

Расчет механических колебаний в поле комплексных чисел

Попов И.П.

Курганский государственный университет, КГУ,

ул. Советская, 63/4, Курган, 640020, Россия,

e-mail: ip.popow@yandex.ru

Статья поступила 25.10.2020

Аннотация

Рассмотрены параллельное и последовательное соединения потребителей механической мощности. По известным параметрам систем и возмущающему гармоническому воздействию алгебраически определяются скорости элементов механических систем и приложенные к ним силы. Использование символического (комплексного) описания механических систем при вынужденных гармонических колебаниях (в установившемся режиме) позволило отказаться от чрезвычайно громоздкого и трудоемкого алгоритма расчета, связанного с решением дифференциальных уравнений и заменить его простыми и наглядными алгебраическими операциями. Благодаря этому время расчетов уменьшается в разы. Векторные диаграммы, не являясь необходимой составляющей исследования механических систем, имеют существенное методическое значение, поскольку показывают количественные и фазные соотношения между параметрами систем.

Ключевые слова: потребители механической мощности, вынужденные колебания, параллельное, последовательное соединение, резонанс сил, резонанс скоростей.

Введение

Традиционный расчет механизмов при вынужденных колебаниях зачастую представляет собой непростую задачу [1–5].

Чаще всего расчетчиков интересуют установившиеся режимы колебаний [6–11].

Целью исследования является значительное упрощение вычислений путем замены необходимости решения дифференциальных уравнений на алгебраические методы.

Актуальность работы обусловлена тем, что механические колебания широко распространены в разнообразных технологических процессах [12–14]. Особое значение учет колебаний приобретает в ракетной отрасли [15, 16]. В авиации борьба с виброперегрузками несущего винта и изгибными аэроупругими колебаниями крыла самолета являются жизненно важными мероприятиями [17–19].

Используется комплексное представление гармонических и связанных с ними величин. Подобный подход широко используется в электротехнике.

Схема параллельного соединения

Скорость элементов механической системы одинаковая (рис. 1)

$$v = V \sin \omega t . \quad (1)$$

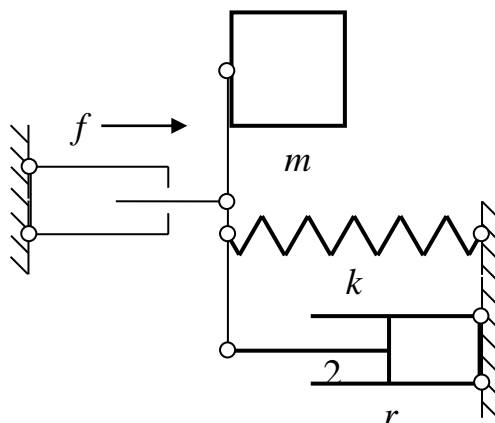


Рис. 1 – Схема параллельного соединения

При этом силы отличаются

$$f_m = m \frac{dv}{dt} = m\omega V \cos \omega t, \quad (2)$$

$$f_k = -kx = k \int v dt = -\frac{k}{\omega} V \cos \omega t, \quad (3)$$

$$f_r = rv = rV \sin \omega t. \quad (4)$$

Результирующая сила:

$$\begin{aligned} f &= f_m + f_k + f_r = V \left[\left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \cos \omega t + r \sin \omega t \right] = \\ &= V \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2} \left[\frac{m\omega - k/\omega}{\sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}} \cos \omega t + \frac{r}{\sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2}} \sin \omega t \right]. \end{aligned}$$

Удобно ввести обозначение

$$\varphi = \arctg \frac{m\omega - k/\omega}{r}. \quad (5)$$

При этом

$$\begin{aligned} f &= V \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2} (\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t) = \\ &= V \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2} \sin(\omega t + \varphi) = F \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Это классическое выражение (результат решения дифференциального уравнения).

В рассматриваемом случае необходимость в дифференциальном уравнении не возникает.

