

Труды МАИ. 2023. № 130
Trudy MAI, 2023, no. 130

Научная статья
УДК 531.38
DOI: [10.34759/trd-2023-130-09](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-09)

КОЛЕБАНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Ян Наинг У

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия
yno64528@gmail.com

Аннотация. В данной работе рассмотрена задача о свободных колебаниях идеальной стратифицированной вращающейся несжимаемой жидкости, заполняющей цилиндрическую полость в твердом теле. Исследованы нормальные колебания стратифицированной жидкости при малой скорости вращения при полном или частичном заполнении жидкостью цилиндрического круглого бака. Численные результаты определения собственных значений и собственных функций нормальных колебаний жидкости приведены при постоянной частоте плавучести в виде таблиц и графиков.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, нормальные колебания жидкости, цилиндрическая полость

Благодарности: Автор выражает благодарность научному руководителю Александру Николаевичу Темнову, доценту каф. Теоретическая механика МГТУ им. Н.Э. Баумана, за содействие при выполнении работы

Для цитирования: Ян Наинг У. Колебания стратифицированной вращающейся жидкости в цилиндрической полости // Труды МАИ. 2013. № 130. DOI: [10.34759/trd-2023-130-09](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-09)

Original article

OSCILLATIONS OF A STRATIFIED ROTATING FLUID IN A CYLINDRICAL CAVITY

Yan Naing Oo

Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia
yno64528@gmail.com

Abstract. In this paper, the problem of free oscillations of an ideal stratified rotating incompressible fluid filling a cylindrical cavity in a solid is considered. The normal oscillations of a stratified fluid at a low rotational speed are studied in the case of full or partial filling of a cylindrical round tank with liquid. Recently, there has been interest in the study of oscillations of a stratified fluid filling a vessel of finite dimensions (oscillations of oil and other liquids in various reservoirs). The study of the motion of a rotating ideal stratified fluid in a limited volume leads to very peculiar boundary and initial problems. In this paper, we investigate the problem of oscillations of an ideal incompressible stratified

fluid whose density at rest varies along the vertical axis. The questions of the interaction of an ideal stratified fluid and the cavity of a moving solid body are considered, and solutions to problems of normal (natural) oscillations of a fluid with boundary conditions are presented. To study the vortex motion of a rotating homogeneous fluid, the method of state functions of S.L. Sobolev or the method of generalized potentials of F.L. Chernousko is usually used. The method of generalized potentials, which uses some restriction on the change of variables from time, is more convenient in this sense. The method of F.L. Chernousko makes it possible to emphasize the hydrodynamic problem from the general problem of the mechanics of the body-liquid system in the most complete way. Numerical results of determining the eigenvalues and eigenfunctions of normal fluid oscillations are given at a constant buoyancy frequency in the form of tables and graphs.

Keywords: stratified fluid, normal fluid oscillations, cylindrical cavity

Acknowledgements: the author is grateful to the scientific supervisor A.N. Temnov, Associate Professor of the Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University for help in carrying out this work

For citation: Yan Naing Oo. Oscillations of a stratified rotating fluid in a cylindrical cavity.

Trudy MAI, 2023, no. 130. DOI: [10.34759/trd-2023-130-09](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-09)

Введение

Задачи о свободных колебаниях стратифицированной жидкости в неограниченной области имеет давнюю историю [1–4]. Эти задачи достаточно исследованы в настоящее время в связи с решением ряда технических и геофизических задач. В последнее время появился интерес к исследованию

колебаний стратифицированной жидкости, заполняющей сосуд конечных размеров (колебания нефти, криогенной жидкости в различных резервуарах). Исследование движения вращающейся идеальной стратифицированной жидкости в ограниченном объеме приводит к весьма своеобразным краевым и начальным задачам [5–9]. Здесь возникают проблемы, характерные для колебаний как однородной жидкости в ограниченной области (поверхностные волны при наличии свободной поверхности), так и неоднородной (стратифицированной) жидкости, заполняющей неограниченную область (внутренние волны). В работах [10,11] рассматривались движения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, заполняющей с неоднородной жидкостью, и представлены области неустойчивости этих рассматриваемых случаев. В статьях [12–14] рассматривались вопросы колебаний идеальной несжимаемой жидкости, а в статьях [15–18] вопросы колебаний стратифицированной жидкости в полости подвижного твердого тела, и представлены решения задач о нормальных (собственных) колебаниях жидкости.

В настоящей работе исследована задача о колебаниях идеальной несжимаемой вращающейся стратифицированной жидкости, плотность которой в состоянии покоя меняется вдоль вертикальной оси. Здесь мы изложим некоторые результаты, полученные нами при исследовании задачи о собственных колебаниях неоднородной вращающейся жидкости в случае, когда полость, содержащая жидкость, является цилиндром круглого сечения.

Постановка задачи

Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, равномерно вращающуюся с угловой скоростью ω_0 вместе с жидкостью вокруг оси Ox_3 (рис. 1). За невозмущенное движение жидкости примем движение, характеризуемое постоянной угловой скоростью, и удовлетворяющее условиям механического равновесия:

$$\bar{V}_0 = 0; \quad \nabla \rho_0 \times \nabla \Pi_0 = 0,$$

где $\rho_0(x_3) = \rho_0^*(1 - \beta x_3)$, $\Pi_0 = -U_0 = -gx_3$,

\bar{V}_0 , ρ_0 – вектор относительной скорости и поле плотности вращающейся жидкости;

Π_0 – потенциальная энергия.

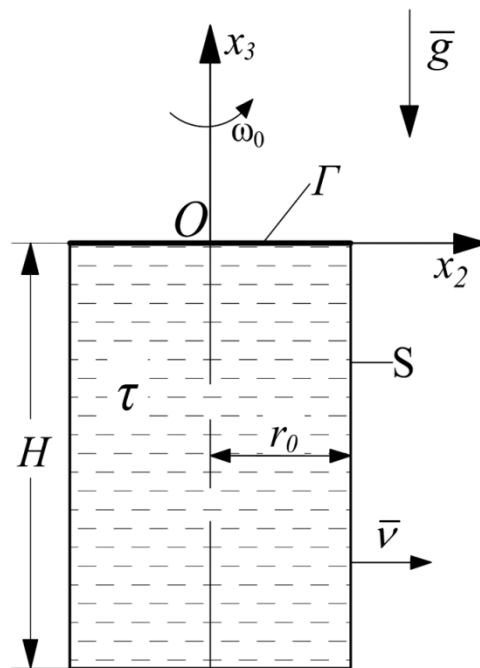


Рис. 1. Цилиндрический бак, заполненный несжимаемой стратифицированной жидкостью

Пусть в возмущенном движении жидкость приобретает поле скоростей, давлений и плотностей – \bar{V} , p , ρ . Считая \bar{V} , p , ρ – величинами первого порядка

малости и используя двойное приближение Буссинеска [8], получаем следующие уравнения возмущенного движения вращающейся неоднородной жидкости:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + 2\bar{\omega}_0 \times \bar{V} - \frac{\rho}{\rho_0^*} \nabla \Pi_0 = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla p \quad \text{в } \tau, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad \text{в } \tau; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \bar{V} = 0 \quad \text{в } \tau. \quad (2)$$

Уравнения возмущенного движения необходимо подчинить граничным и начальным условиям,

$$\bar{V} \cdot \bar{\nu} = 0 \quad \text{на } S, \quad (3)$$

$$\bar{V}(x, t_0) = \bar{V}^0(x), \quad \rho(x, t_0) = \rho^0(x), \quad (4)$$

$\bar{\nu}$ – внутренняя нормаль к смачиваемой поверхности S ; τ – область, занимаемая жидкостью, ρ_0^* – постоянное значение плотности жидкости.

