

Труды МАИ. 2025. № 141
Trudy MAI. 2025. No. 141. (In Russ.)

Научная статья

УДК 681.51

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184513>

EDN: <https://www.elibrary.ru/VLLZXI>

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЕМ В ТОРМОЗНОЙ СИСТЕМЕ

Виктория Игоревна Гончарова

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Российская Федерация
goncharova_31kaf@bk.ru

Аннотация. В работе решена задача синтеза параметров системы автоматического управления (САУ) с распределенными параметрами давлением в тормозной системе. В работе реализован переход от дифференциальных гиперболических уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, который впервые применен к системам автоматического управления с распределенными параметрами. Также, алгоритм параметрического синтеза, известный обобщенный метод Галеркина, распространен на системы автоматического управления с распределенными параметрами, в частности САУ давлением в тормозной системе. Проведено сравнение работы систем, в случае, когда блок управления рассматривается как звено «чистого запаздывания», и, в случае, когда блок управления рассматривается как звено с распределенными параметрами. В ходе решения задачи синтеза определены параметры желаемого программного движения, невязка, уравнение динамики системы, исходя из известной структуры синтезируемой САУ. Из полученных значений варьируемых параметров регулятора и переходных процессов системы, следует вывод о том, что с применением

модифицированного обобщенного метода Галеркина (метода ортогональных проекций), математическая модель блока с распределенными параметрами дает возможность построения более точной математической модели системы.

Ключевые слова: система автоматического управления, САУ с распределенными параметрами, метод разделения переменных (Фурье), дифференциальные уравнения в частных производных.

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2023-0003, "Фундаментальные основы построения помехозащищенных систем космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга"

Для цитирования: Гончарова В.И. Параметрический синтез системы управления давлением в тормозной системе // Труды МАИ. 2025. № 141. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184513>

Original article

PARAMETRIC SYNTHESIS OF THE BRAKE PRESSURE CONTROL SYSTEM

Victoria I. Goncharova

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,

Saint-Petersburg, Russian Federation

goncharova_31kaf@bk.ru

Abstract. Automatic control systems (ACS) with distributed parameters are a fairly large and widely used class of systems. The difficulty in researching and constructing mathematical models of such systems lies mainly in their features, namely, that they require taking into account two or more parameters. Hence the name - ACS with distributed parameters. This fact implies the description of a block with distributed parameters by a

partial differential equation. Many well-known methods of parametric synthesis, including the generalized Galerkin method, involve the use of ordinary differential equations, which makes it urgent to implement the transition from partial differential equations to ordinary differential equations. The paper implements the transition from hyperbolic partial differential equations to ordinary differential equations using the method of separation of variables (Fourier method), which was first applied to automatic control systems with distributed parameters. Also, the algorithm of parametric synthesis, the well-known generalized Galerkin method, is extended to automatic control systems with distributed parameters, in particular to ACS pressure in the braking system. It is noted in the work that earlier automatic control systems with distributed parameters were synthesized as systems with a delay. A comparison of the operation of the systems is carried out in the case when the control unit is considered as a link of "pure delay", and in the case when the control unit is considered as a link with distributed parameters. In the course of solving the synthesis problem, the parameters of the desired program motion, the discrepancy, and the equation of system dynamics are determined based on the known structure of the synthesized ACS. From the obtained values of the variable parameters of the regulator and the transients of the system, it follows that using the modified generalized Galerkin method (orthogonal projection method), the mathematical model of the block with distributed parameters makes it possible to build a more accurate mathematical model of the control system.

Keywords: automatic control system, ACS with distributed parameters, method of separation of variables (Fourier), partial differential equations

Funding: the paper was prepared with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, grant agreement No. FSRF-2023-0003, "Fundamental principles of building of noise-immune systems for space and satellite communications, relative navigation, technical vision and aerospace monitoring"

For citation: Goncharova V.I. Parametric synthesis of the brake pressure control system.

Trudy MAI. 2025. No. 141. (In Russ.). URL:

<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=184513>

Введение

В настоящее время САУ с распределенными параметрами являются основой всех технологических процессов, в том числе в авиационной промышленности. Рассматриваемый класс систем всегда учитывает несколько параметров при построении математической модели системы. Данное обстоятельство накладывает определенные сложности на решение задачи параметрического синтеза, в виду того, что многие методы синтеза подразумевают использование обыкновенных дифференциальных уравнений [1-5].

Автоматизированные системы управления с распределенными параметрами обычно считаются системами с задержками, которые в некоторых случаях допустимы, но снижают точность получаемых характеристик системы. С целью повышения точности построения математической модели в работе впервые предложена возможность перехода в САУ с распределенными параметрами от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, что позволяет использовать достаточно широко известный метод параметрического синтеза - обобщенный метод Галеркина (метод ортогональных проекций) [6-8].

Описание объекта исследования

Используя модель системы управления давлением из [9-10], содержащую трубопроводную линию, состоящую из двух отрезков. Модель системы является распределенной в следствии наличия нескольких отрезков в трубопроводной линии.

На рисунке 1 представлена модель исполнительного элемента системы управления давлением в тормозной системе.

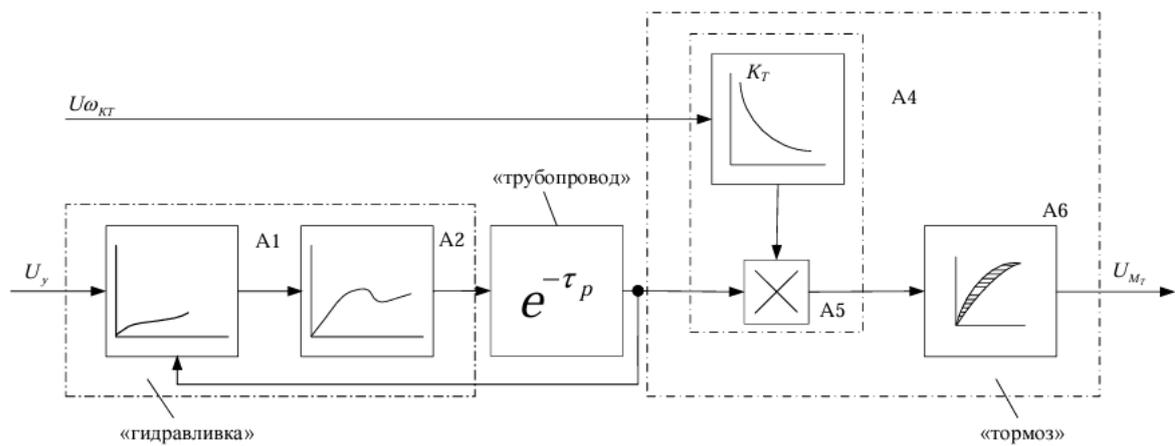


Рисунок 1 – Функциональная схема имитационной модели исполнительного элемента

Схема состоит из модели управляющей части гидравлической части $A1$, $A2$, включающая в себя модели наполнения тормоза $A1$, модели переходных процессов в следящей системе и гидроусилителя $A2$, модели запаздывания $A3$, включающие в себя общее «чистое» запаздывание в системе и модели тормоза $A4$, $A5$, $A6$ – модели зависимости коэффициента тормоза от скорости колеса и модели гистерезиса.

Рассмотрим структурную схему исполнительной части САУ торможения колес (рисунок 2),

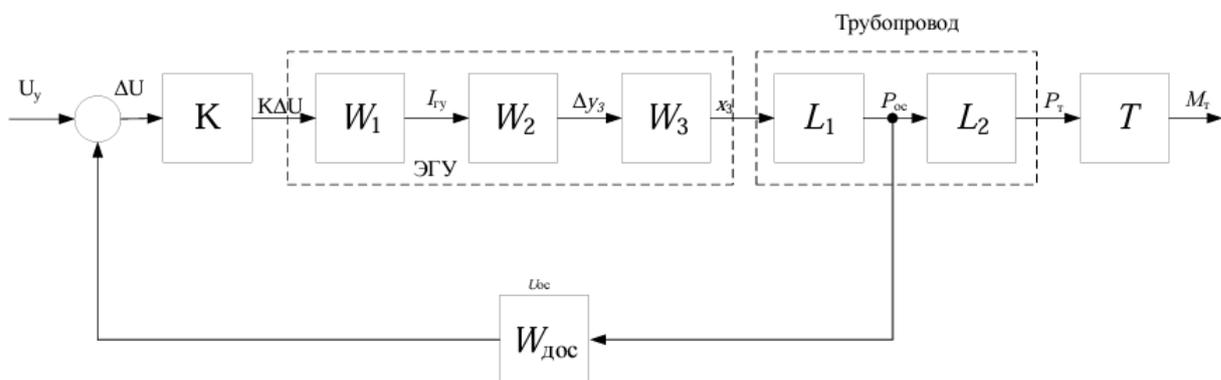


Рисунок 2 – Структурная схема исполнительной части САУ торможения колес где в блоке K происходит усиление сигнала рассогласования. Уравнение блока K ; записывается следующим образом:

$$U_{\text{вых}} = K\Delta U,$$

где ΔU – сигнал рассогласования, $U_{\text{вых}}$ – выходной сигнал блока, K – коэффициент усиления. Необходимо отметить, что $U_{\text{вых}}$ имеет ограничение равное 10 В.