Амплитуда результирующей силы:

$$F = Vz, \quad (7)$$

$$z = \sqrt{(m\omega - k/\omega)^2 + r^2} \quad (kz \cdot c^{-1}). \quad (8)$$

Первая (максвелловская) система механо-электрических аналогий имеет вид:

- $V \Rightarrow I$ (скорость \Rightarrow ток),
- $F \Rightarrow U$ (сила \Rightarrow напряжение),
- $m \Rightarrow L$ (масса \Rightarrow индуктивность),
- $k \Rightarrow 1/C$ (коэффициент упругости \Rightarrow величина обратная емкости),
- $r \Rightarrow R$ (коэффициент вязкого сопротивления \Rightarrow сопротивление).

Американский физик Вебстер дополнил эти аналогии:

- $\omega m \Rightarrow \omega L$ (*инертный реактанс* \Rightarrow индуктивное сопротивление),
- $k/\omega \Rightarrow 1/(\omega C)$ (*упругий реактанс* \Rightarrow емкостное сопротивление).

Учитывая приведенные механо-электрические аналогии, формула (7) является аналогом известного закона Ома

$$U = IZ.$$

здесь $Z = \sqrt{[\omega L - 1/(\omega C)]^2 + R^2}$ – сопротивление. Таким образом, формула (8) – это *механический импеданс* (impedance).

Соответственно этому *механический реактанс* (reactance):

$$x = m\omega - \frac{k}{\omega}.$$

Если $x = 0$, то $\omega = \sqrt{k/m}$ – классическое выражение, полученное значительно проще классического решения. При этом происходит *резонанс сил* [20]. При $r = 0$, $z = 0$. Механизм не препятствует источнику колебаний.

По аналогии с электротехникой r – *механический резистанс* (resistance).

Комплексное описание для параллельной схемы соединения

Синусоидальная величина имеет следующую форму записи:

$$a = A \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im} \left[A e^{i(\omega t + \varphi)} \right],$$

Здесь $A e^{i(\omega t + \varphi)}$ – комплексный вектор.

Такие векторы, как правило, записывают для момента $t = 0$. В соответствии с ЭТИМ

$$A e^{i(\omega 0 + \varphi)} = A e^{i\varphi} = \dot{A}$$

принято считать *комплексной амплитудой*.

Формула (1), таким образом, имеет следующий вариант записи:

$$v = V \sin \omega t = \text{Im}(V e^{i\omega t}),$$

$$\dot{V} = V e^{i0}.$$

Из выражения (2) следует, что v отстает по фазе от f_m на $\pi/2$. Таким образом,

$$\dot{F}_m = m\omega \dot{V} e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{x}_m \dot{V}.$$

$$\underline{x}_m = \omega t e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega t. \quad (9)$$

Это *инертный реактанс* в комплексной записи.

Несинусоидальные величины в комплексном представлении подчеркивают (синусоидальные отмечают точкой).

Амплитуда инертной силы (в комплексном изображении) имеет вид:

$$\dot{F}_m = \omega t e^{i\frac{\pi}{2}} V e^{i0} = \omega m V e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Точно также, имея в виду (3) и (4),

$$\begin{aligned}\dot{F}_k &= -\frac{k}{\omega} \dot{V} e^{i\frac{\pi}{2}} = \underline{x}_k \dot{V} . \\ \underline{x}_k &= -\frac{k}{\omega} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \frac{k}{\omega}\end{aligned}\quad (10)$$

Это *упругий реактанс* в комплексной записи.

$$\dot{F}_r = r \dot{V} = \underline{r} \dot{V} .$$

$$\underline{r} = r .$$

Это *резистанс* в комплексной записи.

