

ИСТИННЫЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ОДНОЗНАЧЕН

Р.И. Храпко

Канонический тензор энергии-импульса не верен. Инвариантность лагранжиана нельзя использовать для получения истинных тензоров энергии-импульса и спина.

Авторы всех учебников по теории поля утверждают одно и то же. В качестве примера я процитирую из [1].

"Необходимо заметить, что определение тензора [энергии-импульса] T^{ik} по существу не однозначно. Действительно, если T^{ik} - тензор, определенный согласно

$$T_i^k = q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} - \delta_i^k \Lambda, \quad (32.3)$$

то и всякий другой тензор вида

$$T^{ik} + \frac{\partial}{\partial x^l} \psi^{ikl}, \quad \psi^{ijl} = -\psi^{ilj}, \quad (32.7)$$

удовлетворяет уравнению сохранения

$$\partial T^{ik} / \partial x^k = 0, \quad (32.4)$$

так как тождественно $\partial^2 \psi^{ikl} / \partial x^k \partial x^l = 0$ ввиду антисимметричности тензора ψ^{ijl} по индексам k, l .

Полный 4-импульс системы при этом вообще не изменится, так как согласно (6.17) имеем:

$$\int \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} dS_k = \frac{1}{2} \int \left(dS_k \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} - dS_i \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} \oint \psi^{ikl} df_{kl}^*,$$

где интегрирование с правой стороны равенства производится по поверхности (обычной),

"охватывающей" гиперповерхность, по которой производится интегрирование с левой стороны равенства. Эта поверхность находится, очевидно, на бесконечности трехмерного пространства, и, поскольку поле или частицы на бесконечности отсутствуют, интеграл равен нулю. Таким образом, 4-импульс системы является, как и следовало, однозначно определенной величиной."

Это, однако, - заблуждение. $\oint \psi^{ikl} df_{kl}^* = 0$, только если ψ^{ikl} убывает на бесконечности достаточно быстро. А это бывает далеко не всегда. Приведем простую трехмерную аналогию, в которой роль тензора энергии-импульса T^{ik} и добавки $\tilde{T}^{ik} = \partial_l \psi^{ikl}$ играет плотность тока j^α и ротор некоторого дополнительного магнитного поля, $\tilde{j}^\alpha = \partial_\beta H^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Если полный ток \tilde{I} , порождающий это дополнительное магнитное поле, не равен нулю, то по "закону полного тока"

$$\int \partial_{\beta} H^{\alpha\beta} df_{\alpha} = \frac{1}{2} \oint H^{\alpha\beta} dl_{\alpha\beta} = \int \tilde{j}^{\alpha} df_{\alpha} = \tilde{I} \neq 0$$

Несомненно, что после добавления конструкции $\partial_l \psi^{ikl}$ к тензору энергии-импульса T^{ik} , новый тензор энергии-импульса, $T^{ik} + \partial_l \psi^{ikl}$, по-прежнему удовлетворяет уравнению сохранения, так что интеграл

$$\int (T^{ik} + \partial_l \psi^{ijk}) dS_k = P^i + \tilde{P}^i = \text{Const}$$

не зависит от гиперповерхности интегрирования. Однако добавка $\partial_l \psi^{ikl}$ изменяет, вообще говоря, значение этой константы на величину

$$\int \partial_l \psi^{ikl} dS_k = \frac{1}{2} \oint \psi^{ikl} df_{kl}^* = \tilde{P}^i \neq 0,$$

так же, как добавка $\partial_{\beta} H^{\alpha\beta}$ изменяет значение тока на величину \tilde{I} .

Нетрудно привести примеры такого изменения полного 4-импульса системы. Действительно, в виде $\tilde{T}^{ik} = \partial_l \psi^{ikl}$ легко представить, например, тензор энергии-импульса однородного шара радиуса R , добавление которого очевидно меняет полный 4-импульс:

$$\psi^{00\alpha} = -\psi^{0\alpha 0} = \varepsilon x^{\alpha} / 3 \quad (r < R), \quad \psi^{00\alpha} = -\psi^{0\alpha 0} = \varepsilon R^3 x^{\alpha} / 3r^3 \quad (r > R)$$

дает $\tilde{T}^{00} = \varepsilon$ при $r < R$, $\tilde{T}^{00} = 0$ при $r > R$.