Блок W_1 – служит для преобразования усиленного сигнала рассогласования в постоянный ток обмоток управления гидроусилителем. Тогда

$$W_1(p) = \frac{I_{гy}(p)}{\Delta U} = \frac{K}{T_y(p) + 1},$$

где $I_{гy}$ – ток обмоток управления гидроусилителя, T_y – постоянная времени преобразователя сигнала рассогласования в ток обмотки управления гидроусилителем:

$$T_y = \frac{L}{R},$$

L – индуктивность обмоток управления гидроусилителя, R – сопротивление контура, по которому протекает ток, $R = R_u + R_{упр}$, R_u – сопротивление источника сигнала рассогласования, $R_{упр}$ – сопротивление обмоток управления гидроусилителем.

Блок W_2 служит для преобразования тока обмоток гидроусилителя в отклонение заслонки электромагнитной головки гидроусилителя. Магнитодвижущие силы подмагничивания $E_{пн}$ и управления $E_{упр}$ суммируясь в рабочих зазорах, создают движущее усилие на якоре электромагнита. При перемещении якоря тяговое усилие уравновешивается упругими силами пружины. При этом якорь и заслонка отклоняются на величину пропорциональную току управления:

$$H = R_h I_{гy},$$

где h – перемещение якоря, приведенное к оси сопел; $R_h = \frac{\partial h}{\partial I_{гy}}$ – коэффициент

пропорциональности, зависящий от параметров магнитной системы, числа витков обмотки гидроусилителя и жесткости упругого элемента.

Блок W_2 описывается передаточной функцией электромагнитной головки, которая записывается в виде колебательного звена:

$$W_2(s) = \frac{h(p)}{I_{гy}(p)} = \frac{R_2}{T_2^2 p^2 + \zeta_2 T_2 p + 1},$$

где $T_2 = \sqrt{\frac{m}{c_2}}$ – электромеханическая постоянная времени; $\zeta_2 = \frac{B}{2\sqrt{c_2}}$ – коэффициент относительного демпфирования; $R_2 = Rh$ – коэффициент передачи.

Блок W_3 обеспечивает преобразование движения заслонки электромагнитной головки усилителя в движение золотника гидроусилителя. В рассматриваемом примере гидроусилитель является статическим, то есть золотник гидроусилителя дополнен специальными пружинами. Для линеаризации и упрощения движения статического гидроусилителя, используем следующие условные утверждения: масса, сухое и вязкое трение золотника минимальны и ими можно пренебречь.

Передаточная функция гидроусилителя от перемещения к перемещению золотника представим в виде:

$$W_{xh}(p) = W_3(p) = \frac{x(p)}{h(p)} = \frac{R_{zy}}{T_{zy}p + 1},$$

где $R_{zy} = \frac{\partial x}{\partial h} = R_{ph}R_{xy}$ – коэффициент передачи гидроусилителя, $L1$ и $L2$ входят в состав трубопровода, описание которого будет представлено ниже.

В тормозе давление P_T в полости тормоза преобразуется в перемещение и сжатие тормозных дисков, в результате чего возникает момент, при движении колес по поверхности.

Запишем уравнение кинетической энергии системы:

$$T = \left(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 \right) \frac{1}{2}.$$

В системе датчик обратной связи (ДОС) предназначен для преобразования давления обратной связи в электрический сигнал U_{oc} постоянного тока, через который и замыкается система торможения колес.

Запишем передаточную функцию ДОС:

$$W_{doc}(p) = \frac{k}{(Tp + 1)},$$

где T – const времени фильтра Φ , K – коэффициент усиления фильтра.

Постоянную времени фильтра найдем как:

$$T = R \cdot C, K = \frac{R_{oc}}{R}.$$

Трубопровод

В рассматриваемой задаче длина трубопроводной линии состоит из двух частей (L_1 и L_2), и общая длина линии составляет примерно 8 м. Соответственно трубопровод необходимо рассматривать, как элемент с распределенными параметрами. Мгновенные отклонения давления и скорости среды (жидкости), а также скорость распространения возмущения по линии зависят от свойств среды, жесткости стенок и гидравлического сопротивления линии. Перечисленные факторы находят отражение в операторном коэффициенте распространения. Он является важной величиной, характеризующей динамические особенности линии с распределенными параметрами, и определяется по формуле:

$$V(p) = \pm \sqrt{\frac{p}{B_{mp}} \left[\rho_0 p + \frac{2W\tau v(p)}{r_0} \right]}. \quad (1)$$

Знак в формуле принимается положительный, если возмущение распространяется в положительном направлении. Для волны, распространяющейся в отрицательном направлении, берется знак «минус»:

$$B_{mp} = \frac{B}{1 + \frac{2r_0 B}{\delta E_{cm}}},$$

B – модуль объемной упругости жидкости, r_0 – радиус проходного сечения трубы, E_{cm} – модуль упругости стенок трубы, δ – толщина стенок трубопровода, ρ_0 – плотность жидкости.

Передаточная функция для касательного напряжения на стенке трубы:

$$W_{\tau v}(p) = \frac{j\rho p j_1 \left(jr_0 \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{\sqrt{\frac{p}{v}} j_2 \left(jr_0 \sqrt{\frac{p}{v}} \right)},$$

где j_1 – функция Бесселя первого рода, первого порядка; j_2 – функция Бесселя второго рода, второго порядка; ν – кинематическая вязкость жидкости; p – переменная в преобразовании Лапласа; j – мнимая единица; ρ – плотность среды.

Операторный коэффициент распространения непосредственно связан с операторным волновым сопротивлением

$$\nu(p) = \frac{pZ_B(p)}{B_{mp}}. \quad (2)$$

При определении частотных характеристик линии вместо p подставляется $j\omega$. В этом случае коэффициент распространения принимает комплексную форму

$$\nu(j\omega) = \pm(\delta_3 + j\varepsilon_\phi). \quad (3)$$

Входящие в это соотношение величины δ_3 и ε_ϕ называют соответственно коэффициентом затухания и коэффициентом фазы. Коэффициент затухания характеризует уменьшение по длине амплитуды давления или амплитуды скорости среды в волне возмущения, распространяющегося по линии с фазовой скоростью C_n :

$$C_n = \frac{\omega}{\varepsilon},$$

где ω – круговая частота,

$$\delta_3 = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{K_2}{2K_1} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{K_2^2}} - 1 \right)}, \quad \varepsilon_\phi = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{K_2}{2K_1} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{K_2^2}} + 1 \right)},$$

где $\varepsilon_0 = \omega \sqrt{\frac{\rho_0}{B_{mp}}}$, K_1 и K_2 – коэффициенты.

Для определения комплексного волнового сопротивления линии $Z_B(j\omega)$ подставим $p=j\omega$ в формулу (2) и приравняем полученное выражение к положительному значению комплексного коэффициента распространения (3). Исключив затем с помощью формулы величины δ_3 и ε_ϕ , после алгебраических преобразований найдем:

$$Z_B(j\omega) = Z_{B_0} \sqrt{\frac{K_2}{K_1} - \frac{j}{K_1}},$$

где $Z_{B_0} = \sqrt{\rho_0 B_{mp}}$ – волновое сопротивление невязкой среды.