Исключив из уравнений (1) и (2) вектор скорости и плотность жидкости задачу (1) – (4) можно записать в виде эволюционной задачи для одной функции – давления $p(x, t)$,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p + N^2 \Delta_2 p + 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial p}{\partial \nu} + 2\omega_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \eta} + N^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial \nu_n} + \\ + 2\omega_0 N^2 \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \eta} + 4\omega_0^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial x_3} \nu_3 = 0 \quad \text{на } S, \end{aligned} \quad (6)$$

с начальными условиями

$$p(x, t_0) = p^0(x), \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x, t_0) = \dot{p}^0(x), \quad (7)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \nu_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \nu_3, \quad \frac{\partial}{\partial \nu_n} = \frac{\partial}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \nu_2,$$

$\nu_i, i = 1, 2, 3$ – направляющие косинусы нормали $\bar{\nu}$.

Для исследования вихревого движения вращающейся однородной жидкости обычно применяют метод функций состояния С.Л. Соболева или метод обобщенных потенциалов Ф.Л. Черноусько. Развитие метода С.Л. Соболева на случай неоднородной жидкости оказывается трудной задачей. Метод обобщенных потенциалов, использующий некоторое ограничение на изменение переменных от времени, в этом смысле является более удобным. Метод Ф.Л. Черноусько позволяет наиболее полным образом выделить гидродинамическую задачу из общей задачи механики системы тело-жидкость [19]. Рассмотрим распространение этого метода на случай стратифицированной жидкости.

Пусть все переменные по времени изменяются пропорционально $e^{\lambda t}$, где $\lambda = i\omega$ – комплексное число. Тогда уравнения (1) – (3) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda \bar{V} + 2\bar{\omega}_0 \times \bar{V} + \frac{\rho}{\rho_0} g &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p, \\ \lambda \rho + \frac{d\rho_0}{dx_3} \bar{V} \cdot \bar{e}_3 &= 0 \quad \text{в } \tau, \\ \nabla \cdot \bar{V} &= 0 \quad \text{в } \tau, \quad \bar{V} \cdot \bar{\nu} = 0 \quad \text{на } S, \end{aligned} \tag{8}$$

Умножим первое уравнение (8) на λ и, используя второе уравнение, получим выражение для вектора относительной скорости в виде

$$\bar{V} = -\frac{\lambda}{\lambda^2 + 4\omega_0^2} L \cdot \bar{a}, \quad (9)$$

где тензор L вида,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\omega_0}{\lambda} & 0 \\ -\frac{2\omega_0}{\lambda} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2 + 4\omega_0^2}{\lambda^2 + N^2} \end{pmatrix},$$

здесь $N^2 = -\frac{g}{\rho_0^*} \frac{d\rho_0}{dx_3} = g\beta$, N^2 – частота плавучести, $\bar{a} = \frac{1}{\rho_0^*} \nabla p$.

Используя преобразование (9), уравнение неразрывности и граничные условия (3) запишем исходные уравнения в виде краевой задачи

$$\nabla \cdot (L \cdot \bar{a}) = 0 \text{ в } \tau; \quad \bar{v} \cdot (L \cdot \bar{a}) = 0 \text{ на } S. \quad (10)$$

Нормальные колебания стратифицированной жидкости, полностью заполняющей цилиндрическую полость при малой скорости вращения

Рассмотрим задачу о собственных движениях жидкости при отсутствии свободной поверхности. Пусть в невозмущенном движении вектор градиента плотности и вектор угловой скорости вращения коллинеарные векторы, а действие однородного силового поля описывается силовой функцией $U_0 = gx_3$. Ограничимся рассмотрением случая, когда угловая скорость вращения ω_0 мала, и выполняется

условие $\frac{\omega_0^2 \ell}{g} \ll 1$ (ℓ – характерный размер). Это будет означать, что в невозмущенном состоянии изгиб поверхностей равной плотности мал и им можно пренебречь.

Определим собственные числа и собственные функции задачи о нормальных колебаниях жидкости, полагая $p = \varphi e^{i\omega t}$, $q = \frac{\omega}{2\omega_0}$, ω – частота нормальных колебаний. В цилиндрических координатах (x_3, r, η) с началом координат на поверхности жидкости Γ краевая задача, отвечающая (5), запишется в виде [20]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{1 - q^2}{Fr^2 - q^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0, \quad (11)$$

а граничное условие (6) при полном заполнении жидкости будет

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= 0, \quad \text{при } x_3 = 0, \quad x_3 = -H, \end{aligned} \quad (12)$$

здесь $\chi = \frac{1}{q}$, $Fr^2 = \frac{N^2}{4\omega_0^2}$.

Полагая функцию $\varphi(r, \eta, x_3) = R(r)H(\eta)Z(x_3)$ и используя метод разделения переменных, получаем следующие краевые задачи:

$$\frac{1}{H} \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} = -m^2, \quad H(\eta) = H(\eta + 2\pi),$$

$$\frac{1 - q^2}{q^2 - Fr^2} \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_3^2} = -k^2,$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0,$$

с граничными условиями,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(r)}{\partial r} H(\eta) - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial H(\eta)}{\partial \eta} R(r) &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{\partial Z(x_3)}{\partial x_3} &= 0, \quad \text{при } x_3 = 0, \quad x_3 = -H. \end{aligned}$$

В рассматриваемом частном случае решение задачи (11) и (12) имеет вид

$$\varphi_{mnl} = J_m(\xi_{mn} \bar{r}) e^{imn} \cos k_l x_3, \quad (13)$$

где

$$k_l^2 = k^2 \frac{q^2 - Fr^2}{1 - q^2}; \quad k_l = \frac{l\pi}{H}; \quad l = 1, 2, \dots,$$

$$\xi_{mn} = k_{mn} r_0, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots,$$

здесь $J_m(\xi_{mn} r)$ – функция Бесселя первого рода m -го порядка; ξ_{mn} – n -ый корень характеристического уравнения (14) при $\bar{r} = 1$, $m = 0$, $m = 1$:

$$Y_2(\xi_{mn}) = \xi_{mn} J'_m(\xi_{mn}) \pm m \chi_{mnl} J_m(\xi_{mn}) = 0, \quad (14)$$

при фиксированных значениях m , n , l , Fr^2

$$q_{mnl} = \sqrt{\frac{\xi_{mn}^2 Fr^2 + \bar{k}_l^2}{\xi_{mn}^2 + \bar{k}_l^2}}, \quad (15)$$

где $\bar{k}_l = k_l r_0$, $\chi_{mnl} = \frac{1}{q_{mnl}}$.