В соответствии с этим амплитуды упругой и резистивной сил (в комплексном изображении) имеют вид:

$$\dot{F}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} V e^{i0} = \frac{k}{\omega} V e^{-i\frac{\pi}{2}} .$$

$$\dot{F}_r = r \dot{V} = r e^{i0} V e^{i0} .$$

Комплексные представления механических реактанса и импеданса:

$$\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k = \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}} ,$$

$$\underline{z} = r + \underline{x} = r + \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}} .$$

Абсолютная величина последнего совпадает с (8)

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right)^2} .$$

Фаза импеданса определяется формулой (5). поэтому

$$\underline{z} = Ze^{i\varphi}.$$

Сила внешнего источника имеет вид:

$$\dot{F} = \underline{z} \dot{V} = ZVe^{i\varphi}. \quad (11)$$

Это подтверждается формулой (6).

Пример 1. $\dot{F} = 100e^{i0}$ (Н), $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 20$ (кг·с⁻²), $r = 7$ (кг·с⁻¹).

Определить все остальные параметры.

$$\underline{x}_m = \omega m e^{i90^\circ} = 20e^{i90^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\underline{x}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i90^\circ} = 10e^{-i90^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}.$$

$$Z = \sqrt{r^2 + (\underline{x}_m - \underline{x}_k)^2} = \sqrt{7^2 + (20 - 10)^2} = 12,207 \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}.$$

$$\varphi = \arctg \frac{\underline{x}_m - \underline{x}_k}{r} = \arctg \frac{20 - 10}{7} = 55^\circ,$$

$$\underline{z} = Ze^{i\varphi} = 12,207e^{i55^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}.$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100e^{i0}}{12,207e^{i55^\circ}} \approx 8,192e^{-i55^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \quad (12)$$

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = 20e^{i90^\circ} \cdot 8,192e^{-i55^\circ} = 163,846e^{i35^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = 10e^{-i90^\circ} \cdot 8,192e^{-i55^\circ} = 81,923e^{-i145^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_r = r \dot{V} = 7e^{i0} \cdot 8,192e^{-i55^\circ} = 57,344e^{-i55^\circ} \text{ (Н)}.$$

Как и следовало ожидать,

$$\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = 163,846e^{i35^\circ} + 81,923e^{-i145^\circ} + 57,344e^{-i55^\circ} = 100e^{i0} \text{ (Н)} = \dot{F}.$$

Расчет с применением дифференциальных уравнений занял бы несколько страниц.

Данным примера 1 соответствует векторная диаграмма на рисунке 2.

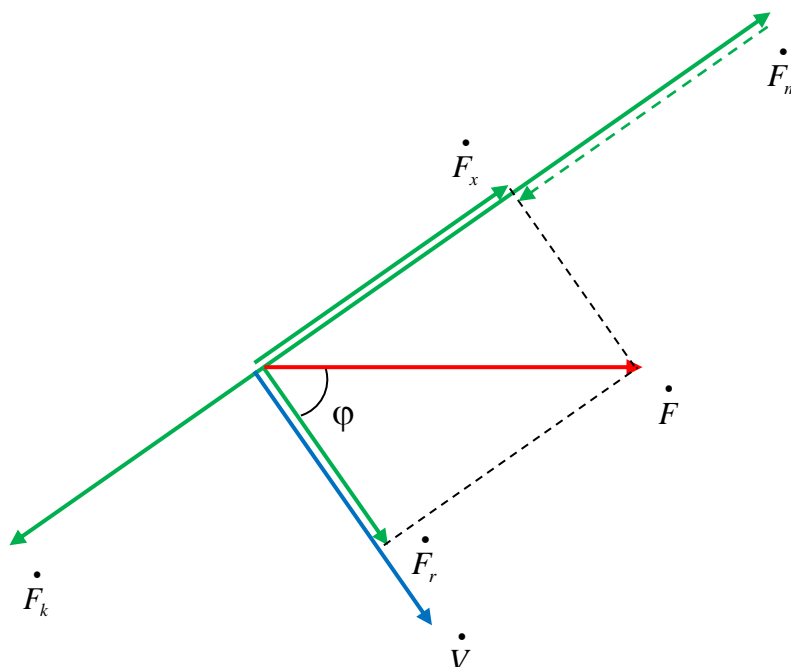


Рис. 2 – Параллельное соединение

Пример 2. Для резонанса сил. Отличие от примера 1 состоит в том, что $k = 40 \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-2}\text{)}$.