Если гидравлическое сопротивление принимать квазистационарным и не учитывать неравномерность распределения скоростей, как это сделано в [11], то

$$K_1 = K_2 = \frac{\omega \cdot r_0}{8\nu}.$$

Для безразмерной величины $\bar{\omega} > \omega$ можно записать:

$$\delta_3 = \frac{4\nu\chi_a}{r_0^2} \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_{\rho}\beta B_{mp}}}, \quad \varepsilon_{\phi} = \omega \sqrt{\frac{\chi_{\rho}\beta\rho_0}{B_{mp}}}, \quad (4)$$

где $\chi_a, \chi_{\rho}\beta$ – коэффициенты,

$$\chi_a \approx \left(\frac{r_0}{4}\right) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} + 0.4, \quad \chi_{\rho}\beta \approx 1.$$

Соотношение (4) указывает на увеличение коэффициента затухания с увеличением коррективы χ_a и с уменьшением корректив $\chi_{\rho}\beta$.

Такое изменение этих корректив соответствует увеличению безразмерной частоты, и, следовательно, высокочастотные колебания должны затухать по длине линии интенсивнее, чем низкочастотные.

При $\bar{\omega} > 300$ корректив χ_a можно вычислить:

$$\chi_a = \left(\frac{r_0}{4}\right) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}},$$

здесь корректив $\chi_{\rho}\beta \approx 1$.

Тогда

$$Z_B(j\bar{\omega}) = Z_{B_0} \sqrt{1 - j \sqrt{\frac{2\nu}{\omega r_0^2}}}.$$

Динамические характеристики однородной линии круглого сечения с упругими стенками при движении вязкой сжимаемой среды можно определить с помощью следующих выражений:

$$\left[\rho_0 p + \frac{2W\tau\nu(p)}{r_0} \right] V(p) = - \frac{d\rho(p)}{d\chi}, \quad (5)$$

$$B_{mp} \frac{dV(p)}{d\chi} = -p\rho(p). \quad (6)$$

Решение данной системы уравнений позволяет найти для выбранного сечения линии мгновенные отклонения от установившихся значений средних по сечению давления и скорости среды. Каждая из этих величин будет представлять собой сумму одноименных с ней величин, определяемых во фронте возмущения, распространяющегося по линии в прямом и в обратном направлениях. Как уже указывалось выше, мгновенные отклонения давления и скорости среды, а также скорость распространения возмущения по линии зависят от свойств среды, жесткости стенок и гидравлического сопротивления линии.

Продифференцировав уравнение (5) по x , исключив затем с помощью уравнения (6) производную $\frac{dV(p)}{dx}$ и применив соотношение (1), получим:

$$\frac{\partial^2 \rho(p)}{\partial x^2} - V^2(p)\rho(p) = 0.$$

Это уравнение имеет решение:

$$\rho(p, x) = C_1 e^{V(p)x} + C_2 e^{-V(p)x}.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются граничными условиями.

Пусть при $x=0$:

$$\rho(p, x) = \rho_1(p, 0), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho(p, x)}{\partial x} = -\frac{V^2(p)B_{mp}}{p} V_1(p, 0).$$

При граничных условиях:

$$C_1 = \frac{\rho_1(p, 0)}{2} - \frac{V(p)B_{mp}}{2p} V_1(p, 0), \quad C_2 = \frac{\rho_1(p, 0)}{2} + \frac{V(p)B_{mp}}{2p} V_1(p, 0).$$

После постановки C_1 и C_2 в уравнение (7) имеем:

$$\rho(p, x) = \frac{\rho_1(p, 0)}{2} (e^{V(p)x} + e^{-V(p)x}) - \frac{V(p)B_{mp}}{2p} V_1(p, 0) (e^{V(p)x} - e^{-V(p)x})$$

или введением гиперболических функций в виде:

$$\rho(p, x) = \rho_1(p, 0)ch[V(p)x] - \frac{V(p)B_{mp}}{s} V_1(p, 0)sh[V(p)x]. \quad (8)$$

Решив систему уравнений (5) и (6) относительно $V(p, x)$ получим:

$$V(p, x) = V_1(p, 0)ch[V(p)x] - \frac{P}{V(p)B_{mp}} \rho_1(p, 0)sh[V(p)x]. \quad (9)$$

Примем длину линии равной L и обозначим по Лапласу давление и скорость среды в конечном сечении линии $x=L$ соответственно $\rho_2(p, L)$ и $V_2(p, L)$. Тогда при $x=L$ уравнения (8) и (9) примут вид:

$$\rho_2(p, L) \cdot \rho_1(p, 0)ch[V(p)L] - \frac{V(p)B_{mp}}{p} V_1(p, 0)sh[V(p)L], \quad (10)$$

$$V_2(p, L) = V_1(p, 0)ch[V(p)L] - \frac{P}{V(p)B_{mp}} \rho_1(p, 0)sh[V(p)L]. \quad (11)$$

При согласованной нагрузке от конца линии не отражаются волны возмущений, распространяющихся по линии, так как подключенное устройство пропускает точно тот расход среды, который переносится прямой волной. Вследствие этого на нагруженном конце линии не меняется скорость движения среды, и, следовательно, не меняется давление в конечном сечении.

Частотные характеристики линии с согласованной нагрузкой можно найти по передаточной функции, представляющей собой отношение изображений по Лапласу давлений в выходном и входном сечениях. Исключив из уравнений (10) и (11) величины $V_1(p, 0)$, $V_2(p, 0)$ и выключив обычно применяемые при определении передаточных функций, заменив гиперболические функции экспоненциальными, получим:

$$\frac{\rho_2(p, L)}{\rho_1(p, 0)} = e^{-V(p)L}. \quad (12)$$

При $p=j\omega$ и используя уравнение (3), которое учитывает комплексную форму коэффициента распространения передаточная функция (12) превращается в амплитудно-фазовую частотную функцию:

$$\frac{\rho_2(j\omega, L)}{\rho_1(j\omega, 0)} = e^{-(\delta_3 + j\varepsilon_\varphi)L}$$

Если учесть выражение (3), то

$$\frac{\rho_2(j\omega, L)}{\rho_2(j\omega, 0)} = e^{-\delta_3 L} e^{-j\omega \frac{L}{C_n}},$$

где $\frac{L}{C_n}$ – время распространения волны возмущения от входного сечения линии.

Фазу линии φ_n можно вычислить по формуле:

$$\varphi_n = \frac{-\omega L}{C_n}.$$

Если пренебречь вязкостью рабочей среды, то коэффициент затухания δ_3 обратится в ноль и амплитудно-фазовая частотная характеристика линии будет такой, как у звена чистого запаздывания, то есть амплитуда не будет зависеть от частоты. Можно пренебречь уменьшением амплитуды при увеличении частоты. При несогласованной нагрузке на частотные характеристики линии существенно влияют концевые сопротивления (концевые импедансы).

Рассмотрим схему соединения сопротивлений гидравлической линии (рисунок 3), где $Z_1(p)$ входное сопротивление линии в сечении 1-1. P_1 и Q_1 давления и расход в этом же сечении. $Z_2(p)$ выходное сопротивление линии в сечении 2-2. P_2 и Q_2 давление и расход в концевом сечении.

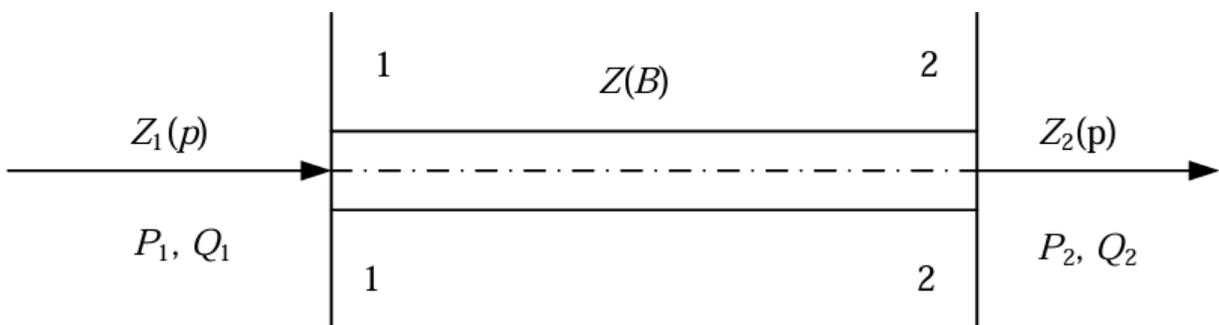


Рисунок 3 – Схема соединений сопротивлений гидравлической линии

Амплитудно-фазовую частотную характеристику линии с несогласованной нагрузкой при известном концевом комплексном сопротивлении $Z_2(j\omega)$ можно найти следующим образом:

$$\frac{\rho_2(j\omega, L)}{\rho_1(j\omega, 0)} = \frac{1}{\frac{Z'_B(j\omega)}{Z_2(j\omega)} sh(\delta + j\varepsilon)L + ch(\delta + j\varepsilon)L}, \quad (13)$$