Исследуем далее уравнение (14) для определения ξ и q . Так как рассматривается случай малого вращения то параметр Fr^2 может удовлетворять неравенствам: $Fr^2 > 1$

, $Fr^2 < 1$. Из приведенного утверждения следует, что множество собственных чисел q_{mnl} будет расположено на отрезках $1 < |q_{mnl} \pm| < Fr$, а в случае $Fr < 1$, множество собственных чисел q_{mnl} будет на отрезках $Fr < |q_{mnl} \pm| < 1$.

Пусть $Fr \rightarrow \infty$, тогда характеристическое уравнение (14) становится независимым от числа χ и имеет вид

$$\frac{d J_m(\xi)}{d \xi} = 0. \quad (16)$$

Корни уравнения (16) ξ_{mn} являются корнями в случае задачи для невращающейся стратифицированной жидкости [7].

Положим теперь $Fr^2 = 0$. Тогда уравнение (14) будет совпадать с трансцендентным уравнением для определения ξ_{mn} и q_{mnl} в случае однородной вращающейся жидкости. При $Fr^2 = 0$ уравнение (14) хорошо изучено в литературе [5,9].

Из имеющихся результатов следует, что во вращающейся однородной жидкости могут существовать два типа внутренних бегущих волн. Прямые волны, движущиеся в сторону вращения жидкости, им соответствуют значения $m > 0$, q_{mnl}^+ , ξ_{mn}^+ и обратные волны, им соответствуют $m < 0$, q_{mnl}^- , ξ_{mn}^- . Значению $m = 0$ отвечают стоячие волны $(m = 0, q_{mnl}^0, \xi_{mnl}^0)$. При $m \neq 0$ происходит расщепление стоячей волны на два типа волн, распространяющихся в разные стороны с различными скоростями. Физической причиной существования этих волн и их расщепления является действие кориолисовых сил инерции. Для $m = -1, 0, 1$; $l = 1$

уравнение (14) исследовалось при помощи вычислительной программы при числах $Fr^2 = 0, 0.5, 2, 4, 10$ и высоте жидкости $H = 2$ (рис. 2).

Из проведенного графика (рис.2) следует, что при колебаниях стратифицированной вращающейся жидкости также возникают прямые и обратные бегущие волны, частота распространения которых неодинаковая. Из графического решения следует, что значения корней уравнения (14) $\xi_{mn}^- > \xi_{mn}^+$ при $0 \leq Fr^2 < 2.3$, и $\xi_{mn}^- < \xi_{mn}^+$ при $Fr^2 \geq 2.3$. Видно, что значения корней ξ_{mn} влияют на собственные числа q_{mnl} , а также на частоты колебаний вращающейся стратифицированной жидкости, но ξ_{mn} и q_{mnl} будут обратно пропорционально когда $Fr^2 < 1$.

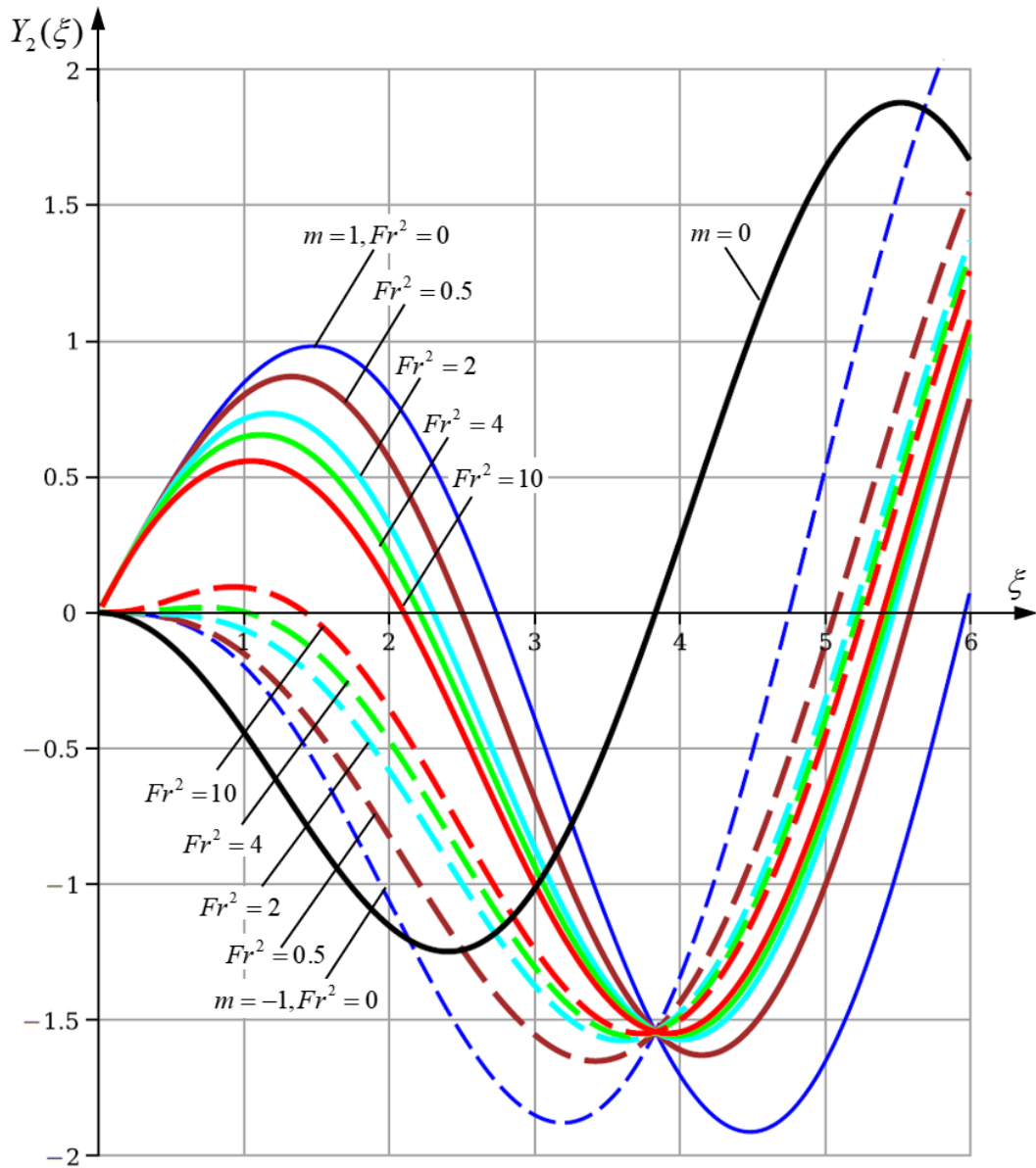


Рис. 2. Графическое решение уравнений (14) при $m = -1, 0, 1$; $l = 1$; $H = 2$;

$$Fr^2 = 0, 0.5, 2, 4, 10$$

m	Q_{mnl}								
	$Fr^2 = 0$	$Fr^2 = 0.5$	$Fr^2 = 1.5$	$Fr^2 = 2$	$Fr^2 = 2.3$	$Fr^2 = 4$	$Fr^2 = 6$	$Fr^2 = 8$	$Fr^2 = 10$
-1	0.3139	0.7374	1.2073	1.3842	1.0162	1.3752	1.7119	1.9990	2.2487
0	0.3793	0.7562	1.1950	1.3623	1.4536	1.8890	2.2979	2.6444	2.9504