$$\underline{x}_k = 20e^{-i90^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\underline{z} = r = 7e^{i0^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100e^{i0}}{7e^{i0^\circ}} \approx 14,286e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = 20e^{i90^\circ} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 285,72e^{i90^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = 20e^{-i90^\circ} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 285,72e^{-i90^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_r = r\dot{V} = 7e^{i0} \cdot 14,286e^{i0} = 100e^{i0} \text{ (Н)}.$$

Как и следовало ожидать,

$$\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = 285,72e^{i90^\circ} + 285,72e^{-i90^\circ} + 100e^{i0} = 100e^{i0} \text{ (Н)} = \dot{F} = \dot{F}_r.$$

Данным примера 2 соответствует векторная диаграмма на рисунке 3.

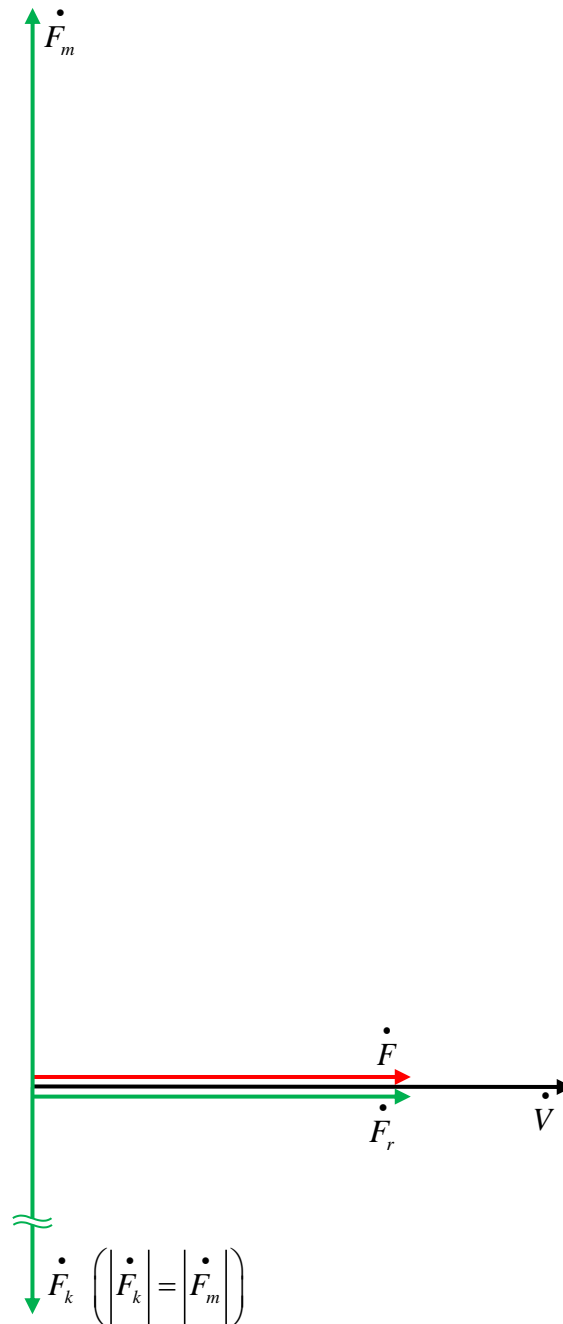


Рис. 3 – Резонанс сил

Схема последовательного соединения

Сила на элементах механической системы одинаковая (рис. 4)