где

$$Z_2(j\omega) = Z'_B(j\omega) \frac{\frac{Z_1(j\omega)}{Z'_B(j\omega)} ch[V(j\omega)L] - sh[V(j\omega)L]}{ch[V(j\omega)L] - \frac{Z_1(j\omega)}{Z'_B(j\omega)} sh[V(j\omega)L]},$$

$$Z'_B(j\omega) = \frac{Z_B(j\omega)}{\pi r_0^2}, \quad (14)$$

$$Z_1(j\omega) = Z'_B(j\omega) \frac{sh[V(j\omega)L] + \frac{Z_2(j\omega)}{Z'_B(j\omega)} ch[V(j\omega)L]}{\frac{Z_2(j\omega)}{Z'_B(j\omega)} sh[V(j\omega)L] + ch[V(j\omega)L]}.$$

По аналогии с электрическими линиями представим комплексное сопротивление в виде:

$$Z_2(j\omega) = R_{ак} + jR_{рк}, \quad (15)$$

где $R_{ак}$ и $R_{рк}$ – соответственно активное и реактивное сопротивления нагрузки.

Комплексное волновое сопротивление линии $Z'_B(j\omega)$ с помощью (2), (3) и (14) запишется:

$$Z'_B(j\omega) = \frac{B_{mp}}{\pi r_0^2 \omega} (\varepsilon - i\delta).$$

Тогда можно записать:

$$\frac{Z'_B(j\omega)}{r_2(j\omega)} = M + jN,$$

где

$$M = \frac{B_{mp} (R_{ак} \varepsilon_\phi - \delta_3 R_{рк})}{\pi r_0^2 \omega (R_{ак}^2 + R_{рк}^2)}, \quad N = \frac{B_{mp} (R_{рк} \varepsilon_\phi + \delta_3 R_{ак})}{\pi r_0^2 \omega (R_{ак}^2 + R_{рк}^2)}.$$

Заменим в уравнении (13) отношение $\frac{Z'_B(j\omega)}{Z_2(j\omega)}$ его комплексным значением и

применив формулу преобразования гиперболических и тригонометрических функций, получим:

$$\frac{\rho_2(j\omega, L)}{\rho_1(j\omega, L)} = \frac{2}{M_1 + jN_1}, \quad (15)$$

$$M_1 = \left[(1+M)e^{\delta_3 L} + (1-M)e^{-\delta_3 L} \right] \cos \varepsilon_\phi L - N(e^{\delta_3 L} + e^{-\delta_3 L}) \sin \varepsilon_\phi L, \quad (16)$$

$$N_1 = \left[(1+M)e^{\delta_3 L} - (1-M)e^{-\delta_3 L} \right] \sin \varepsilon_\phi L + N(e^{\delta_3 L} - e^{-\delta_3 L}) \cos \varepsilon_\phi L.$$

Амплитудную $Ap_2p_1(\omega)$ и фазовую $\varphi p_2p_1(\omega)$ частотные характеристики находим по зависимости (15) в обычном виде:

$$Ap_2p_1(\omega) = \frac{2}{\sqrt{M_1^2 + N_1^2}}, \quad (17)$$

$$\varphi p_2p_1(\omega) = -\arctg\left(\frac{N_1}{M_1}\right). \quad (18)$$

Величины M_1 и N_1 , входящие в амплитудную (17) и фазовую (18) частотные характеристики, являются, как показывает (16) функциями частоты колебаний, параметров линии и нагрузки. Для того, чтобы определить амплитуду и фазу давления обратной связи необходимо вместо L в формулах (16) поставить величину линии L_1 , а результат M_1 и N_1 подставить в выражение (17) и (18).

Для определения амплитуды и фазы давления на входе в тормоз P_T следует проделать те же операции, но вместо L_1 подставить L_1+L_2 .

Для сравнения полученных переходных процессов, реализуем переход от дифференциальных гиперболических уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью программы для ЭВМ [12], с помощью метода разделения переменных (Фурье) получим матрицы пространства состояний A , B и C объекта управления.

Необходимо в двумерной области:

$$D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq 1\},$$

решить дифференциальное уравнение в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}U + \gamma(x, t) \cdot \frac{d}{dt}U - K_1(x, t) \cdot \frac{d^2}{dx^2}U - K_2(x, t) \frac{d}{dx}U - \\ - \beta(x, t) \cdot U = g(x, t). \end{aligned}$$

с учетом граничных условий: $u(0, t) = 1$, $u(\pi, t) = 2$, или

$$a_0 \cdot U(a, t) + a_1 \cdot \frac{d}{dx}U(a, t) = a_2(t), \quad b_0 \cdot U(b, t) + b_1 \cdot \frac{d}{dx}U(b, t) = b_2(t).$$

В случае, если значения функций γ , K_1 , K_2 , β , g , a_2 , b_2 не зависят от значения времени t . Необходимо задать $\gamma(x)$, $K_1(x)$, ($K_1 > 0$), $K_2(x)$, $\beta(x)$, $g(x)$, $f(x)$, $\phi(x)$ и численные значения параметров:

$$\begin{aligned} c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 2, c_4 = 1, \gamma(x) = 0, K_1(x) = c_1, K_2(x) = 0, \beta(x) = 0, g(x) = 0, \\ a = 0, b = \pi, a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = c_2, b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = c_3, \phi(x) = 0, \end{aligned}$$

и функцию:

$$f(x) = c_4 \cdot x^2 + \frac{c_3 - c_2 - c_4 \cdot b^2}{b} x + c_2.$$

Например, для наглядности введем конечный момент времени, до которого необходимо провести исследование: $T=1$ с.

Следующим этапом алгоритма является получение точного решения $U(x, t)$, используя разложение функции в ряд Фурье. Если $\beta(x)=0$, $\gamma(x)=0$, $g(x)=0$, $K_2(x)=0$, $K_1(x)=c_1=const$, то используя метод разделения переменных [13] получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} U(x, t) = U_0(x) + \\ + \sum_{k=1}^M \left(A_k \cdot \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot \sqrt{c_1} \cdot t \right) + B_k \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot \sqrt{c_1} \cdot t \right) \right) \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot x \right). \end{aligned}$$

Зададим количество слагаемых, которые обеспечивают точность решения в относительных единицах, при $M=18$ точность составляет 0.001, для наглядности возьмем значение, превышающее данный параметр, например: $M=30$.

При $a_1=0, b_1=0$ функция примет следующий вид:

$$U_0(x) = \frac{b_0 \cdot a_2 \cdot b - b_2 \cdot a_0 \cdot a}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} + \frac{(b_2 \cdot a_0 - b_0 \cdot a_2) \cdot x}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)}.$$

Далее необходимо вычислить значения коэффициентов:

$$A_{2_{i-1}} = \frac{2}{b-a} \cdot \int_a^b (f(x) - U_0(x)) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{b-a}\right) dx,$$

$$B_{2_{i-1}} = \frac{2}{\pi \cdot i} \cdot \int_a^b (\phi(x) - U_0(x)) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{b-a}\right) dx.$$

В этом случае получим точное решение $U(x, t)$ вида:

$$UT(x, t) = U_0(x) + \sum_{k=1}^M \left(A_{2_{k-1}} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot \sqrt{c_1} \cdot t\right) + B_{2_{k-1}} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot \sqrt{c_1} \cdot t\right) \right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{b-a} \cdot x\right).$$

