



Научная статья / Original Article

УДК 539.37:536.24:621.375.826

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188105>

EDN: <https://www.elibrary.ru/OACLXD>

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО - ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ВЫСОКОИНТЕНСИВНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ДВИЖУЩИМСЯ ПО ЕГО ПОВЕРХНОСТИ ИСТОЧНИКАМИ

Т.Л. Нгуен ✉

Государственный технический университет им. Ле Куи Дона,

Ханой, Вьетнам

✉ kqvn.nguyenlong@gmail.com

Цитирование: Нгуен Т.Л. Определение напряженно - деформированного состояния упругого полупространства при высокоинтенсивном воздействии движущимся по его поверхности источниками // Труды МАИ: электрон. журнал. № 147.

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188105>

Аннотация. В рамках работы определяется напряженно-деформированное состояние металлопорошковой композиции в процессе селективного лазерного плавления полупространства. С указанной целью в работе формулируется и аналитически исследуется вспомогательная краевая задача о нестационарном нагреве изотропного упругого полупространства, обусловленном воздействием подвижного поверхностного источника тепла с заданными кинематическими и энергетическими параметрами. Для адекватного описания конечной скорости распространения тепловых возмущений используется обобщённое уравнение теплопроводности в рамках теории Максвелла–Каттанео, что позволяет учитывать релаксационные эффекты теплового потока. Термоупругое взаимодействие моделируется на основе уравнений Ламе линейной теории упругости с учётом температурных деформаций. Построена замкнутая

математическая модель, включающая систему связанных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями. Аналитическое решение получено методом интегральных преобразований: применяется преобразование Лапласа по временной переменной и двумерное преобразование Фурье по пространственным координатам, что обеспечивает получение выражений для температурного поля и компонент напряжённо-деформированного состояния.

Ключевые слова: селективное лазерное плавление (SLM); металлпорошковая композиция; аддитивные технологии; напряженно-деформированное состояние, термоупругость; нестационарная теплопроводность, теория Максвелла-Каттанео; гиперболическое уравнение теплопроводности; подвижный поверхностный источник тепла; тепловые напряжения; остаточные напряжения; релаксация теплового потока; высокоградиентный нагрев.

ANALYTICAL DETERMINATION OF THE STRESS – STRAIN FIELD IN AN ELASTIC HALF-SPACE UNDER HIGH-INTENSITY MOVING SURFACE LOADING

T.L. Nguyen ✉

Le Quy Don Technical University, Hanoi, Vietnam

✉ kqvn.nguyenlong@gmail.com

Citation: Nguyen T.L. Analytical determination of the stress – strain field in an elastic half-space under high-intensity moving surface loading // Trudy MAI. 2026. No. 147. (In Russ.).

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188105>

Abstract. This study determines the stress–strain state of a metal powder composite during the selective laser melting of a half-space. To achieve this objective, an auxiliary boundary-value problem of transient heating of an isotropic elastic half-space is formulated and analytically investigated. The heating process is induced by a moving surface heat source characterized by prescribed kinematic and energy parameters. The Maxwell–Cattaneo theory uses a generalized heat conduction equation to account for the finite speed of thermal disturbance and include heat flux relaxation effects. Thermoelastic coupling is modelled because of the Lamé equations of linear elasticity

with inclusion of thermal strains. A closed-form mathematical model is constructed, consisting of a system of coupled differential equations supplemented by the corresponding initial and boundary conditions. The analytical solution is obtained using the method of integral transforms: the Laplace transform with respect to time, and the two-dimensional Fourier transform with respect to spatial coordinates are applied, yielding explicit expressions for the temperature field and the components of the stress-strain state.

Keywords: selective Laser Melting (SLM); metal powder composite; additive manufacturing; stress-strain state; thermoelectricity; transient heat conduction; Maxwell-Cattaneo theory; hyperbolic heat conduction equation; moving heat source; thermal stresses; residual stresses; heat flux relaxation; high-gradient heating.

Введение

Динамический нагрев полупространства подвижным источником лазерного излучения с учётом теплоотдачи на поверхности

Неизменной характеристикой термического процесса при любом виде теплового воздействия на материал, включая лазерное излучение, является тепловой поток. В твёрдых телах перенос тепла осуществляется преимущественно за счёт теплопроводности, реализуемой через хорошо известные физические механизмы [1-3].

Как правило, при высокоинтенсивном нагреве используется импульсный источник, длительность действия которого составляет порядка пикосекунд. В таких условиях классическая модель теплопроводности на основе закона Фурье теряет применимость, и для адекватного описания тепловых процессов будем использовать гиперболические уравнения теплопроводности, такие как уравнение Каттанео-Вернотта.

При воздействии лазерного излучения на твёрдое тело происходят изменения его оптических и теплофизических свойств вследствие термического расширения материала. Кроме того, в процессе плавления наблюдаются фазовые переходы из твёрдого состояния в жидкое. Кроме того, в приповерхностной

области твёрдого тела могут протекать диффузионные процессы и происходить различные химические реакции, обусловленные воздействием лазерного излучения [5-8].

Существенные отличия тепловых процессов при воздействии лазерного излучения по сравнению с другими видами нагрева обусловлены высокими скоростями повышения и понижения температуры, а также значительными температурными градиентами [9].

Перенос тепловой энергии в веществе осуществляется посредством теплопроводности. Этот процесс возможен только при наличии температурных градиентов в теле и сопровождается изменением температуры как по пространственным координатам, так и во времени [10].