$$f = F \cos \omega t .$$

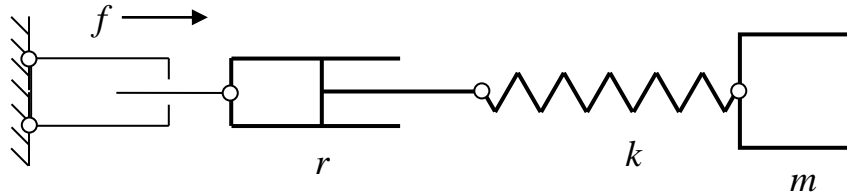


Рис. 4 – Схема последовательного соединения

При этом скорости отличаются

$$v_m = \frac{1}{m} \int f dt = \frac{F}{\omega m} \sin \omega t , \quad (13)$$

$$v_k = -\frac{1}{k} k \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \frac{df}{dt} = -\frac{\omega F}{k} \sin \omega t , \quad (14)$$

$$v_r = \frac{f}{r} = \frac{F}{r} \cos \omega t . \quad (15)$$

Результирующая скорость:

$$\begin{aligned} v &= v_m + v_k + v_r = F \left[\left(\frac{1}{\omega m} - \frac{\omega}{k} \right) \sin \omega t + \frac{1}{r} \cos \omega t \right] = \\ &= F \sqrt{\left[\frac{1}{(\omega m)} - \frac{\omega}{k} \right]^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2} \left[\frac{\frac{1}{(\omega m)} - \frac{\omega}{k}}{\sqrt{\left[\frac{1}{(\omega m)} - \frac{\omega}{k} \right]^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2}} \sin \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{r}}{\sqrt{\left[\frac{1}{(\omega m)} - \frac{\omega}{k} \right]^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2}} \cos \omega t \right] . \end{aligned}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1/(\omega m) - \omega/k}{1/r}.$$

$$\begin{aligned} v &= F \sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2} (\sin \varphi \sin \omega t + \cos \varphi \cos \omega t) = \\ &= F \sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2} \cos(\omega t - \varphi) = V \cos(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Это выражение синусоидальной скорости для схемы последовательного соединения элементов механической системы.

Амплитуда результирующе скорости:

$$V = Fy,$$

$$y = \sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2}. \quad (16)$$

Из условия $1/(\omega m) - \omega/k = 0$ следует классическое выражение $\omega = \sqrt{k/m}$, полученное значительно проще классического решения. При этом происходит *резонанс скоростей* [20]. При $1/r = 0$, $y = 0$. Механизм препятствует (абсолютно) источнику колебаний.

Комплексное описание для последовательной схемы соединения

Алгоритм рассмотрения такой же, как и при параллельном соединении.

$$f = F \cos \omega t = \operatorname{Re}(F e^{i\omega t}),$$

$$\dot{F} = F e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Из выражения (13) следует, что f опережает по фазе v_m на $\pi/2$. Таким образом,

$$\dot{V}_m = -\frac{1}{\omega m} \dot{F} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{x_m} \dot{F} = \underline{b}_m \dot{F}.$$

$$\underline{b}_m = \frac{1}{\omega m} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \frac{1}{\omega m} = \frac{1}{\underline{x}_m}$$

Это *инертный сассептанс* (susceptance) в комплексной записи.

Амплитуда инертной скорости (в комплексном изображении) имеет вид:

$$\dot{V}_m = \frac{1}{\omega m} e^{-i\frac{\pi}{2}} F e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega m} F e^{i0}.$$

Точно также, имея в виду (14) и (15),

$$\dot{V}_k = \frac{\omega}{k} \dot{F} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\underline{x}_k} \dot{F} = \underline{b}_k \dot{F}.$$

$$\underline{b}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\frac{\pi}{2}} = i \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\underline{x}_k}$$

Это *упругий сассептанс* в комплексной записи.

В соответствии с этим амплитуды упругой и резистивной скоростей (в комплексном изображении) имеют вид:

$$\dot{V}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\frac{\pi}{2}} F e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\omega}{k} F e^{i\pi}.$$

$$\dot{V}_r = \frac{1}{r} \dot{F} = g \dot{F} = g F e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\underline{g} = g = \frac{1}{r}$$

Это *кондактанс* (conductance) в комплексной записи.