Далее необходимо задать порядок приближенного решения вида:

$$U_n = V(0, x) + \sum_{k=1}^n V(k, x)H(k, t),$$

которое представляет собой количество решений $n=4$, при $k=1 \dots n$, система приближенных решений:

$$V_0(k, x) = (x - a)^k \cdot (x - b).$$

Далее необходимо нормировать их при $i=1 \dots n$, с помощью нормировочных коэффициентов:

$$VV_{i-1} = \sqrt{\int_a^b (V_0(i, x))^2 dx}.$$

После чего получаем нормированные приближенные решения:

$$V(k, x) = \left[k \neq 0, \frac{V_0(k, x)}{VV_{k-1}}, \frac{b_0 \cdot a_2 \cdot b - b_2 \cdot a_0 \cdot a}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} + \frac{(b_2 \cdot a_0 - b_0 \cdot a_2) \cdot x}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b - a)} \right].$$

Далее определим значения первых двух производных нормированного приближенного решения:

$$V_1(k, x) = \left[k \neq 0, \frac{(x-a)^k + (x-b) \cdot k \cdot (x-a)^{k-1}}{VV_{k-1}}, \frac{b_2 \cdot a_0 - b_0 \cdot a_2}{a_0 \cdot b_0 \cdot (b-a)} \right],$$

$$V_2(k, x) = \left[k \neq 0 \left[k \neq 1, \frac{2 \cdot k \cdot (x-a)^k + (x-b) \cdot k \cdot (k-1) \cdot (x-a)^{k-2}}{VV_{k-1}}, \frac{2}{VV_{k-1}} \right], 0 \right].$$

Далее введем систему приближенных функций $W(k, x) = V(k, x)$. Зададим дифференциальное уравнение в матричном виде:

$$A \cdot \frac{d^2}{dt^2} H = M \cdot \frac{d}{dt} H + C \cdot H + B,$$

для нахождения функции $H_k(t)$ при нулевых начальных условиях:

$$A \cdot H(0) = D_1, A \cdot \frac{d}{dt} H(0) = N_1,$$

при $i=1 \dots n, j=1 \dots n$:

$$A_{i-1, j-1} = \int_a^b V(j, x) \cdot W(i, x) dx,$$

$$M_{i-1, j-1} = - \int_a^b \gamma(x) \cdot V(j, x) \cdot W(i, x) dx,$$

$$C_{i-1, j-1} = \int_a^b (K_1(x) \cdot V_2(j, x) + K_2(x) \cdot V_1(j, x) + \beta(x) \cdot W(i, x)) dx,$$

$$B_{i-1} = \int_a^b ((K_1(x) \cdot V_2(0, x) + K_2(x) \cdot V_1(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x)) \times \\ \times W(i, x)) dx,$$

$$D_{1 \ i-1} = \int_a^b (f(x) \cdot V(0, x)) \cdot W(i, x) dx,$$

$$N_{1 \ i-1} = \int_a^b \phi(x) \cdot W(i, x) dx.$$

Зададим матричную систему дифференциальных уравнений в виде:

$$\frac{d^2}{dt^2} H = M_1 \cdot \frac{d}{dt} H + C_1 \cdot H + B_1,$$

при нулевых начальных условиях:

$$H(0) = D_2, \frac{d}{dt} H(0) = N_2,$$

тогда $M_1 = A^{-1} \cdot M, C_1 = A^{-1} \cdot C, B_1 = A^{-1} \cdot B, D_2 = A^{-1} \cdot D_1, N_2 = A^{-1} \cdot N_1$.

Запишем в стандартном виде систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} H = AA \cdot H + BB,$$

при начальных условиях в матричном виде:

$$\begin{aligned} H(0) &= D_2, D_{2 \ n+i-1} = N_{2 \ i-1}, \\ AA_{i-1, j-1} &= 0, AA_{n+i-1, n+j-1} = M_{1 \ i-1, j-1}, AA_{n+i-1, j-1} = C_{1 \ i-1, j-1}, \\ BB_{n+i-1} &= B_{i-1}, BB_{i-1} = 0. \end{aligned}$$

Далее необходимо найти значения коэффициентов матричной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dH}{dt} = AA \cdot H + BB,$$

при

$$\begin{aligned} H &= D_2, \\ D(t, H) &= AA \cdot H + BB. \end{aligned}$$

Получим значения коэффициентов методом Рунге-Кутты $Y = (H, 0, T, 100, D)$ при $k=1 \dots n$, тогда

$$\begin{aligned} Y_{100, k} &= \begin{pmatrix} 0,761 \\ 2,39 \\ -1,543 \\ -4,483 \cdot 10^{-13} \end{pmatrix}, AA = \begin{bmatrix} -2,837 & 7,582 & 7,048 & 9,878 \\ 4,549 & -26,749 & -28,254 & -48,398 \\ -2,937 & 36,102 & 47,418 & 88,611 \\ 3,411 \cdot 10^{-13} & -18,479 & -28,628 & -53,498 \end{bmatrix}, \\ H &= (3,194 \quad -9,095 \cdot 10^{-13} \quad 1,819 \cdot 10^{-12} \quad -9,095 \cdot 10^{-13}). \end{aligned}$$

Тогда решение примет вид:

$$U(x, 1) = U_0(x) + 0,761U_1(x) + 2,39U_2(x) - 1,543U_3(x) - 4,483 \cdot 10^{-13}U_4(x).$$

Приближенное решение при $n=4$ и $t=T$ принимает вид:

$$U(x) = V(0, x) + \sum_{k=1}^n V(k, x) \cdot Y_{100,k}.$$

Получим первое значение системы уравнений приближенных тригонометрических функций ε_{11} , заданных $|UT(x) - U(x)|$ на отрезке $[a, b]$: $\varepsilon_{11} = 0,019$.

Найдем предыдущее решение функции $U(x)$ при $n=4$:

$$UP(x) = V(0, x) + \sum_{k=1}^{n-1} V(k, x) \cdot YP_{100,k},$$

получим решение: $\varepsilon_{21} = 0,032$.

Далее найдем невязку, полученного приближенного решения:

$$\begin{aligned} R_1(x) = & \sum_{k=1}^n \left[V(k, x) \left[\sum_{z=1}^n (M_{1\ k-1, z-1} \cdot Y_{100, n+z} + C_{1\ k-1, z-1} \cdot Y_{100, n+z}) + B_{1\ k-1} \right] \right] - \\ & - \gamma(x) \sum_{k=1}^n \left[V(k, x) \cdot \sum_{z=1}^n (M_{1\ k-1, z-1} \cdot Y_{100, n+z}) \right] - \\ & - \sum_{k=1}^n [K_1(x) \cdot V_2(k, x) + K_2(x) \cdot V_1(k, x) + \beta(x) \cdot V(k, x)] \times \\ & \times Y_{100,k} - (K_1(x) \cdot V_2(0, x) + K_2(x) \cdot V_1(0, x) + \beta(x) \cdot V(0, x) + g(x)) \end{aligned}$$

и определим значение: $\varepsilon_{31} = 3,545 \cdot 10^6$.

Определим невязки $R_2(x), R_3(x)$:

$$\begin{aligned} R_2(x) = & V(0, x) - f(x) + \sum_{k=1}^n D_{2\ k-1} \cdot V(k, x), \quad R_3(x) = \\ = & -\phi(x) + \sum_{k=1}^n N_{2\ k-1} \cdot V(k, x), \end{aligned}$$

тогда $\varepsilon_{41} = 3,887 \cdot 10^{-11}$, $\varepsilon_{51} = 0$.

Далее аналогичным методом, с помощью программы для ЭВМ [12], для примера найдем значения трех таких приближенных решений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = 0,019, \quad \varepsilon_{21} = 0,032, \quad \varepsilon_{31} = 3,545 \cdot 10^6, \quad \varepsilon_{41} = 3,887 \cdot 10^{-11}, \quad \varepsilon_{51} = 0, \\ \varepsilon_{12} = 0,025, \quad \varepsilon_{22} = 0,053, \quad \varepsilon_{32} = 1,341, \quad \varepsilon_{42} = 4,263 \cdot 10^{-14}, \quad \varepsilon_{52} = 0, \\ \varepsilon_{13} = 20,237, \quad \varepsilon_{23} = 14,152, \quad \varepsilon_{33} = 1,137 \cdot 10^{-12}, \quad \varepsilon_{43} = 4,852 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_{53} = 0. \end{aligned}$$

Откуда следует вывод о том, что первая система приближенных и проверочных тригонометрических функций имеет наименьшие значения, а значит решение полученного дифференциального уравнения является наиболее точным.