Здесь также решается задача об определении напряженно-деформированного состояния (НДС), возникающего вследствие селективного лазерного воздействия в нестационарной постановке.

Для этого в случае селективного лазерного плавления металлопорошковой композиции в пределах одного слоя, необходимо знать распределение поля температур в полупространства от воздействия лазерного источника. Для решения указанной задачи ставится вспомогательная задача о нестационарном нагреве изотропной полупространства подвижным поверхностным источником тепла. Для этого строится математическая модель для обобщенного уравнения теплопроводности на основе классической теории и Грина-Нагди II типа, а также модели Максвелла-Каттанео.

Предложенные решения соответствуют воздействию сосредоточенного во времени и координатах поверхностного источника тепла в виде дельта функции, расположенного в теплопроводящей полуплоскости. Для решения поставленной задачи используются интегральные одномерное преобразование Фурье по координате и интегральное преобразование Лапласа по времени. Соответствующие оригиналы построены последовательным обращением преобразования Лапласа и Фурье, а также вычисления интегралов свертки по продольной координате [11-14].

В результате получено интегральное представление, позволяющее получать решения задачи о произвольных поверхностных источниках тепла в полуплоскости.

Для определения напряженно-деформированного состояния в металлопорошковой композиции в процессе трехмерной печати используются уравнения Ламе линейной теории несвязанной термоупругости с использованием обобщенного уравнения теплопроводности на основе гиперболического уравнения теплопроводности.

Приведенные решения задач подобного рода позволят с большой степенью точности исследовать воздействие высокоинтенсивных тепловых потоков энергии в новых материалах с неклассическими теплопроводящими свойствами.

Расчёт напряжённо-деформированного состояния, индуцированного подвижным источником лазерного излучения

На рисунке 1 рассматривается упругое полупространство на поверхности которого действует нестационарный источник теплового лазерного излучения.

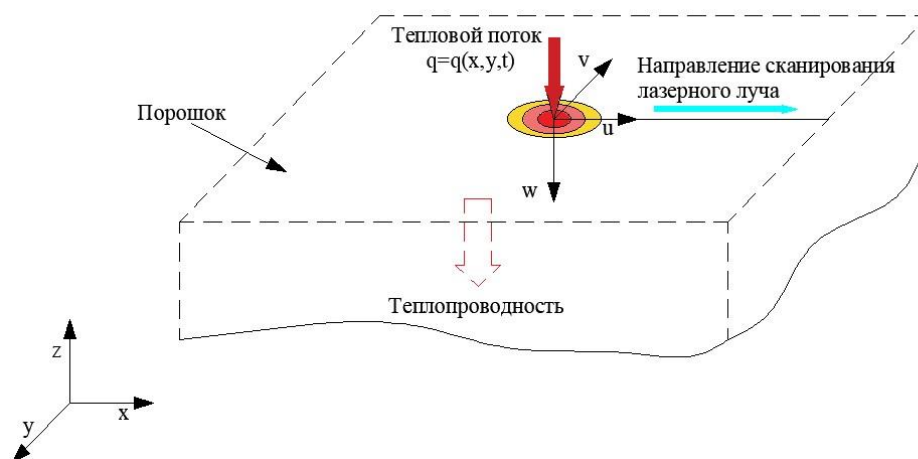


Рисунок 1 - Упругое полупространство с нестационарным источником теплового лазерного излучения

Напряжённо-деформированное состояние металлопорошковой композиции в процессе селективного лазерного плавления полуплоскости определим на основе решения системы дифференциальных уравнений термоупругости в предположении, что поверхностные нагрузки и массовые силы, а также

внутренние источники тепла отсутствуют. Эта система уравнений состоит из уравнения теплопроводности и уравнений движения теории упругости с учётом температурных эффектов:

$$\beta \Delta T(x, y, z, t) - \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial t^2} + \frac{\alpha^2 T(x, y, z, t)}{4} - \chi \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

Для упругой части задачи будем использовать уравнения Ламе:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} - \gamma \operatorname{grad} T = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2)$$

где $\mathbf{u} = (u, v, w)$ – вектор перемещений; $\eta^2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu}$, λ , μ – упругие постоянные

Ламе; $\gamma = 3K\alpha$, α – коэффициент температурного расширения, $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ –

модуль объёмного расширения; $\chi = \frac{\gamma T_0}{\lambda}$, ρ – плотность T_0 – начальная температура.

В этой системе уравнений можно пренебречь слагаемым $\chi \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial t}$ в уравнении теплопроводности. Такое пренебрежение оправдывается тем, что оно мало по сравнению со вторым слагаемым уравнения (1). Таким образом, получаем несопряженную систему уравнений:

$$\beta \Delta T(x, y, z, t) - \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial t^2} + \frac{\alpha^2 T(x, y, z, t)}{4} = 0, \quad (3)$$

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} - \gamma \operatorname{grad} T = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (4)$$

Решение уравнения (1) полупространства известно и приводится в работе [11,13]

Используя соотношения между вектором перемещений, скалярным и векторными потенциалами (5)

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w \quad (5)$$

получаем выражения перемещений и напряжений через потенциалы.