Комплексные представления механических *сассептанса* и *адмитанса* (admittance):

$$\underline{b} = \underline{b}_k + \underline{b}_m = \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\underline{y} = g + \underline{b} = g + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Абсолютная величина последнего совпадает с (16)

$$Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right)^2}.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b_k - b_m}{g} = \operatorname{arctg} \frac{\omega/k - 1/(\omega m)}{g} = \operatorname{arctg} \left[(m\omega - k/\omega) \frac{r}{mk} \right].$$

$$\underline{y} = Y e^{i\varphi}.$$

Скорость штока внешнего источника имеет вид:

$$\dot{\underline{V}} = \underline{y} \dot{\underline{F}} = Y e^{i\varphi} F e^{i\frac{\pi}{2}} = Y F e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}. \quad (17)$$

Пример 3. Отличие от примера 1 состоит в том, что элементы соединены последовательно.

$$\underline{b}_m = \underline{x}_m^{-1} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} (\kappa z^{-1} \cdot c),$$

$$\underline{b}_k = \underline{x}_k^{-1} = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} (\kappa \Gamma^{-1} \cdot c),$$

$$g = r^{-1} = 14,286 \cdot 10^{-2} (\kappa z^{-1} \cdot c).$$

$$Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2} = \sqrt{(14,286 \cdot 10^{-2})^2 + (10 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2})^2} = 15,135 \cdot 10^{-2} (\kappa z^{-1} \cdot c).$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b_k - b_m}{g} = \operatorname{arctg} \frac{10 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2}}{14,286 \cdot 10^{-2}} = 19,29^\circ,$$

$$\underline{y} = Y e^{i\varphi} = 15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ} (\kappa \Gamma^{-1} \cdot c).$$

$$\dot{\underline{V}} = \underline{y} \dot{\underline{F}} = 15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ} \cdot 100 = 15,135 e^{i19,29^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{\underline{V}}_m = \underline{b}_m \dot{\underline{F}} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 100 = 5 e^{-i90^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 100 = 10e^{i90^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{V}_r = g \dot{F} = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 14,286 \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}.$$

Как и следовало ожидать,

$$\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = 5e^{-i90^\circ} + 10e^{i90^\circ} + 14,286 = 15,135e^{i19,29^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)} = \dot{V}$$

Расчет с применением дифференциальных уравнений занял бы несколько страниц.

Данным примера 3 соответствует векторная диаграмма на рисунке 5.

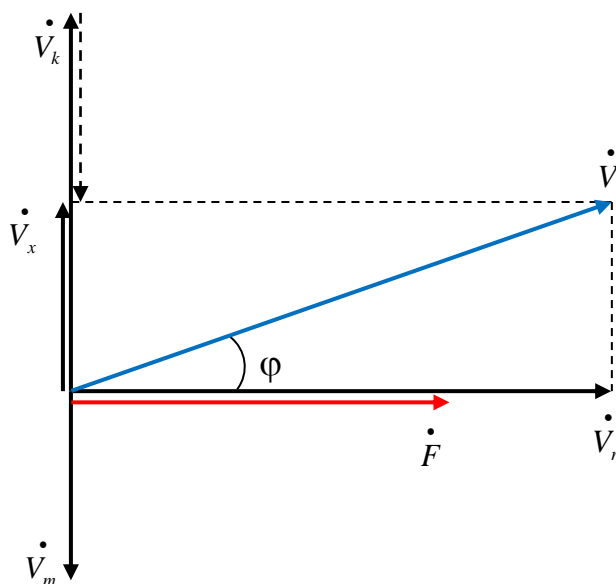


Рис. 5 – Последовательное соединение

Пример 4. Для резонанса скоростей. Отличие от примера 2 состоит в том, что элементы соединены последовательно.