Синтез параметров оператора управления обобщенным методом Галеркина

Поскольку решение удовлетворяет заданным параметрам, используем полученные матрицы пространства состояний A, B, C для нахождения передаточной функции системы автоматического управления с распределенными параметрами.

Зададим матрицы:

$$AA = A = \begin{bmatrix} -2,837 & 7,582 & 7,048 & 9,878 \\ 4,549 & -26,749 & -28,254 & -48,398 \\ -2,937 & 36,102 & 47,418 & 88,611 \\ 3,411 \cdot 10^{-13} & -18,479 & -28,628 & -53,498 \end{bmatrix}, Y_{100,k} = B = \begin{pmatrix} 0,761 \\ 2,39 \\ -1,543 \\ -4,483 \cdot 10^{-13} \end{pmatrix},$$

$$H = C = (3,194 \quad -9,095 \cdot 10^{-13} \quad 1,819 \cdot 10^{-12} \quad -9,095 \cdot 10^{-13}).$$

Найдем передаточную функцию объекта управления с распределенными параметрами, заданную матрицами:

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 3,194 & -9,095 \cdot 10^{-13} & 1,819 \cdot 10^{-12} & -9,095 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2,837 & 7,582 & 7,048 & 9,878 \\ 4,549 & -26,749 & -28,254 & -48,398 \\ -2,937 & 36,102 & 47,418 & 88,611 \\ 3,411 \cdot 10^{-13} & -18,479 & -28,628 & -53,498 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,761 \\ 2,39 \\ -1,543 \\ -4,483 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 3,194 & -9,095 \cdot 10^{-13} & 1,819 \cdot 10^{-12} & -9,095 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix} \times \\ \begin{bmatrix} p+2,837 & -7,582 & -7,048 & -9,78 \\ -4,549 & p+26,749 & 28,254 & 48,398 \\ 2,937 & -36,102 & p-47,418 & -88,611 \\ -3,411 \cdot 10^{-13} & 18,479 & 28,628 & p+53,498 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,761 \\ 2,39 \\ -1,543 \\ -4,483 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 3,194 & -9,095 \cdot 10^{-13} & 1,819 \cdot 10^{-12} & -9,095 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{0,06p^3 + 2p^2 + 18,4p + 36,3}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{0,5p^2 + 7,3p + 33,5}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{0,4p^2 + 4,3p + 26,3}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{0,6p^2 + 3,4p + 21,9}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} \\ \frac{0,3p^2 + 6,9p + 24,8}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{0,06p^3 + 0,6p^2 + 2,7p + 18,3}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{-1,8p^2 - 10,9p + 4,5}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{-3p^2 - 19,2 - 0,5}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} \\ \frac{-0,236p^2 - 8,9p - 31,9}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{2,3p^2 + 23,1p + 10,5}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{0,6p^3 + 5,2p^2 + 46,6p + 31,7}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{5,6p^2 + 53,2p + 40,2}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} \\ \frac{0,001p + 0,008}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{-1,2p^2 - 13,1p + 12}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{-1,8p^2 - 20,3p - 18,5}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} & \frac{0,06p^3 - 0,1p^2 - 20p - 18,9}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0,761 \\ 2,39 \\ -1,543 \\ -4,483 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix}.$$

Таким образом получим передаточную функцию звена с распределенными параметрами:

$$W_{\text{пр}}(p) = \frac{0,15p^3 + 6,7p^2 + 79,3p + 214,3}{0,06p^4 + 2,2p^3 + 23,34p^2 + 77,5p + 56,3}.$$

Переходя к задаче синтеза технических систем обобщенным методом Галеркина, которая предполагает известную структуру и параметры синтезируемой

САУ. Структура регулятора системы управления задается в общем виде и определяется из условия приближенного обеспечения заданных показателей качества работы системы в переходном режиме ($T_{п.п.}$ – время переходного процесса, σ – перерегулирование (выброс), μ – колебательность).

Используя схему на рисунке 2 рассмотрим объект управления как блок с распределенными параметрами, как показано на рисунке 4.

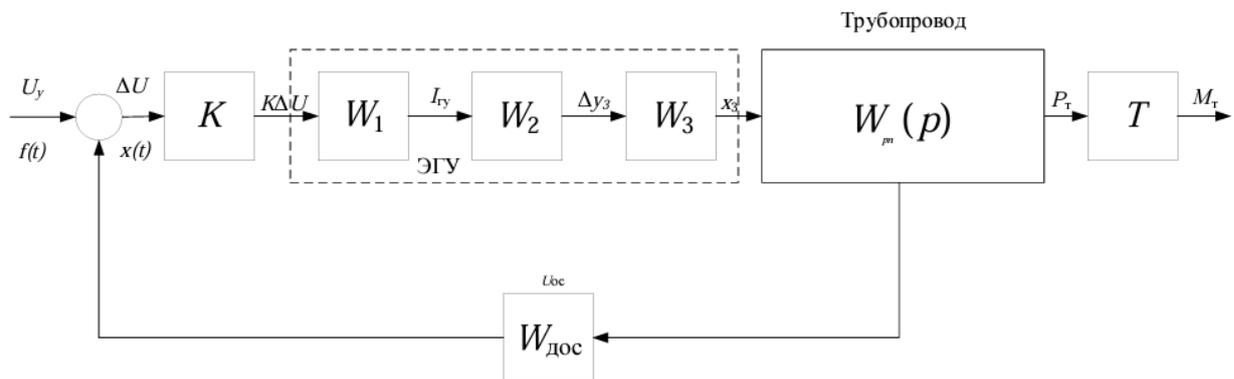


Рисунок 4– Структурная схема исполнительнй части САУ торможением колес

В схеме использованы следующие параметры:

$$K = \frac{1}{21,5}, W_1 = \frac{1}{0,005p + 1}, W_2 = \frac{0,007}{0,005^2 p^2 + 20,075 \cdot 0,05p + 1}, W_3 = \frac{0,047}{0,0025p + 1},$$

$$L_1=L_2=4; T=934, W_{доc} = \frac{0,025}{0,01p + 1}.$$

Уравнение движения, описывающее динамику представленной системы управления, имеет следующий вид:

$$Q(c_k, D)x(t) + \bar{f}(c_k, D)x(t) = f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)),$$

Исходя из заданных показателей качества работы САУ в переходном режиме в соответствии с рекомендациями, изложенными в [8], были определены параметры желаемого программного движения вида:

$$x^0(t) = [x_y - H_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)]1(t),$$

где $x_y = 0,023; H_1 = 0,023; \alpha = 3; \beta = 23 \text{ рад} / \text{с}; \varphi_0 = 0,654 \text{ рад}.$

Подставим в уравнение движения желаемое программное движение и образуем невязку:

$$\psi(c_k, t) = Q(c_k, D)x^0(t) + \bar{f}(c_k, D)x^0(t) - f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)).$$

Запишем алгебраическое уравнение:

$$\int_0^{\infty} Q(c_k, D)x^0(t)\varphi_q(t)dt + \int_0^{\infty} \bar{f}(c_k, D)x^0(t) \cdot \varphi_q(t)dt - \int_0^{\infty} f(t)(S(c_k, D) + \bar{f}(c_k, D)) \cdot \varphi_q(t)dt = 0,$$

при $k, q = 1, 2, \dots, m$.

Система управления описывается относительно координаты выхода следующим дифференциальным уравнением:

$$21,5(0,005p+1)(0,005^2p^2+20,075 \cdot 0,05p+1)(0,0025p+1) \times \\ \times (0,06p^4+2,2p^3+23,34p^2+77,5p+56,3)(0,01p+1) \cdot x(t) + \\ + 0,0077(0,15p^3+6,7p^2+79,3p+214,3)x(t) = 0,0077(0,15p^3+6,7p^2+79,3p+214,3)f(t).$$

В ходе реализации синтеза параметров оператора управления обобщенным методом Галеркина необходимо обеспечить в системе перерегулирование на уровне $\sigma \leq 17\%$ при $f(t)=1(t)$ переходном процессе, времени затухания $T_{п.п.} \leq 1$ сек и выполнять требования устойчивости [13-19].

Переходные процессы, полученные в результате работе схем (рисунки 2 и 4) показаны на рисунке 5, где процесс «1» - желаемое программное движение, процесс «2» получен по результатам работы системы, когда блок трубопровода исследован как звено с распределенными параметрами, процесс «3» получен по результатам работы системы, когда блок трубопровода исследован как звено «чистого запаздывания».