Подставляя эти соотношения в векторное уравнение Ламе получаем систему независимых уравнений относительно скалярного и векторного

потенциалов:

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\varphi - \gamma T = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\mu\Delta\Psi - \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

Введём следующую систему безразмерных величин (символом «*» обозначены размерные параметры):

$$z = \frac{z^*}{h}, \quad x = \frac{x^*}{h}, \quad t = \frac{c_1 t^*}{h}, \quad \varphi = \frac{\varphi^*}{h^2}, \quad \Psi = \frac{\Psi^*}{h^2}, \quad u = \frac{u^*}{h}, \quad v = \frac{v^*}{h}, \quad w = \frac{w^*}{h}, \quad T = \frac{T^*}{T_0},$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_y = \frac{\sigma_y^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_z = \frac{\sigma_z^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \tau_{xz} = \frac{\tau_{xz}^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \gamma^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \quad (8)$$

$$\tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}^*}{\lambda + 2\mu} \quad \chi = \frac{\gamma T_0}{\rho c_1^2}$$

Здесь $c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$ скорости распространения продольной и

поперечных волн

Тогда получаем:

$$\Delta\varphi - \chi T = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (9)$$

$$\gamma^2 \Delta\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (10)$$

При этом, выражения кинематических параметров через потенциалы будут иметь вид:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi_z}{\partial y} - \frac{\partial\psi_y}{\partial z} \quad (11)$$

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \left(\frac{\partial\psi_z}{\partial x} - \frac{\partial\psi_x}{\partial z} \right) \quad (12)$$

$$w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x} - \frac{\partial\psi_x}{\partial y} \quad (13)$$

Напряжения через потенциалы выразятся следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (1 - 2\eta^2) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\eta^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} \right) \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1 - 2\eta^2) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\eta^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + (1 - 2\eta^2) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + 2\eta^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial z} \right) \\ \tau_{xy} &= \eta^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial z} \right) \\ \tau_{yz} &= \eta^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial z} \right) \\ \tau_{xz} &= \eta^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}\quad (15)$$

Для решения поставленной задачи применим к соотношениям (9-13) интегральное преобразование Лапласа по времени:

$$f^L(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (16)$$

где s комплексный параметр преобразования и интегральное преобразование Фурье по координатам x и y с параметрами преобразования q и p соответственно :

$$f^F(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(qx+py)} f(x, y) dx dy \quad (17)$$

Тогда с учетом (15-16) уравнения (9-10) в трансформантах примут вид:

$$\frac{d^2 \varphi^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} - v^2 \varphi^{LF}(s, q, p, z) = \chi T^{LF}(s, q, p, z) \quad (18)$$

$$\frac{d^2 \psi^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} - v_1^2 \psi^{LF}(s, q, p, z) = 0 \quad (19)$$

где $v^2 = q^2 + p^2 + s^2$ $v_1^2 = q^2 + p^2 + \frac{s^2}{\gamma^2}$

Температурное слагаемое в правой части уравнения (42) предполагаем в форме соотношения (21):

$$G^{FL}(q, p, z, s) = T^{LF}(s, q, p, z) = \frac{e^{-z\sqrt{\frac{s^2}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}s + q^2 + p^2}}}{\sqrt{\frac{s^2}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}s + q^2 + p^2}} = \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda} \quad (20)$$

В этом выражении $\lambda = \sqrt{\frac{s^2}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}s + q^2 + p^2}$ а трансформанты выражений (35-

39) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u^{LF}(s, q, p, z) &= -iq\phi^{LF}(s, q, p, z) - ip\psi_z^{LF}(s, q, p, z) - \frac{d\psi_y^{LF}(s, q, p, z)}{dz}, \\ v^{LF}(s, q, p, z) &= -ip\phi^{LF}(s, q, p, z) + iq\psi_z^{LF}(s, q, p, z) + \frac{d\psi_x^{LF}(s, q, p, z)}{dz} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} w^{LF}(s, q, p, z) &= \frac{d\phi^{LF}(s, q, p, z)}{dz} - iq\psi_y^{LF}(s, q, p, z) - ip\psi_x^{LF}(s, q, p, z) \\ \sigma_x^{LF}(s, q, p, z) &= -q^2\phi^{LF}(s, q, p, z) + \\ &+ (1 - 2\eta^2) \left[-p^2\phi^{LF}(s, q, p, z) + \frac{d^2\phi^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} \right] + \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &+ 2\eta^2 \left[qp\psi_z^{LF}(s, q, p, z) + iq\frac{d\psi_y^{LF}(s, q, p, z)}{dz} \right] \\ \sigma_y^{LF}(s, q, p, z) &= -p^2\phi^{LF}(s, q, p, z) + \\ &+ (1 - 2\eta^2) \left[-q^2\phi^{LF}(s, q, p, z) + \frac{d^2\phi^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} \right] + \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &+ 2\eta^2 \left[-ip\frac{d\psi_x^{LF}(s, q, p, z)}{dz} + qp\psi_z^{LF}(s, q, p, z) \right] \\ \sigma_z^{LF}(s, q, p, z) &= \frac{d^2\phi^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} - \\ &- (1 - 2\eta^2)(q^2 + p^2)\phi^{LF}(s, q, p, z) + \end{aligned} \quad (24)$$

Решение системы уравнений (9-10) будет иметь вид:

$$\phi^{LF}(q, p, z, s) = A(q, p, s)e^{-z\sqrt{q^2 + p^2 + s^2}} + A_1(q, p, s)e^{z\sqrt{q^2 + p^2 + s^2}} + \phi_q^{LF}(q, p, z, s) \quad (25)$$

$$\Psi^{LF}(q, p, z, s) = B(q, p, s)e^{-z\sqrt{q^2+p^2+\frac{s^2}{\gamma^2}}} + B_1(q, p, s)e^{z\sqrt{q^2+p^2+\frac{s^2}{\gamma^2}}} \quad (26)$$