1	0.4977	0.8008	1.1598	1.2971	1.3720	1.7296	2.0657	2.3505	2.6021
---	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Таблица 1. Собственные числа q_{mnl} при $m = -1, 0, 1$; $n = 1$; $l = 1$;

$Fr^2 = 0, 0.5, 1.5, 2, 2.3, 4, 6, 8, 10$ в случае полного заполнения жидкости

В таблице 1 приведены собственные числа $q_{mnl} = \frac{\omega_{mnl}}{2\omega_0}$ при $m = -1, 0, 1$; $n = 1$; $l = 1$; и $Fr^2 = 0, 0.5, 1.5, 2, 2.3, 4, 6, 8, 10$ для случая полного заполнения жидкости. Из приведенной таблицы 1 следует, что собственные числа q_{mnl} зависят не только от значений корней ξ_{mn} , но и чисел Fr^2 . Величины собственных чисел q_{mnl} для прямых волн всегда больше, чем обратных ($q_{mnl}^+ > q_{mnl}^-$) при различных числах Fr^2 , кроме ($1 < Fr^2 < 2.3$). И если подробно сравнивать значения q_{mnl} для трёх типов волн при различных числах Fr^2 показываются, что $q_{mnl}^+ > q_{mnl}^0 > q_{mnl}^-$ при $Fr^2 < 1$, $q_{mnl}^- > q_{mnl}^0 > q_{mnl}^+$ при $1 < Fr^2 < 2.3$ и $q_{mnl}^0 > q_{mnl}^+ > q_{mnl}^-$ при $Fr^2 \geq 2.3$.

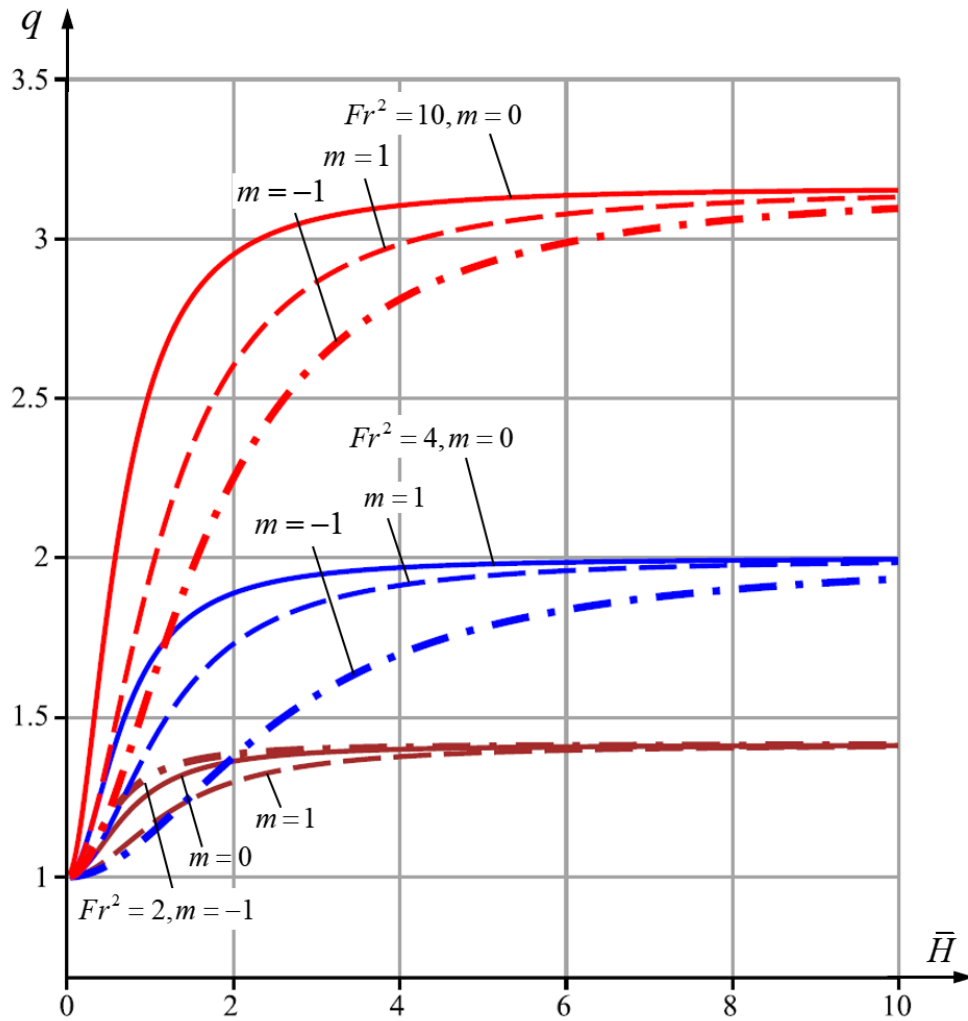


Рис. 3. Зависимости величины собственного числа q_{mnl} от параметра \bar{H} при $m = -1, 0, 1$; $n = 1$; $l = 1$; $Fr^2 = 2, 4, 10$ в случае полного заполнения жидкости

Далее рассмотрим зависимость значений собственных значений q_{mnl} от изменения величины стратификации и от отношения высоты к радиусу полости. На рис.3 приведены зависимости величины собственного числа q_{mnl} от параметра

$\bar{H} = \frac{H}{r_0}$ при числах $Fr^2 = 2, 4, 10$ для случая полного заполнения жидкости в полости.

Из таблицы 1 и рис. 3 видно, что наличие стратификации приводит к увеличению частот нормальных колебаний жидкости для прямых, обратных и стоячих волн, чем больше значение числа Fr^2 тем больше величина собственных чисел q_{mnl} . Из рис. 3

следует, что значения собственных чисел q_{mnl} увеличиваются при росте \bar{H} , и значения q_{mnl} для всех трех типов волн стремятся к постоянным значениям.