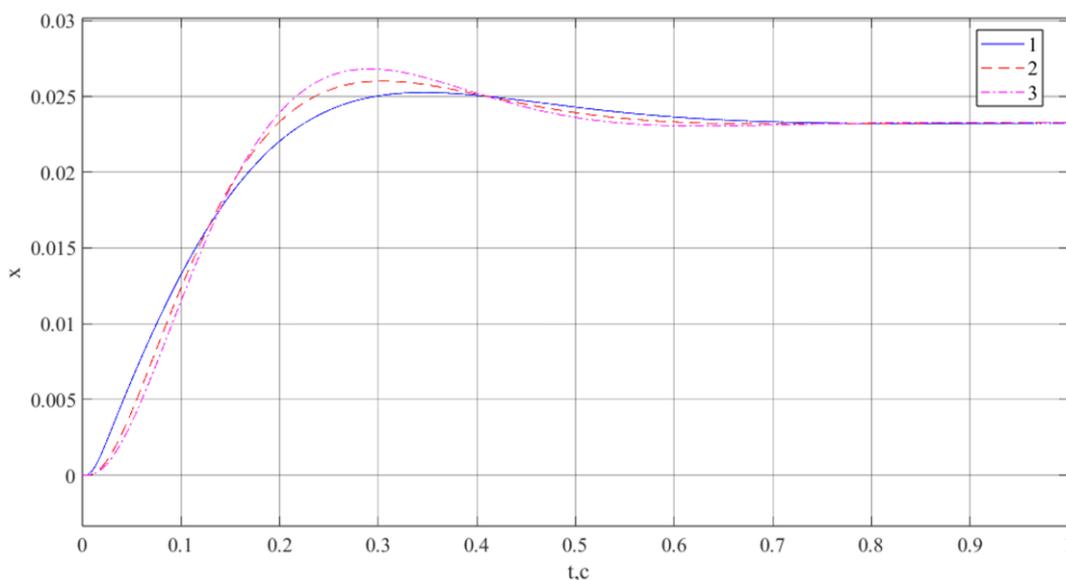


Рисунок 5 – График переходных процессов

Полученные графики переходных процессов показывают, что эквивалентная передаточная функция, полученная в результате реализации перехода от дифференциального гиперболического уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению, приближенно обеспечивает заданные показатели качества работы САУ в переходном режиме [20-26].

Список источников

1. Шишлаков В.Ф., Гончарова В.И. Параметрический синтез нелинейной импульсной системы автоматического управления с распределенными параметрами // Радиотехника. 2024. Т. 88, № 8. С. 54-70. DOI: [10.18127/j00338486-202408-06](https://doi.org/10.18127/j00338486-202408-06)
2. Ostroukh A.V., Pronin S.B., Volosova A.V. et al. Parametric Synthesis of Quantum Circuits for Training Perceptron Neural Networks // Intelligent Technologies and Electronic Devices in Vehicle and Road Transport Complex (TIRVED), November 2022. DOI: [10.1109/TIRVED56496.2022.9965536](https://doi.org/10.1109/TIRVED56496.2022.9965536)
3. Iskhakov A.R., Akbashev V.R. Structural Synthesis of the Computer Vision and Its Parametric Identification with Statistical Estimation of Variational Parameters // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2023. Vol. 10, No. 1.
4. Гончарова В.И., Шишлаков В.Ф. Параметрический синтез линейных систем автоматического управления с распределенными параметрами // Известия Вузов.

Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 230-240. DOI: [10.17586/0021-3454-2024-67-3-230-240](https://doi.org/10.17586/0021-3454-2024-67-3-230-240)

5. Гончарова В.И. Параметрический синтез нелинейной системы автоматического управления с распределенными параметрами // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178476>

6. Никитин А.В., Шишлаков В.Ф. Параметрический синтез нелинейных систем автоматического управления: монография. - СПб.: СПбГУАП, 2003. – 358 с.

7. Шишлаков В.Ф. Синтез нелинейных импульсных систем управления во временной области // Известия Вузов. Приборостроение. 2003. № 12. С. 25-30.

8. Зайцева А.А., Белявцев М.В., Зайцев Е.А. и др. Синтез алгоритма управления двигателями вертолета в условиях структурной и параметрической неопределенности // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2024. Т. 20, № 2. С. 123-128. DOI: [10.17122/1999-5458-2024-20-2-123-128](https://doi.org/10.17122/1999-5458-2024-20-2-123-128)

9. Гамынин Н.С. Гидравлический привод системы управления. - М.: Машиностроение, 1972. – 376 с.

10. Гамынин Н.С. Гидравлический следящий привод. - М.: Машиностроение, 1968. – 466 с.

11. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. - М.: Гостехиздат, 1951. - 224 с.

12. Гончарова В.И. Программа для реализации перехода от дифференциальных гиперболических уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023681118 РФ, 10.10.2023

13. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.

14. Жухин Н.О., Легкая В.И. Решение задачи параметрического синтеза для САУ скоростью длинно составного грузового поезда // Бюллетень результатов научных исследований. 2023. № 1. С. 170-182. DOI: [10.20295/2223-9987-2023-1-170-182](https://doi.org/10.20295/2223-9987-2023-1-170-182)

15. Ватутин М.А., Ключников А.И. Методика повышения стабильности работы нелинейного звена с запаздыванием для автоколебательного акселерометра // Труды МАИ. 2022. № 127. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=170355>. DOI: [10.34759/trd-2022-127-22](https://doi.org/10.34759/trd-2022-127-22)
16. Урюпин И.В. Моделирование и оценка связности авиационной и железнодорожной транспортных систем пассажирских перевозок Российской Федерации // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178479>
17. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Семёнов А.С. Решение линейных задач математической физики на основе методов взвешенных невязок. - Ульяновск: УлГТУ, 2010. - 179 с.
18. Ермаков П.Г. Статистическая обработка данных бортовых навигационных систем беспилотного воздушного судна вертолетного типа при осуществлении посадки // Труды МАИ. 2024. № 138. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=182679>
19. Ермаков П.Г., Евдокименков В.Н., Гоголев А.А. Определение угла наклона необорудованной посадочной площадки беспилотного воздушного судна вертолетного типа на основе информации цифровой карты местности // Труды МАИ. 2023. № 132. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176860>. DOI: [10.34759/trd-2023-132-23](https://doi.org/10.34759/trd-2023-132-23)
20. Елсуков В.С., Лачин В.И., Павлов В.В. Синтез систем управления со знакопеременной компенсирующей обратной связью в условиях ограниченной неопределенности // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2020. Т. 63, № 5. С. 40-45. DOI: [10.17213/0136-3360-2020-5-40-45](https://doi.org/10.17213/0136-3360-2020-5-40-45)
21. Корнюшин Ю.П. Синтез робастных регуляторов для нелинейных следящих систем // Научные технологии. 2020. Т. 21, № 6. С. 63-69. DOI: [10.18127/j19998465-202006-10](https://doi.org/10.18127/j19998465-202006-10)
22. Михайленко Л.А., Русин Д.С., Устименко В.В., Чубарь А.В. Параметрический синтез регулятора метаэвристическим алгоритмом в среде SimInTech // Космические аппараты и технологии. 2020. Т. 4, № 3 (33). С. 171-177. DOI: [10.26732/j.st.2020.3.05](https://doi.org/10.26732/j.st.2020.3.05)

23. Фелькер М.Н., Бахтерева К.Д. Разработка системы автоматического управления флотационным процессом хлористого калия // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2021. Т. 21, № 1. С. 147-158. DOI: [10.14529/ctcr210113](https://doi.org/10.14529/ctcr210113)
24. Parshukov A.N. Technology for improving robust quality of control for one-dimensional linear discrete control systems with structural-parametric uncertainty // Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 2024. No. 67. P. 12-21. DOI: [10.17223/19988605/67/2](https://doi.org/10.17223/19988605/67/2)
25. Еремин Е.Л., Смирнова С.А., Шеленок Е.А. Структурно-параметрический синтез гибридной периодической системы комбинированного управления многорежимным объектом в условиях неопределенности // Мехатроника, автоматизация, управление. 2024. Т. 25, № 9. С. 447-457. DOI: [10.17587/mau.25.447-457](https://doi.org/10.17587/mau.25.447-457)
26. Малев Н.А. Синтез параметрически инвариантного следящего электропривода с применением метода восстановления параметров модели // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. 2023. Т. 25, № 2. С. 40-57. DOI: [10.30724/1998-9903-2023-25-2-40-57](https://doi.org/10.30724/1998-9903-2023-25-2-40-57)

References

1. Shishlakov V.F., Goncharova V.I. Parametric synthesis of a nonlinear pulsed automatic control system with distributed parameters. *Radiotekhnika*. 2024. Vol. 88, No. 8. P. 54-70. (In Russ.). DOI: [10.18127/j00338486-202408-06](https://doi.org/10.18127/j00338486-202408-06)
2. Ostroukh A.V., Pronin C.B., Volosova A.V. et al. Parametric Synthesis of Quantum Circuits for Training Perceptron Neural Networks. *Intelligent Technologies and Electronic Devices in Vehicle and Road Transport Complex (TIRVED)*, November 2022. DOI: [10.1109/TIRVED56496.2022.9965536](https://doi.org/10.1109/TIRVED56496.2022.9965536)
3. Iskhakov A.R., Akbashev V.R. Structural Synthesis of the Computer Vision and Its Parametric Identification with Statistical Estimation of Variational Parameters. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*. 2023. Vol. 10, No. 1.