Здесь частное решение уравнения (50) имеет вид:

$$\Phi_q^{LF}(q, p, z, s) = \chi \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda(\lambda^2 - v^2)}$$

$$\lambda^2 - v^2 = \left(\sqrt{\frac{s^2}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}s + q^2 + p^2} \right)^2 - (s^2 + q^2 + p^2) = s^2 \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) + \frac{\alpha}{\beta}s$$

Тогда постоянные интегрирования в (26) определим из краевых условий:

-условие ограниченности решения на бесконечности:

$$\Phi^{LF}(q, p, z, s) \Big|_{z \rightarrow \infty} = O(1) \quad \Psi^{LF}(q, p, z, s) \Big|_{z \rightarrow \infty} = O(1) \quad (27)$$

Следует $A_1(q, p, s) = B_1(q, p, s) = 0$

Тогда из (27) с учетом (28) имеем:

$$\Phi^{LF}(q, p, z, s) = A(q, p, s)e^{-zv} + \chi \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda(\lambda^2 - v^2)} \quad (28)$$

$$\Psi_x^{LF}(q, p, z, s) = B_x(q, p, s)e^{-zv_1} \quad \Psi_y^{LF}(q, p, z, s) = B_y(q, p, s)e^{-zv_1} \quad (29)$$

$$\Psi_z^{LF}(q, p, z, s) = B_z(q, p, s)e^{-zv_1}$$

Остальные постоянные интегрирования, определяются из следующих краевых условий на поверхности полупространства:

$$\operatorname{div} \Psi = \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0 \quad (30)$$

$$\sigma_z(t, x, y, z) \Big|_{z=0} = 0 \quad (31)$$

$$\tau_{xz}(t, x, y, z) \Big|_{z=0} = 0 \quad (32)$$

$$\tau_{yz}(t, x, y, z) \Big|_{z=0} = 0 \quad (33)$$

Трансформанты краевых условий (29-33) определяются в соответствии с выражением (17):

Подставляя трансформанты потенциалов (28-29) в эти краевые условия получаем систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования $A(q, p, s), B_x(q, p, s), B_y(q, p, s), B_z(q, p, s)$:

$$-iqB_x(q, p, s) - ipB_y(q, p, s) - v_1B_z(q, p, s) = 0 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \left[v^2 - (1 - 2\eta^2)(q^2 + p^2) \right] A(q, p, s) - 2iv_1\eta^2 \left[pB_x(q, p, s) - qB_y(q, p, s) \right] = \\ & = (1 - 2\eta^2)(q^2 + p^2)A_1 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & 2iqvA(q, p, s) + qpB_x(q, p, s) + (v_1^2 - q^2)B_y(q, p, s) - ipB_z(q, p, s) = \\ & = -2iq\lambda A_1 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & 2ipvA(q, p, s) + (p^2 + v_1^2)B_x(q, p, s) - qpB_y(q, p, s) + iqB_z(q, p, s) = \\ & = -2ip\lambda A_1 \end{aligned} \quad (37)$$

В результате выражения для констант интегрирования получаем в виде:

$$A(q, p, s) = \frac{R_1(q, p, s)}{R(q, p, s)} \quad (38)$$

$$B_x(q, p, s) = \frac{R_2(q, p, s)}{R(q, p, s)} \quad (39)$$

$$B_y(q, p, s) = \frac{R_3(q, p, s)}{R(q, p, s)} \quad (40)$$

$$B_z(q, p, s) = \frac{R_4(q, p, s)}{R(q, p, s)} \quad (41)$$

В этих выражениях:

$$A = q^2 + p^2 \quad B = q^2 - p^2 \quad v = \sqrt{A + s^2} \quad v_1 = \sqrt{A + \frac{s^2}{\gamma^2}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{s^2}{\beta} + A - A_0}$$

$$\begin{aligned} R(q, p, s) = & -(2A\eta^2 + s^2)v_1^5 - 4v\eta^2 Bv_1^4 + B(2A\eta^2 + s^2)v_1^3 - B(2A\eta^2 + s^2)v_1^2 - \\ & - 4v\eta^2 A^2v_1 + (2A\eta^2 + s^2)A^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1(q, p, s) = & -A_1 \left[-A(2\eta^2 - 1)v_1^5 - 4\eta^2\lambda Bv_1^4 + AB(2\eta^2 - 1)v_1^3 - AB(2\eta^2 - 1)v_1^2 - \right. \\ & \left. - 4\eta^2\lambda A^2v_1 + (2\eta^2 - 1)A^3 \right] \end{aligned}$$

$$R_2(q, p, s) = 2iA_1p(A - v_1^3) \left[2(v - \lambda)\eta^2A - vA - \lambda s^2 \right]$$

$$R_3(q, p, s) = -2iA_1q(A + v_1^3) \left[2(v - \lambda)\eta^2A - vA - \lambda s^2 \right]$$

$$R_4(q, p, s) = 4A_1 q v_1^2 [2(v - \lambda)\eta^2 A - vA - \lambda s^2]$$

Тогда трансформанты потенциалов примут вид:

$$\begin{aligned}\varphi^{LF}(q, p, z, s) &= A(q, p, s)e^{-zv} + \chi \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda(\lambda^2 - v^2)} \\ \psi_x^{LF}(q, p, z, s) &= B_x(q, p, s)e^{-zv_1} \\ \psi_y^{LF}(q, p, z, s) &= B_y(q, p, s)e^{-zv_1} \\ \psi_z^{LF}(q, p, z, s) &= B_z(q, p, s)e^{-zv_1}\end{aligned}\quad (42)$$