**Нормальные колебания стратифицированной жидкости, частично
заполняющей цилиндрическую полость при малой скорости вращения**

Теперь рассмотрим случай наличия свободной поверхности жидкости в полости. Для этого случая граничные условия (12) запишем в следующем виде,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= 0, \quad \text{при } x_3 = -H, \\ (N^2 - \omega^2)\varphi + g \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} &= 0, \quad \text{при } x_3 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Первое уравнение граничных условий (17), допускает решение в случае частичного заполнения жидкости

$$\xi_{mn} J'_m(\xi_{mn}) \pm \frac{m}{q_{mnl}} J_m(\xi_{mn}) = 0, \quad \text{при } r = r_0. \quad (18)$$

Полагая $Z(x_3) = \cos k_l(x_3 + H)$, и из второго и третьего уравнений условия (17), получается следующее выражение,

$$N^2 - \omega^2 = g k_l \tan k_l H, \quad (19)$$

или преобразуя к безразмерному виду,

$$f(y) = \tan(y) = \frac{Fr^2 - q^2}{Fr^2 y} \bar{\beta} \bar{H}, \quad (20)$$

здесь

$$\bar{\beta} = \beta r_0, y = \bar{k}_l \bar{H}. \quad (21)$$

Из уравнений (18), (20) и (21) находим собственные числа q_{mnl} при $r_0 = 1, H = 2$ и полагая $\beta = 0.1$. Определим значения \bar{k}_l из уравнения (20) при $m = -1, 0, 1; n = 1; l = 1$; и при различных числах Fr^2 в случае частичного заполнения свободной поверхности жидкости для внутренних волн. Для первого приближения сначала задается $k_l = \frac{l\pi}{H}$, и находим значения корней ξ_{mn} и q_{mnl} по граничному условию (18). Тогда получается новое значение \bar{k}_l из уравнения (20) (рис. 4). Далее повторяем этот циклический расчет до момента, когда значения \bar{k}_l не меняются. В таблице 2 приведены собственные числа q_{mnl} внутренних волн при $m = -1, 0, 1; n = 1; l = 1$; и $Fr^2 = 0.1, 0.5, 1.5, 2, 2.3, 4, 6, 8, 10$ в случае частичного заполнения свободной поверхности жидкости. На рис.5 приведены зависимости величины собственного числа q_{mnl} внутренних волн от параметра \bar{H} при числах $Fr^2 = 2, 4, 10$ в случае частичного заполнения свободной поверхности жидкости.

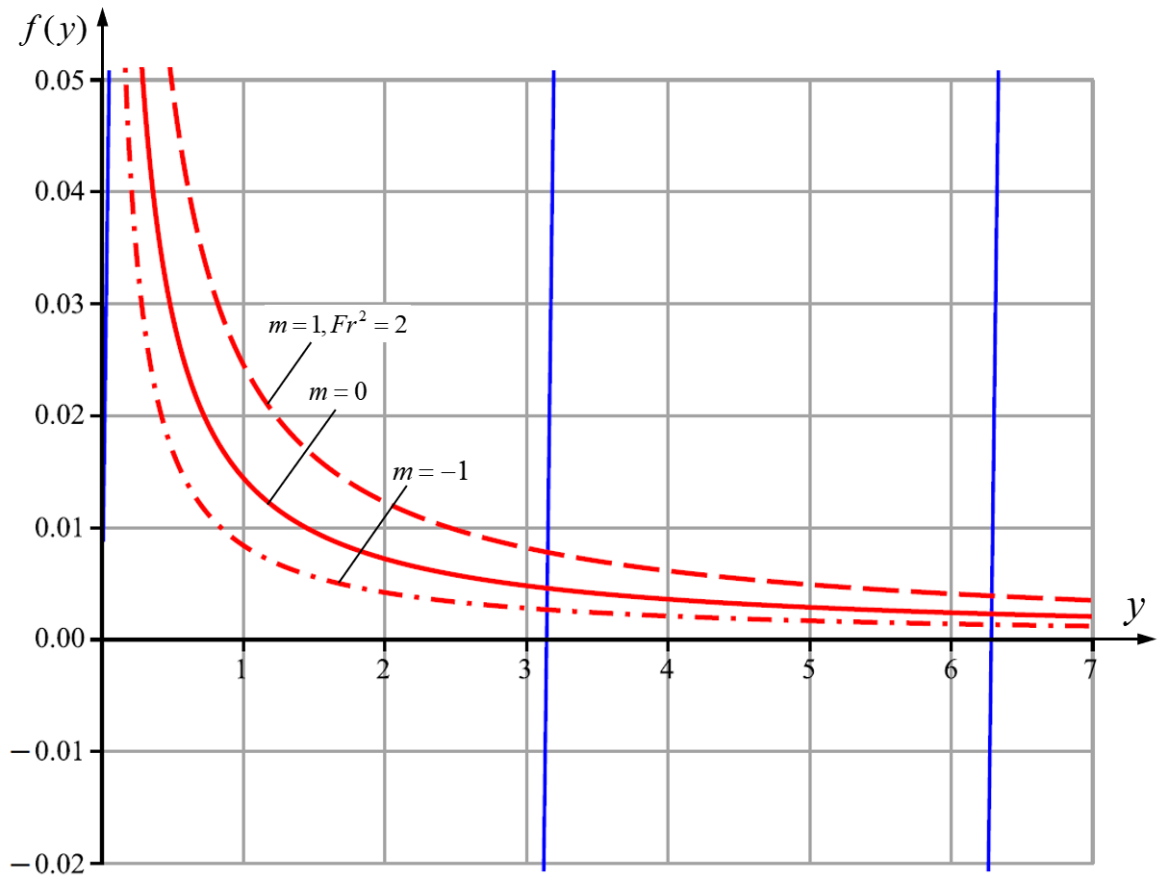


Рис. 4. Определение значения \bar{k}_l при $m = -1, 0, 1$; $n = 1$; $l = 1$; $Fr^2 = 2$ в случае частичного заполнения свободной поверхности жидкости для внутренних волн

m	q_{mnl}								
	$Fr^2 = 0.1$	$Fr^2 = 0.5$	$Fr^2 = 1.5$	$Fr^2 = 2$	$Fr^2 = 2.3$	$Fr^2 = 4$	$Fr^2 = 6$	$Fr^2 = 8$	$Fr^2 = 10$
-1	0.4263	0.7373	1.2073	1.3841	1.0093	1.4061	1.7022	1.9862	2.2370
0	0.4731	0.7560	1.1949	1.3622	1.4534	1.8885	2.2973	2.6435	2.9494
1	0.5220	0.7801	1.1749	1.3245	1.4058	1.7920	2.1522	2.4560	2.7233

Таблица 2. Собственные числа q_{mnl} внутренних волн при $m = -1, 0, 1$; $n = 1$; $l = 1$;

$Fr^2 = 0.1, 0.5, 1.5, 2, 2.3, 4, 6, 8, 10$ в случае частичного заполнения свободной поверхности жидкости

