysis), Moscow, Nauka, 1968, vol. 2, 464 p.
18. Oden Dzh. *Konechnye elementy v nelineinoi mekhanike sploshnykh sred* (Finite elements in nonlinear continuum mechanics), Moscow, Mir, 1976, 464 p.

19. Belov A.A., Igumnov L.A., Karelin I.S., Litvinchuk S.Yu. *Trudy MAI*, 2010, no. 40. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=22862>
20. Ignatkin Yu.M., Makeev P.V., Shomov A.I. *Trudy MAI*, 2016, no. 87. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65636>
21. Sposobin A.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=162656>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-09)
22. Gyagyaeva A.G., Kondratov D.V., Mogilevich L.I. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=162650>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-06)
23. Krylov A.N. *Lektsii o priblizhennykh vychisleniyakh* (Lectures on approximate calculations), Moscow, GITTL, 1954, 398 p.
24. Kutysh I.I. *Postroenie ravnomerno skhodyashchikhsya ryadov Fur'e dlya setochnykh funktsii: Nekotorye zadachi i metody issledovaniya dinamiki mekhanicheskikh sistem* (Construction of uniformly converging Fourier series for grid functions: Some problems and methods of studying the dynamics of mechanical systems, Moscow, Izd-vo MAI, 1985, pp. 68-75.
25. Kutysh I.I. *Osnovy i prilozheniya uluchshennogo spektral'nogo metoda k resheniyu kraevykh zadach* (Fundamentals and applications of the improved spectral method to solving boundary value problems), LAP LAMBERT Academic Publishing, 2018, 399 p.
26. Kutysh I.I. *Materialy XII Mezhdunarodnoi konferentsii po vychislitel'noi mekhanike i sovremennym prikladnym programmnyim sistemam, VMSPPS'2021*, Moscow, Izd-vo MAI, 2021, pp. 53–55.
27. Khemming R.I. *Chislennyye metody* (Numerical methods), Moscow, Nauka, 1972, 400 p.

28. Carslaw H.S. *Fourier Series and Integrals*, Dover Publication, New York, 1930.
29. Maliev A.S. *Izvestiya AN SSSR*, 1932, no. 10, pp. 1437–1450.
30. Kutysh I.I. *Materialy XX yubileinoi Mezhdunarodnoi konferentsii po vychislitel'noi mekhanike i sovremennym prikladnym programmnyim sistemam, VMSPPS'2017*, Moscow, Izd-vo MAI, 2017, pp. 78 – 81.

Статья поступила в редакцию 01.06.2022

Статья после доработки 10.06.2022

Одобрена после рецензирования 15.09.2022

Принята к публикации 12.10.2022

The article was submitted on 01.06.2022; approved after reviewing on 15.09.2022; accepted for publication on 12.10.2022