Подставляя соотношения (44) с учетом (40-42) в выражения для (21,23,24) получаем трансформанты кинематических и статических параметров для упругого полупространства (приведем некоторые из них):

$$w^{LF}(s, q, p, z) = -v \frac{R_1(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv} - iq \frac{R_3(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} - ip \frac{R_2(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} - \frac{\chi e^{-z\lambda}}{\lambda^2 - v^2} \quad (43)$$

Выражения для трансформанты нормального напряжений примут вид:

$$\begin{aligned}\sigma_z^{LF} &= \left[v^2 + (2\eta^2 - 1)(q^2 + p^2) \right] \frac{R_1(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-vz} + \left[\lambda^2 + (2\eta^2 - 1)(p^2 + q^2) \right] \frac{e^{-z\lambda}}{\lambda(as^2 - b)} - \\ &- 2\eta^2 \left\{ \frac{R_4(q, p, s)}{R(q, p, s)} (p^2 - q^2) - iv_1 \left[q \frac{R_3(q, p, s)}{R(q, p, s)} - p \frac{R_2(q, p, s)}{R(q, p, s)} \right] \right\} e^{-v_1 z}\end{aligned}\quad (44)$$

Получить аналитически оригиналы трансформант (43-44) не представляется возможным, поэтому представим эти выражения в виде асимптотического разложения в ряд по параметру преобразования Лапласа $1/s^m$, m - где действительные числа, с последующим определением оригиналов с помощью таблиц и свойств преобразования, тогда трансформанты перемещений (45) по Фурье примут вид:

$$\begin{aligned}w^F(t, q, p, z) &= -pqH(t - \gamma z) \sum_{m=3}^7 (t - \gamma z)^m w_{1m}^F(q^2, p^2) - q^2 H(t - \gamma z) \sum_{m=3}^7 (t - \gamma z)^m w_{1m}^F(q^2, p^2) + \\ &+ H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m w_{2m}^F(q^2, p^2) + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=3}^7 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m w_{2m}^F(q^2, p^2)\end{aligned}\quad (45)$$

Аналогичным образом получаем асимптотические разложения напряжений (46):

$$\begin{aligned} \sigma_z^F(t, q, p, z) = & H(t - \gamma z) \sum_{m=4}^7 (t - \gamma z)^m \sigma_{z1}^F(q^2, p^2) + \\ & + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \sigma_{z1}^F(q^2, p^2) + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=4}^7 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m \sigma_{z1}^F(q^2, p^2) \end{aligned} \quad (46)$$

В этих выражениях функции $w_{1m}^F(q^2, p^2) \dots \sigma_{z1}^F(q^2, p^2)$ являются четными относительно параметров преобразования Фурье и значительно упрощают нахождение оригиналов, которые можно определить с учетом свойств обратного преобразования с последующей численной реализацией.

Алгоритм обращения двумерного преобразования Фурье для изображений вида $\varphi(p^2, q^2)$

Постановка задачи и соглашения

Рассмотрим функцию $u = u(x, y)$, определённую на \mathbb{R}^2 (возможная зависимость от дополнительных параметров, например t, z , далее считается фиксированной и опускается в записи). В настоящем разделе описывается алгоритм получения оригинала $u(x, y)$ по заданному изображению $u^F(p, q)$ двумерного преобразования Фурье, где параметр p соответствует координате x , а параметр q соответствует координате y .

Определения преобразований

Прямое двумерное преобразование Фурье:

$$u^F(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-i(px+qy)} dx dy \quad (47)$$

Обратное преобразование:

$$u^{F^{-1}}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^F(p, q) e^{i(px+qy)} dp dq \quad (48)$$

Рассматриваемый класс изображений

Во многих задачах математической физики и механики изображения по Фурье часто представляются линейными комбинациями слагаемых вида

$$u^F(p, q) = \sum_{m=1}^M P_m(p, q) \varphi_m(p^2, q^2), \quad (49)$$

где функции $\varphi_m(p^2, q^2)$ зависят от параметров преобразования только

через квадраты p^2 и q^2 (то есть являются чётными по p и по q), а $P_m(p, q)$ - полиномы/мономы из набора

$$1, p, q, pq, ip, iq, ipq, \dots$$

Ниже описан алгоритм обращения (2) для класса (3).

Редукция по чётности и определение базовых интегралов

Если $\varphi(p, q) = \varphi(p^2, q^2)$, то φ чётна по каждой переменной: $\varphi(-p, q) = \varphi(p, q)$ и $\varphi(p, -q) = \varphi(p, q)$. Это позволяет сводить интегралы по \mathbb{R} к интегралам по полуоси $[0, \infty)$ и заменять комплексную экспоненту на синусы и косинусы. При этом имеют место одномерные тождества чётности

Пусть Φ такова, что интегралы сходятся. Тогда для $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p^2) e^{ipx} dp = 2 \int_0^{\infty} \Phi(p^2) \cos(px) dp, \quad (50)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p \Phi(p^2) e^{ipx} dp = 2i \int_0^{\infty} p \Phi(p^2) \sin(px) dp, \quad (51)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ip \Phi(p^2) e^{ipx} dp = -2 \int_0^{\infty} p \Phi(p^2) \sin(px) dp. \quad (52)$$

Аналогичные формулы справедливы по переменной q (с заменой $p \rightarrow q$, $x \rightarrow y$).