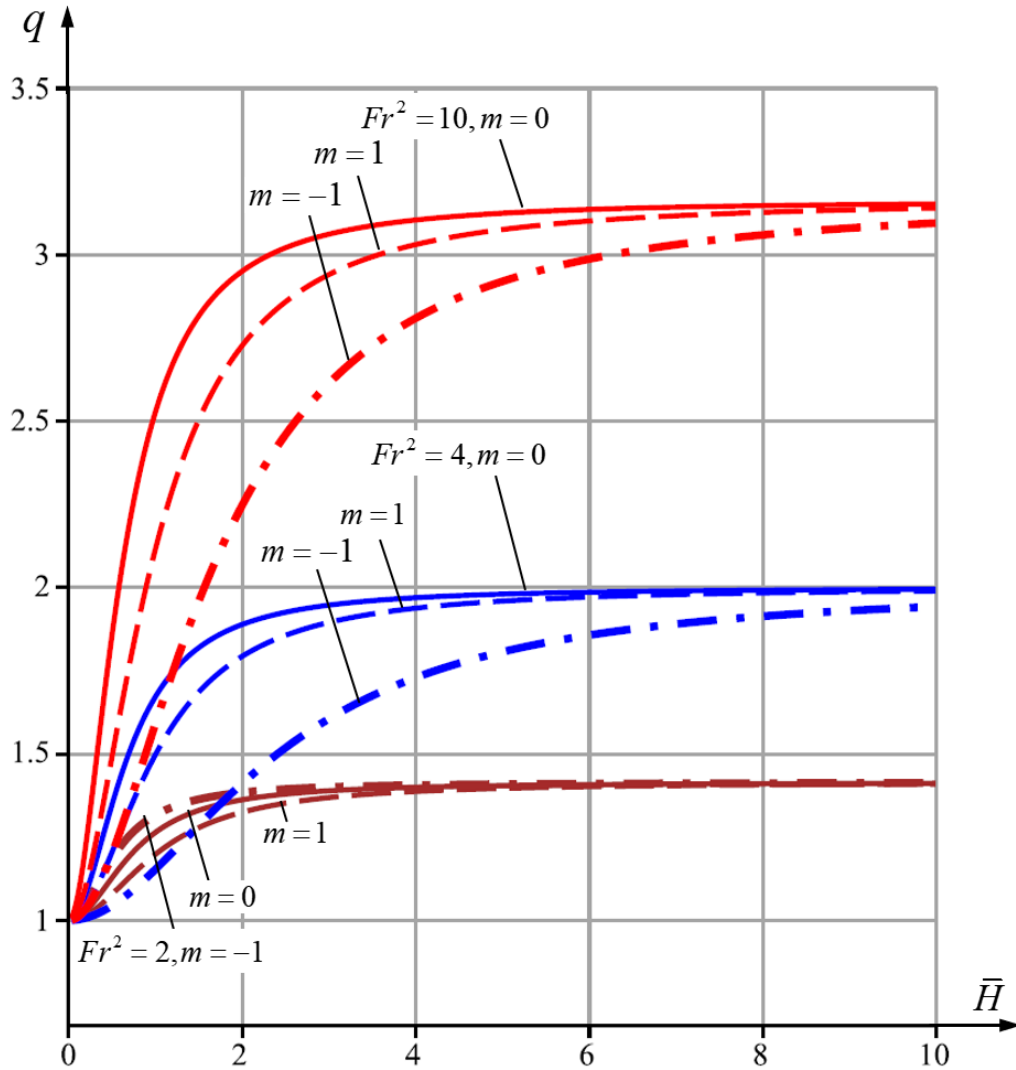


Рис. 5. Зависимости величины собственного числа q_{mnl} внутренних волн от параметра \bar{H} при $m = -1, 0, 1$; $n = 1$; $l = 1$; $Fr^2 = 2, 4, 10$ в случае частичного заполнения свободной поверхности жидкости

Из таблицы 2 и рис. 5 следует, что полученные результаты для случая наличия свободной поверхности жидкости мало отличаются от полного заполнения жидкости в полости. Показываются, что величины собственных чисел q_{mnl} для прямых волн всегда больше, чем обратных ($q_{mnl}^+ > q_{mnl}^-$) при различных числах Fr^2 .

Для вычисления поверхностных волн, первое уравнение граничных условий (17) допускает вид,

$$\xi_{mn} J'_m(\xi_{mn}) \pm \frac{m}{q_{mn}} J_m(\xi_{mn}) = 0, \quad \text{при } r = r_0. \quad (22)$$

Полагая $Z(x_3) = \cosh \mu(x_3 + H)$, и тогда из второго и третьего уравнений условия (17), получается следующее граничное условие,

$$N^2 - \omega^2 = -g \mu \tanh \mu H, \quad (23)$$

и если преобразовать к безразмерному виду,

$$f(z) = \tanh(z) = -\frac{Fr^2 - q^2}{Fr^2 z} \bar{\beta} \bar{H}, \quad (24)$$

здесь

$$\bar{\mu} = \mu r_0, \quad z = \bar{\mu} \bar{H}. \quad (25)$$

Из уравнений (22), (24) и (25) находим собственные числа q_{mn} поверхностных волн при $r_0 = 1$, $H = 2$ и полагая $\beta = 0.1$. Определим значения $\bar{\mu}$ из уравнения (24) при $m = -1, 0, 1$; $n = 1$; и различных числах Fr^2 в случае частичного заполнения свободной поверхности жидкости для поверхностных волн. Для первого приближения будем считать $\frac{1}{q_{mn}} = \frac{2\omega_0}{\omega_{mn}}$ очень мало и можем пренебречь. Тогда по граничному условию (22) получаются $\xi_{11} = 1.8412$ для антисимметричных ($m \neq 0$) колебаний жидкости и $\xi_{10} = 3.8317$ для стоячих волн ($m = 0$). Далее получается новое значение $\bar{\mu}$ из уравнения (24) (рис. 6). Считаем этот циклический расчет до момента, когда значения $\bar{\mu}$ не меняются. В таблице 3 приведены собственные числа q_{mn} поверхностных волн при различных числах Fr^2 ($Fr^2 = 0.1, 0.5, 1.5, 2, 4, 6, 8, 10$) в случае частичного заполнения свободной поверхности жидкости. Из таблицы 3 следует, что

величины собственных чисел q_{mn} для прямых волн всегда больше, чем обратных ($q_{mn}^+ > q_{mn}^-$) при различных числах Fr^2 . Из более внимательного сравнения значений q для трех типов волн видно, что $q_{mn}^0 > q_{mn}^+ > q_{mn}^-$.