4. Goncharova V.I., Shishlakov V.F. Parametric synthesis of linear automatic control systems with distributed parameters. *Izvestiya Vuzov. Priborostroenie*. 2024. Vol. 67, No. 3. P. 230-240. (In Russ.). DOI: [10.17586/0021-3454-2024-67-3-230-240](https://doi.org/10.17586/0021-3454-2024-67-3-230-240)
5. Goncharova V.I. Parametric synthesis of a nonlinear automatic control system with distributed parameters. *Trudy MAI*. 2024. No. 134. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178476>
6. Nikitin A.V., Shishlakov V.F. *Parametricheskii sintez nelineinykh sistem avtomaticheskogo upravleniya: monografiya* (Parametric synthesis of nonlinear automatic control systems): monograph. Saint Petersburg: SPbGUAP Publ., 2003. 358 p.
7. Shishlakov V.F. Synthesis of nonlinear pulsed control systems in the time domain. *Izvestiya Vuzov. Priborostroenie*. 2003. No. 12. P. 25-30. (In Russ.)
8. Zaitseva A.A., Belyavtsev M.V., Zaitsev E.A. et al. Synthesis of an algorithm for controlling helicopter engines in conditions of structural and parametric uncertainty. *Elektrotekhnicheskie i informatsionnye komplekсы i sistemy*. 2024. Vol. 20, No. 2. P. 123-128. (In Russ.). DOI: [10.17122/1999-5458-2024-20-2-123-128](https://doi.org/10.17122/1999-5458-2024-20-2-123-128)
9. Gamynin N.S. *Gidravlicheskii privod sistemy upravleniya* (Hydraulic drive of the control system). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1972. 376 p.
10. Gamynin N.S. *Gidravlicheskii sledyashchii privod* (Hydraulic tracking drive). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1968. 466 p.
11. Charnyi I.A. *Neustanovivsheesya dvizhenie real'noi zhidkosti v trubakh* (Unsteady movement of a real liquid in pipes). Moscow: Gostekhizdat Publ., 1951. 224 p.
12. Goncharova V.I. *Programma dlya realizatsii perekhoda ot differentsial'nykh giperbolicheskikh uravnenii v chastnykh proizvodnykh k obyknovennym differentsial'nym uravneniyam. Svidetel'stvo o gosudarstvennoi registratsii programmy dlya EVM № 2023681118 RF* (Program for the implementation of the transition from partial differential hyperbolic equations to ordinary differential equations. Certificate of state registration of a computer program No. 2023681118 Russian Federation), 10.10.2023
13. Fletcher K. *Chislennyye metody na osnove metoda Galerkina* (Numerical methods based on the Galerkin method). Moscow: Mir Publ., 1988. 352 p.

14. Zhukhin N.O., Legkaya V.I. Solving the problem of parametric synthesis for self-propelled guns with the speed of a long-component freight train. *Byulleten' rezul'tatov nauchnykh issledovaniy*. 2023. No. 1. P. 170-182. (In Russ.). DOI: [10.20295/2223-9987-2023-1-170-182](https://doi.org/10.20295/2223-9987-2023-1-170-182)
15. Vatutin M.A., Klyuchnikov A.I. A technique for increasing the stability of a nonlinear link with a delay for an auto-oscillatory accelerometer. *Trudy MAI*. 2022. No. 127. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=170355>. DOI: [10.34759/trd-2022-127-22](https://doi.org/10.34759/trd-2022-127-22)
16. Uryupin I.V. Modeling and evaluation of connectivity of aviation and railway transport systems of passenger transportation of the Russian Federation. *Trudy MAI*. 2024. No. 134. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178479>
17. Ankilov A.V., Vel'misov P.A., Semenov A.S. *Reshenie lineinykh zadach matematicheskoi fiziki na osnove metodov vzveshennykh nevyazok* (Solving linear problems of mathematical physics based on methods of weighted residuals). Ul'yanovsk: UIGTU Publ., 2010. 179 p.
18. Ermakov P.G. Statistical data processing of on-board navigation systems of an unmanned helicopter-type aircraft during landing. *Trudy MAI*. 2024. No. 138. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=182679>
19. Ermakov P.G., Evdokimenkov V.N., Gogolev A.A. Determination of the angle of inclination of an unequipped landing pad of an unmanned helicopter aircraft based on information from a digital terrain map. *Trudy MAI*. 2023. No. 132. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=176860>. DOI: [10.34759/trd-2023-132-23](https://doi.org/10.34759/trd-2023-132-23)
20. Elsukov V.S., Lachin V.I., Pavlov V.V. Synthesis of control systems with alternating compensating feedback in conditions of limited uncertainty. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektromekhanika*. 2020. Vol. 63, No. 5. P. 40-45. (In Russ.). DOI: [10.17213/0136-3360-2020-5-40-45](https://doi.org/10.17213/0136-3360-2020-5-40-45)
21. Korniyushin YU.P. Synthesis of robust regulators for nonlinear tracking systems. *Naukoemkie tekhnologii*. 2020. Vol. 21, No. 6. P. 63-69. (In Russ.). DOI: [10.18127//j19998465-202006-10](https://doi.org/10.18127//j19998465-202006-10)

22. Mikhailenko L.A., Rusin D.S., Ustimenko V.V., Chubar' A.V. Parametric synthesis of the regulator by a metaheuristic algorithm in the SimInTech environment. *Kosmicheskie apparaty i tekhnologii*. 2020. Vol. 4, No. 3 (33). P. 171-177. (In Russ.). DOI: [10.26732/j.st.2020.3.05](https://doi.org/10.26732/j.st.2020.3.05)
23. Fel'ker M.N., Bakhtereva K.D. Development of an automatic control system for the flotation process of potassium chloride. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika*. 2021. Vol. 21, No. 1. P. 147-158. (In Russ.). DOI: [10.14529/ctcr210113](https://doi.org/10.14529/ctcr210113)
24. Parshukov A.N. Technology for improving robust quality of control for one-dimensional linear discrete control systems with structural-parametric uncertainty. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2024. No. 67. P. 12-21. (In Russ.). DOI: [10.17223/19988605/67/2](https://doi.org/10.17223/19988605/67/2)
25. Eremin E.L., Smirnova S.A., Shelenok E.A. Structural-parametric synthesis of a hybrid periodic system of combined control of a multimode object under conditions of uncertainty. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*. 2024. Vol. 25, No. 9. P. 447-457. (In Russ.). DOI: [10.17587/mau.25.447-457](https://doi.org/10.17587/mau.25.447-457)
26. Malev N.A. Synthesis of a parametrically invariant tracking electric drive using the method of restoring model parameters. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Problemy energetiki*. 2023. Vol. 25, No. 2. P. 40-57. (In Russ.). DOI: [10.30724/1998-9903-2023-25-2-40-57](https://doi.org/10.30724/1998-9903-2023-25-2-40-57)

Статья поступила в редакцию 04.12.2024

Одобрена после рецензирования 13.12.2024

Принята к публикации 25.04.2025

The article was submitted on 04.12.2024; approved after reviewing on 13.12.2024; accepted for publication on 25.04.2025