Для базового чётного изображения $\varphi(p^2, q^2)$ введём оригинал

$$v(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p^2, q^2) e^{i(px+qy)} dp dq. \quad (53)$$

Используя свойства чётности функции $\varphi(p^2, q^2)$ по p или по q , получаем формулу редукции:

$$\boxed{v(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} e^{ipy} \int_0^{\infty} \varphi(p^2, q^2) \cos(qx) dq dp.} \quad (54)$$

Для нахождения оригиналов перемещений и напряжений удобно использовать следующие дифференциальные соответствия:

- пусть $v(x, y)$ достаточно гладка и убывает на бесконечности так, что допускаются интегрирование по частям и перенос производной под знак интеграла. Тогда выполняются тождества:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^F(p, q) = ipu^F(p, q), \quad (55)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^F(p, q) = iqu^F(p, q), \quad (56)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^F(p, q) = -(pq)u^F(p, q). \quad (57)$$

Используя эти тождества необходимо вычислить только базовые интегралы:

Вычисление базовых интегралов осуществляется по формуле (54) с последующей численной реализацией, тогда выражения для перемещений и напряжений будут иметь вид:

$$w(t, x, y, z) = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(t - \gamma z) \sum_{m=3}^7 (t - \gamma z)^m w_{1m}(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(t - \gamma z) \sum_{m=3}^7 (t - \gamma z)^m w_{1m}(x, y) + \\ + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m w_{2m}(x, y) + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=3}^7 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m w_{2m}(x, y) \quad (58)$$

$$\sigma_z(t, x, y, z) = H(t - \gamma z) \sum_{m=4}^7 (t - \gamma z)^m \sigma_{z1m}(x, y) + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \sigma_{z1m}(x, y) + \\ + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=4}^7 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m \sigma_{z1m}(x, y) \quad (59)$$

В этих формулах базовые функции вычисляются с помощью интегралов:

$$w_{1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty w_{1m}(q^2, p^2) \cos(qx) dq dp \\ \sigma_{z1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \sigma_{z1m}(q^2, p^2) \cos(qx) dq dp$$

Эти функции могут быть вычислены аналитически или численно. Численный подход основан на вычислении интегралов по квадратурной схеме на $[0, p_{\max}] \times [0, q_{\max}]$:

$$v(x_i, y_j) \approx \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=0}^{N_p} e^{ipy} \sum_{\ell=0}^{N_q} w_k w_\ell \varphi(p_k^2, q_\ell^2) \cos(q_k x_i).$$

После построения базовых $v_m(x, y)$ искомая функция восстанавливается дифференцированием согласно выражениям (61) и (62).

Результаты расчетов кинематических и статических параметров полупространства представлены на рис 2-4.

График перемещений

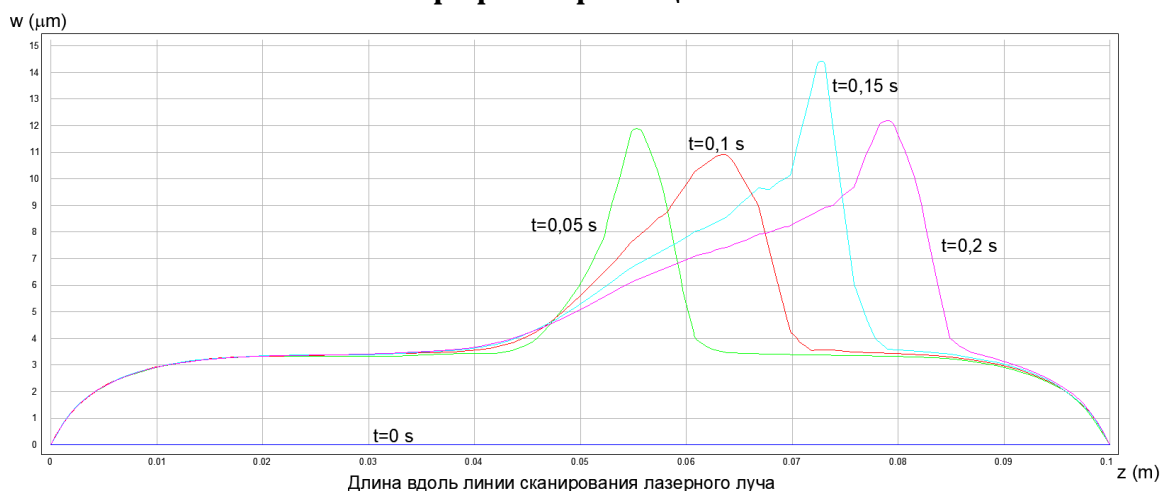


Рисунок 2 - Распределение прогибов полупространства по глубине в различные моменты времени