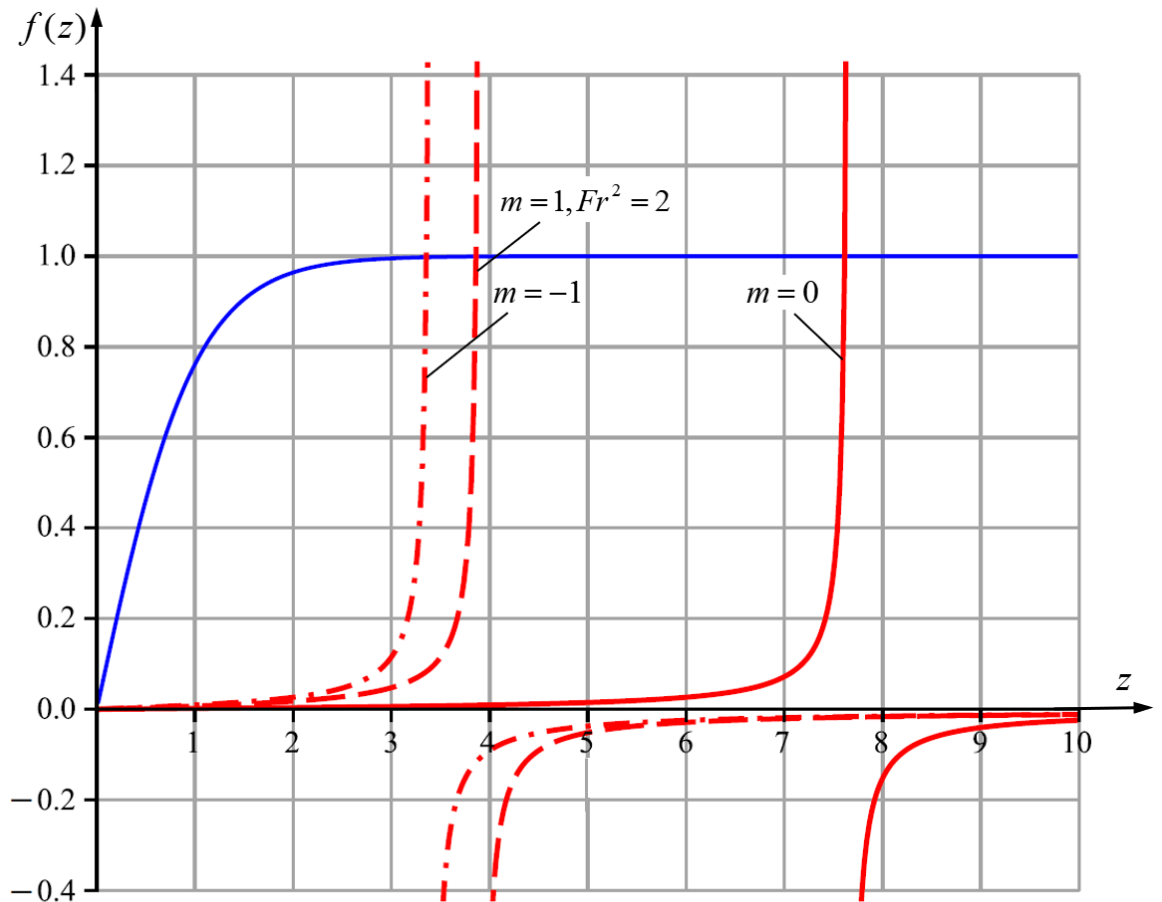


Рис. 6. Определение значения $\bar{\mu}$ при $m = -1, 0, 1$; $n = 1$; $Fr^2 = 2$ в случае частичного заполнения свободной поверхности жидкости для поверхностных волн

m	q_{mn}							
	$Fr^2 = 0.1$	$Fr^2 = 0.5$	$Fr^2 = 1.5$	$Fr^2 = 2$	$Fr^2 = 4$	$Fr^2 = 6$	$Fr^2 = 8$	$Fr^2 = 10$
-1	1.2302	2.8966	5.1390	5.9593	8.5005	10.4503	12.0946	13.5481

0	2.0995	4.4631	7.6588	8.8426	12.483	15.2852	17.6368	19.7122
1	1.6771	3.3173	5.5427	6.3713	8.9130	10.8631	12.5069	13.9682

Таблица 3. Собственные числа q_{mn} поверхностных волн при

$m = -1, 0, 1; l = 1; n = 1; Fr^2 = 0.1, 0.5, 1.5, 2, 4, 6, 8, 10$ в случае частичного заполнения свободной поверхности жидкости

Далее посмотрим, что зависимость значения собственных значений q_{mn} для поверхностных волн от изменения величины стратификации и от отношения высоты к радиусу полости. На рис.7 приведены зависимости величины собственного числа q_{mn} поверхностных волн от параметра $\bar{H} = \frac{H}{r_0}$ при числах $Fr^2 = 2, 4, 10$ в случае частичного заполнения свободной поверхности жидкости. Из рис. 7 следует, что наличие стратификации приводит к увеличению частот нормальных колебаний поверхностных волн для прямых, обратных и стоячих волн, чем больше значение числа Fr^2 тем больше величина собственных чисел q_{mn} . И значения собственных чисел q_{mn} увеличиваются зависимости от отношения \bar{H} , но, когда примерно $\bar{H} \geq 1.5$ изменение величин q_{mn} не заметно. При любых числах Fr^2 ($Fr^2 > 0$) величины собственных чисел стоячих волн являются самыми высокими из трех типов волн, т. е. $(q_{mn}^0 > q_{mn}^+ > q_{mn}^-)$. Значения собственных чисел q_{mn}^+ и q_{mn}^- поверхностных волн в случае частичного заполнения свободной поверхности жидкости мало отличаются для прямых и обратных волн при различных числах Fr^2 .

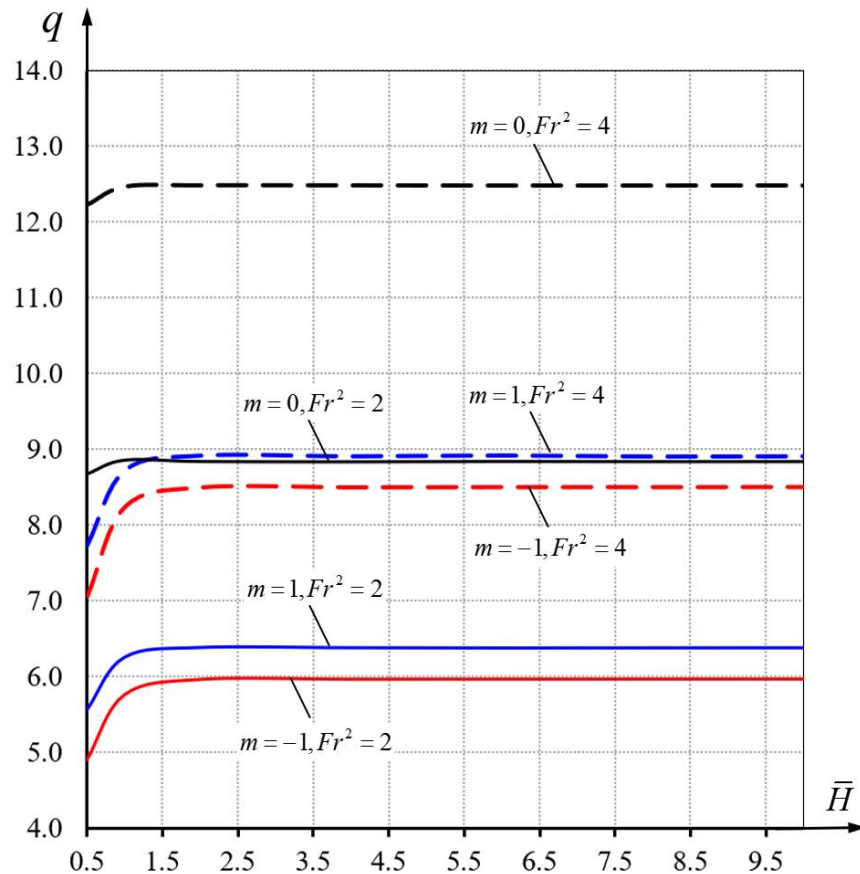


Рис. 7. Зависимости величины собственного числа q_{mn} поверхностных волн от параметра \bar{H} при $m = -1, 0, 1$; $n = 1$; $Fr^2 = 2, 4$ в случае частичного заполнения свободной поверхности жидкости

Заключение

Разобранные задачи показывают, что во вращающейся стратифицированной жидкости, в зависимости от числа Fr^2 , могут возникать различные типы волн, собственные частоты которых существенно зависят от соотношения сил плавучести и кориолисовых сил инерции. Непосредственное вычисление собственных значений для полости в форме кругового цилиндра показало, что собственные частоты располагаются всюду плотно на сегменте $[N^2, 4\omega_0^2]$ или $[4\omega_0^2, N^2]$ и можно

предположить, что возникновение внутренних волн в медленно вращающейся стратифицированной жидкости, полностью заполняющей произвольную область τ будет находится также в этом сегменте. Полученные собственные числа внутренних волн в случае полного и частичного заполнения жидкости в полости мало отличаются, если одинаковы величины стратификации и высоты жидкости цилиндра. Наличие стратификации приводит к увеличению частот нормальных колебаний жидкости для внутренних и поверхностных волн.