$$\underline{b}_k = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \text{ (кг}^{-1} \cdot \text{с)},$$

$$Y = g = 14,286 \cdot 10^{-2} \text{ (кз}^{-1} \cdot \text{с)},$$

$$\varphi = 0^\circ,$$

$$\underline{y} = Y e^{i\varphi} = 14,286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} \text{ (кг}^{-1} \cdot \text{с)},$$

$$\dot{\underline{V}} = \underline{y} \dot{\underline{F}} = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 14,286 e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{\underline{V}}_k = \underline{b}_k \dot{\underline{F}} = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 100 = 5 e^{i90^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}).$$

Как и следовало ожидать,

$$\dot{\underline{V}}_m + \dot{\underline{V}}_k + \dot{\underline{V}}_r = 5 e^{-i90^\circ} + 5 e^{i90^\circ} + 14,286 = 14,286 e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}) = \dot{\underline{V}} = \dot{\underline{V}}_r$$

Данным примера 4 соответствует векторная диаграмма на рисунке 6.

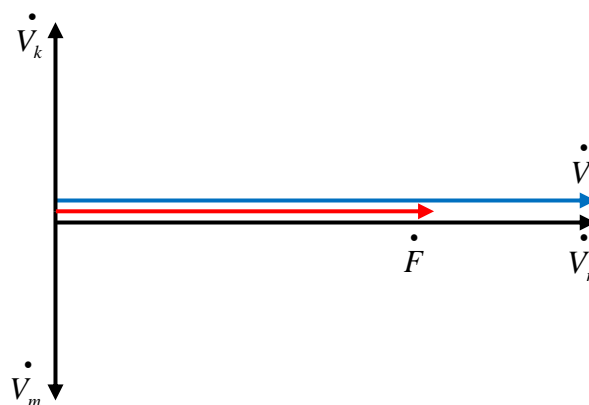


Рис. 6 – Резонанс скоростей

Заключение

Использование символического (комплексного) описания механических систем при вынужденных гармонических колебаниях (в установившемся режиме) позволило отказаться от чрезвычайно громоздкого и трудоемкого алгоритма расчета, связанного с решением дифференциальных уравнений и заменить его простыми и

наглядными алгебраическими операциями. Благодаря этому время расчетов уменьшается в разы.

Векторные диаграммы, не являясь необходимой составляющей исследования механических систем, имеют существенное методическое значение, поскольку показывают количественные и фазные соотношения между параметрами систем.

Библиографический список

1. Добрышкин А.Ю. Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
2. Алероева Х.Т., Алероев Т.С. Дробные дифференциальные уравнения и ядра, и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80904>
3. Алероева Х.Т. Дробное исчисление и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76821>
4. Мухаметзянова А.А. Раскачивание и стабилизация равновесия двухмассового маятника ограниченным параметрическим управлением // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=62975>
5. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93297>

6. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Эффективные испытательные стенды для исследования собственных колебаний разомкнутых цилиндрических оболочек и пластин // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)
7. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90079>
8. Семенов М.Е., Соловьев А.М., Попов М.А. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80231>
9. Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Черненко А.В. Радиальные и изгибные колебания круглой трехслойной пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112836>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-6](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-6)
10. Popov I.P. Free harmonic oscillations in systems with homogeneous elements // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 393 – 395. DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2012.09.005](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.09.005)
11. Popov I.P. Theory of a Multi-Inert Oscillator // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2020, vol. 49, no. 8, pp. 16 – 20. DOI: [10.3103/S1052618820080105](https://doi.org/10.3103/S1052618820080105)

12. Петрухин В.А., Мельников В.Е. Маятниковый построитель вертикали с релейным управлением // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80344>
13. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Экспериментальная проверка математической модели вынужденных колебаний разомкнутой тонкостенной оболочки с малой присоединенной массой и жестко заземленными краями // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)
14. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>
15. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=65212>
16. Благодырёва О.В. Применение метода Рунге и метода конечных элементов к расчёту аэроупругих колебаний крылатой ракеты // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84426>
17. Анимича В.А., Борисов Е.А., Крицкий Б.С., Миргазов Р.М. Расчетные исследования виброперегрузок несущего винта, вызванных пульсацией силы тяги, на базе вихревой теории // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=69626>