График напряжений

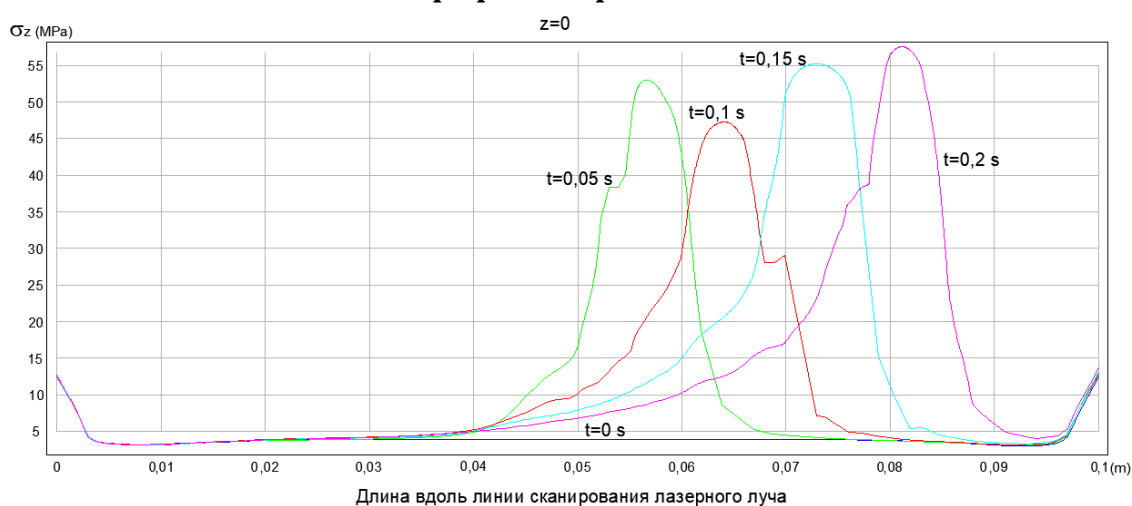


Рисунок 3 - Распределение нормальных напряжений на поверхности полупространства в различные моменты времени

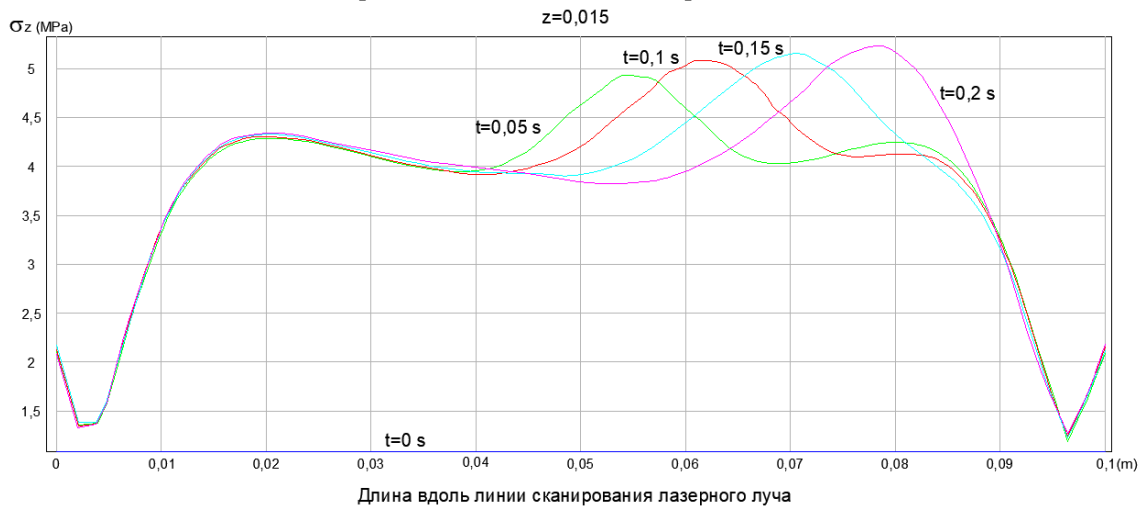


Рисунок 4 - Распределение нормальных напряжений внутри полупространства в различные моменты времени

Выводы

На основании проведенных в данной работе расчетов получены следующие результаты:

1. Сформулирована и приближённо-аналитически решена краевая задача о термоупругом напряжённо-деформированном состоянии изотропного полупространства при воздействии высокоинтенсивных тепловых потоков и нестационарных температурных полей. Разработанный подход обеспечивает согласованное описание температурных и механических эффектов в рамках единой математической модели.

2. Получены замкнутые аналитические соотношения для определения компонент вектора перемещений и тензора напряжений как на поверхности, так и во внутренней области полупространства. Выведенные выражения допускают численную реализацию и параметрический анализ влияния теплофизических и упругих характеристик материала.

3. Установлено, что во времени наблюдается интенсивный рост кинематических (перемещения, деформации) и статических (напряжения) параметров, обусловленный концентрацией тепловой энергии в приповерхностной зоне и конечной скоростью распространения тепловых возмущений.

4. Показано, что максимальные значения динамических напряжений локализуются на поверхности полупространства и существенно превышают соответствующие величины в глубинных слоях, что свидетельствует о выраженной неоднородности распределения термоупругих эффектов по толщине среды.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Бабайцев А.В., Рабинский Л.Н., Ян Наинг Мин. Методика оценки остаточных напряжений в образцах из сплава AlSi10Mg, полученных по технологии SLM // Труды МАИ. 2021. No 119. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=159788>.
2. Babaytsev A.V., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N., Tushavina O.V. Investigation of permanent strains in nanomodified composites after molding at elevated temperatures // Periodico Tche Quimica, 2020, vol. 17, no. 34, pp. 1055 — 1065.
3. Elham Mirkoohi, James R. Dobbs, Steven Y. Liang, Analytical mechanics modeling of in-process thermal stress distribution in metal additive manufacturing, Journal of Manufacturing Processes, Volume 58, 2020, Pages 41-54, <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2020.08.009>.
4. Штрикман М.М., Кащук Н.М. Определение тепловых напряжений и деформаций при фрикционной сварке трехслойных панелей из алюминиевых сплавов // Труды МАИ. 2011. № 43. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=24728>
5. Терещенко Т.С., Орехов А.А. Рабинский Л.Н. Исследование статических и динамических физико-механических характеристик стали, изготовленной методом послойного лазерного спекания // Труды МАИ. 2025. No 140. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184051>
6. Tushavina, O. V. (2020). Coupled heat transfer between a viscous shock gasdynamic layer and a transversely streamlined anisotropic half-space. INCAS Bulletin, 12(Special Issue), 211-220. doi:10.13111/2066-8201.2020.12.S.20
7. Pronina, P. F., Sun, Y., & Tushavina, O. V. (2020). Mathematical modelling of high-intensity heat flux on the elements of heat-shielding composite materials of a spacecraft. Journal of Applied Engineering Science, 18(4), 693-698. doi:10.5937/jaes0-28086
8. Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 162(2). – Pp. 246-253.
9. Лебёдкин И.Ф., Молотков А.А., Третьякова О.Н. Математическое