В отличие от значений частот колебаний вращающейся однородной жидкости при полном заполнении, частоты колебаний прямых бегущих поверхностных волн стратифицированной вращающейся жидкости всегда больше частот колебаний обратных волн, для прямых бегущих внутренних волн это также справедливо за исключением диапазона $1 < q < 2.3$, $(m, n, l = 1)$.

Список источников

1. Краусс В. Внутренние волны. Методы и результаты теоретической океанографии. – Л.: Гидрометеиздат, 1968. - 270 с.
2. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. – М.: Мир, 1977. - 431 с.
3. Монин А.С. Океанология. Геофизика океана. Т.1. Гидрофизика океанского дна. - М.: Наука, 1979. - 479 с.
4. Монин А.С. Океанология. Геофизика океана. Т.2. Гидродинамика. – М.: Наука, 1979. - 420 с.

5. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. – Л.: Гидрометеиздат, 1975. - 304 с.
6. Габов С.А. О спектре и базисах из собственных функций одной задачи, связанной с колебаниями вращающейся жидкости // Математический сборник. 1981. Т. 116 (158). № 2 (10). С. 245-252.
7. Габов С.А. Свешников А.Г. О некоторых задачах, связанных с колебаниями стратифицированных жидкостей // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 7. С. 1150-1156.
8. Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объеме: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, МВТУ, 1983, 192 с.
9. Копачевский Н.Д., Цветков Д.О. Колебания стратифицированных жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 29. С. 103–130.
10. Темнов А.Н., Ян Наинг У. Механический аналог движений неоднородной жидкости // Инженерный журнал: наука и инновации. 2022. № 7. DOI: [10.18698/2308-6033-2022-7-2192](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2022-7-2192)
11. Темнов А.Н., Ян Наинг У. Вращение вокруг неподвижной точки твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, полностью наполненной неоднородной жидкостью // Труды МАИ. 2023. № 128. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=171387>
12. Ишлинский А.Ю., Темченков М.Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 1960. № 3. С. 65-75.
13. Рвалов Р.В. Краевая задача о свободных колебаниях вращающейся идеальной жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1973. № 4. С. 81-88.

14. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=84412>
15. Орлов В.В., Темнов А.Н. Нормальные колебания жидкости, вытекающей из вращающегося бака // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 8. DOI: [10.18698/2308-6033-2019-8-1907](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-8-1907)
16. Перова Л.В. О колебаниях стратифицированной вращающейся жидкости при возбуждении ее свободной поверхности движущимися источниками // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 5. С. 903-922.
17. Темнов А.Н., Ай Мин Вин. О движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твердого тела // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 7. DOI: [10.18698/2308-6033-2012-7-291](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2012-7-291)
18. Ай Мин Вин, Темнов А.Н. Вращение твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=55633>
19. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1968. - 230 с.
20. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. - М.: Высшая школа, 1977. - 431 с.

References

1. Krauss V. *Vnutrennie volny. Metody i rezul'taty teoreticheskoi okeanografii* (Internal waves. Methods and results of theoretical oceanography), Leningrad, Gidrometeoizdat, 1968, 270 p.

2. Terner Dzh. *Effekty plavuchesti v zhidkostyakh* (Effects of buoyancy in liquids), Moscow, Mir, 1977, 431 p.
3. Monin A.S. *Okeanologiya. Geofizika okeana. T.1. Gidrofizika okeanskogo dna.* (Oceanology. Geophysics of the ocean. Vol.1. Hydrophysics of the ocean floor), Moscow, Nauka, 1979, 479 p.
4. Monin A.S. *Okeanologiya. Geofizika okeana. T.2. Gidrodinamika* (Oceanology. Geophysics of the ocean. Vol.2. Hydrodynamics), Moscow, Nauka, 1979, 420 p.
5. Grinspen Kh. *Teoriya vrashchayushchikhsya zhidkosti* (Theory of rotating fluids), Leningrad, Gidrometeoizdat, 1975, 304 p.
6. Gabov S.A. *Matematicheskii sbornik*, 1981, vol. 116 (158), no. 2 (10), pp. 245-252.
7. Gabov S.A. Sveshnikov A.G. *Differentsial'nye uravneniya*, 1982, vol. 18, no. 7. pp. 1150-1156.
8. Temnov A.N. *Kolebaniya stratifitsirovannoi zhidkosti v ogranichennom ob'eme* (Oscillations of a stratified fluid in a limited volume), Doctor's thesis. Moscow, MVTU, 1983, 192 s.
9. Kopachevskii N.D., Tsvetkov D.O. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya*, 2008, vol. 29, pp. 103–130.
10. Temnov A.N., Yan Naing U. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*, 2022, no. 7. DOI: 10.18698/2308-6033-2022-7-2192
11. Temnov A.N., Yan Naing U. *Trudy MAI*, 2023, no. 128. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=171387>
12. Ishlinskii A.Yu., Temchenkov M.E. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1960, no. 3, pp. 65-75.

13. Rvalov R.V. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1973, no. 4, pp. 81-88.
14. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84412>
15. Orlov V.V., Temnov A.N. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*, 2019, no. 8. DOI: 10.18698/2308-6033-2019-8-1907
16. Perova L.V. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2007, vol. 47, no. 5, pp. 903-922.
17. Temnov A.N., Ai Min Vin. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*, 2012, no. 7. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-7-291
18. Ai Min Vin, Temnov A.N. *Trudy MAI*, 2015, no. 79. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=55633>
19. Chernous'ko F.L. *Dvizhenie tverdogo tela s polostyami, sodержashchimi vyazkuyu zhidkost'* (Motion of a rigid body with cavities containing a viscous fluid), Moscow, Vychislitel'nyi tsentr AN SSSR, 1968, 230 p.
20. Mikhlin S.G. *Lineinye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* (Lineinye uravneniya v chastnykh proizvodnykh), Moscow, Vysshaya shkola, 1977, 431 p.

Статья поступила в редакцию 15.05.2023

Одобрена после рецензирования 21.05.2023

Принята к публикации 27.06.2023

The article was submitted on 15.05.2023; approved after reviewing on 21.05.2023; accepted for publication on 27.06.2023