18. Рыбников С.И., Нгуен Т.Ш. Аналитическое конструирование системы демпфирования изгибных аэроупругих колебаний крыла самолета // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84572>
19. Загордан А.А., Загордан Н.Л. О применении специальных обобщенных координат для исследования совместных изгибных колебаний лопастей несущего винта, закрепленного на упругодемпфирующей опоре // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109383>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4)
20. Попов И.П. Резонансы сил и скоростей // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. № 4 (47). С. 62 – 66. DOI: [10.17072/1993-0550-2019-4-62-66](https://doi.org/10.17072/1993-0550-2019-4-62-66)

Calculation of mechanical oscillations in the field of complex numbers

Popov I.P.

Kurgan State University,

63/4, Sovetskaya str., Kurgan, 640020, Russia

e-mail: ip.popow@yandex.ru

Abstract

It was noted that traditional calculation of complex mechanical devices at forced sinusoidal oscillations is, as a rule, a rather difficult task. Most often, calculators, designers and technologists are interested in steady-state oscillation modes. The goal of this study consists in significant calculations simplifying by replacing the need to solve differential equations with simpler algebraic methods. The author employs complex representation of harmonic values and the values associated with them. Such approach is widely used in theoretical electrical engineering. The main research methods within the framework of this work are methods of mathematical modeling and analysis. With this, a mathematical model, i.e. the object “equivalent”, reflecting its basic properties, namely the laws it obeys, bonds peculiar to its constituent parts, etc., is being studied, rather than the physical object itself. The article considers the scheme of parallel connection, in which the speeds of all mechanical system elements are equal, while the forces are different, as well as the scheme of series connection, in the forces applied to the mechanical system elements are equal, while speeds differ. Application of symbolic (complex) description of mechanical systems at forced harmonic oscillations (in the steady-state mode) allowed abnegate the extremely cumbersome and laborious computational algorithm, associated with differential equations solving, and replace it by the much simpler algebraic operations.

Due to this fact, the computation time was reduced manifold. Being an unnecessary component of the mechanical systems studying at harmonic impact, vector diagrams are of significant methodological meaning, since they demonstrate quantitative and phase relationships between the system parameters.

Keywords: consumers of mechanical power, forced oscillations, parallel, series connection, resonance of forces, resonance of speeds.

References

1. Dobryshkin A.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
2. Aleroeva Kh.T., Aleroev T.S. *Trudy MAI*, 2017, no. 94, URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80904>
3. Aleroeva Kh.T. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=76821>
4. Mukhametzyanova A.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62975>
5. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93297>
6. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2020, no. 113. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)

7. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Nein S.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 98. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90079>
8. Semenov M.E., Solov'ev A.M., Popov M.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80231>
9. Bykova T.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Chernenko A.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112836>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-6](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-6)
10. Popov I.P. Free harmonic oscillations in systems with homogeneous elements, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 393 – 395. DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2012.09.005](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.09.005)
11. Popov I.P. Theory of a Multi-Inert Oscillator, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2020, vol. 49, no. 8, pp. 16 – 20. DOI: [10.3103/S1052618820080105](https://doi.org/10.3103/S1052618820080105)
12. Petrukhin V.A., Mel'nikov V.E. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80344>
13. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)
14. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105618>
15. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212>
16. Blagodyreva O.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84426>

17. Animitsa V.A., Borisov E.A., Kritskii B.S., Mirgazov R.M. *Trudy MAI*, 2016, no. 87.

URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=69626>

18. Rybnikov S.I., Nguen T.Sh. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=84572>

19. Zagordan A.A., Zagordan N.L. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL:

<http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109383>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4)

20. Popov I.P. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*,

2019, no. 4 (47), pp. 62 – 66. DOI: [10.17072/1993-0550-2019-4-62-66](https://doi.org/10.17072/1993-0550-2019-4-62-66)