моделирование сложного теплообмена при разработке лазерных SLM технологий // Труды МАИ. 2018. No 101. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=97045>

10. Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Generalized Unsteady Thermal Conductivity in a Half-Space // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. No. 44. P. 4429–4437. DOI: 10.1134/S1995080223100086

11. Нгуен Т. Л. Нагрев полупространства движущимся источником теплового лазерного импульса // Труды МАИ. 2025. No 143. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185637>

12. Kruth J-P, Deckers J, Yasa E, Wauthlé R. Assessing and comparing influencing factors of residual stresses in selective laser melting using a novel analysis method. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture. 2012;226(6):980-991. doi:10.1177/0954405412437085

13. Нгуен Т.Л., Добрянский В.Н., Рабинский Л.Н. исследование термомеханики процесса селективного лазерного плавления порошков различного гранулометрического состава // Труды МАИ. 2025. No 145. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=186878>

14. Igumnov L.A., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Plane Nonstationary Problem of Motion of the Surface Load Over an Elastic Half Space // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2014. – 203(2). – Pp. 193-201.

References

1. Babaytsev A.V., Rabinskiy L.N., Yan Naing Min. Methodology for assessing residual stresses in AlSi10Mg alloy specimens produced by SLM technology // Proceedings of MAI. 2021. No 119. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=159788>.

2. Babaytsev A.V., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N., Tushavina O.V. Investigation of permanent strains in nanomodified composites after molding at elevated temperatures // Periodico Tche Quimica, 2020, vol. 17, no. 34, pp. 1055 — 1065.

3. Elham Mirkoohi, James R. Dobbs, Steven Y. Liang, Analytical mechanics modeling of in-process thermal stress distribution in metal additive manufacturing, Journal of Manufacturing Processes, Volume 58, 2020, Pages 41-54, <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2020.08.009>.

4. Shtrikman M.M., Kashchuk N.M. Determination of thermal stresses and deformations during friction welding of three-layer panels made of aluminum alloys // Proceedings of MAI. 2011. No. 43. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=24728>
5. Tereshchenko T.S., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Study of the static and dynamic physical-mechanical characteristics of steel manufactured by the selective laser sintering method // Trudy MAI. 2025. No 140. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184051>
6. Tushavina, O. V. (2020). Coupled heat transfer between a viscous shock gasdynamic layer and a transversely streamlined anisotropic half-space. INCAS Bulletin, 12(Special Issue), 211-220. doi:10.13111/2066-8201.2020.12.S.20
7. Pronina, P. F., Sun, Y., & Tushavina, O. V. (2020). Mathematical modelling of high-intensity heat flux on the elements of heat-shielding composite materials of a spacecraft. Journal of Applied Engineering Science, 18(4), 693-698. doi:10.5937/jaes0-28086
8. Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 162(2). – Pp. 246-253.
9. Lebyodkin I.F., Molotkov A.A., Tretyakova O.N. Mathematical modeling of complex heat exchange in the development of laser SLM technologies // Trudy MAI. 2018. No 101. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=97045>
10. Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Generalized Unsteady Thermal Conductivity in a Half-Space // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. No. 44. P. 4429–4437. DOI: 10.1134/S1995080223100086
11. Hryen T. Л. Heating of a half-space by a moving source of laserheat pulse // Труды МАИ. 2025. No 143. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185637>
12. Kruth J-P, Deckers J, Yasa E, Wauthlé R. Assessing and comparing influencing factors of residual stresses in selective laser melting using a novel analysis method. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture. 2012;226(6):980-991. doi:10.1177/0954405412437085
13. Hryen T.Л., Dobryanskiy V.N., Rabinskiy L.N. Investigation of the thermomechanics of the selective laser meltingprocess for powders with different

particle size distributions // Труды МАИ. 2025. No 145. URL:
<https://trudymai.ru/published.php?ID=186878>

14. Igumnov L.A., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Plane Nonstationary Problem of Motion of the Surface Load Over an Elastic Half Space // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2014. – 203(2). – Pp. 193-201.

Информация об авторах

Туан Лонг Нгуен, аспирант, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: kqvn.nguyenlong@gmail.com

Information about the authors

Tuan Long Nguyen, graduate student, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia; e-mail: kqvn.nguyenlong@gmail.com

Получено 04 марта 2026 ● Принято к публикации 27 марта 2026 ● Опубликовано 30 апреля 2026
Received 04 March 2026 ● Accepted 27 March 2026 ● Published 30 April 2026