Однако, даже если полный 4-импульс системы не изменяется, прибавление выражений типа $\partial_l \psi^{ikl}$ к T^{ik} конкретной среды приводит к локальному изменению среды. Ведь мы считаем, что тензор энергии-импульса описывает материальный объект локально! Мы обращали на это внимание [2].

Трехмерным аналогом тензора ψ^{ikl} , не изменяющего полный 4-импульс системы при добавлении $\tilde{T}^{ik} = \partial_l \psi^{ikl}$, но вызывающим локальные изменения, является магнитное поле $H^{\alpha\beta}$ кольцевого электрического тока $\tilde{j}_{ring}^{\alpha} = \partial_{\beta} H^{\alpha\beta}$. Для такого магнитного поля интеграл по всему 2-пространству действительно будет равен нулю:

$$\int \partial_{\beta} H^{\alpha\beta} df_{\alpha} = \frac{1}{2} \oint H^{\alpha\beta} dl_{\alpha\beta} = \int \tilde{j}_{ring}^{\alpha} df_{\alpha} = 0$$

Определение (дефиниция) тензора энергии-импульса T^{ik} и, добавим здесь, тензора спина Y^{ikj} (ипсилон) не должны допускать произвола, так как свертки тензоров с трехмерным элементом гиперповерхности dS_k являются наблюдаемыми величинами, инфинитезимальными 4-импульсом dP^i и 4-спином $d\Sigma^{ik}$:

$$dP^i = T^{ik} dS_k, \quad d\Sigma^{ik} = Y^{ikj} dS_j.$$

Истинным, прошедшим экспериментальную проверку тензором энергии-импульса электродинамики является тензор Минковского

$$T^{ik} = -F^{il}F^k{}_l + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}, \quad F_{lm} = 2\partial_{[l}A_{m]}. \quad (1)$$

Между тем, истинный тензор спина электродинамики Y^{ikj} , по-видимому, не известен.

В то же время канонический тензор энергии-импульса электродинамики, получаемый по формуле (32.3),

$$T_c^{ik} = -\partial^i A_j F^{kj} + \frac{1}{4}g^{ik}F_{mn}F^{mn}, \quad (2)$$

очевидно противоречит опыту. Например, для постоянного и однородного магнитного поля, направленного по оси x , $F_{yz} = -B$, $A_y = Bz/2$, $A_z = -By/2$, формула (1) дает верное значение давления поля вдоль оси y или z , $T^{yy} = T^{zz} = B^2/2$, а канонический тензор приводит к нулевому значению:

$$T_c^{yy} = T_c^{zz} = 0.$$

Кроме того дивергенция канонического тензора энергии-импульса равна не $\partial_k T^{ik} = -F^i{}_k j^k$, а неподобающей величине $\partial_k T_c^{ik} = -\partial^i A_k j^k$. По-видимому, Р.Фейнман ошибался, когда говорил, "что мы не знаем, как же на самом деле распределена энергия в электромагнитном поле" [3].

Для того, чтобы исправить канонический тензор энергии-импульса (2), то есть превратить его в тензор Минковского (1), теоретики просто добавляют к каноническому тензору энергии-импульса

T_c^{ik} *ad hoc* конструкцию \tilde{T}_c^{ik} , которая даже не имеет вида $\partial_l \psi^{ikl}$:

$$T^{ik} = T_c^{ik} + \tilde{T}_c^{ik} = T_c^{ik} + A^i j^k + \partial_j (A^i F^{kj}).$$

Первая часть добавки исправляет дивергенцию канонического тензора, а вторая часть, дивергенциальная, симметрирует полученный тензор, не изменяя его дивергенцию. Нечего и говорить, что такая добавка серьезно изменяет и полный 4-импульс системы, и среду локально.

Канонический тензор спина $Y_c^{ikj} = -2A^{[i}F^{k]j}$, получаемый по формуле

$$Y_c^{ikj} = -2A^{[i}\delta_l^{k]}\frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_j A_l)}, \quad \Lambda = -\frac{1}{4}F_{pq}F^{pq},$$

противоречит опыту так же, как тензор энергии-импульса. Так что единственным достижением вариационного метода в отношении рассматриваемых тензоров является получение тензора Минковского варьированием лагранжиана по метрическому тензору в пространстве Минковского.

Но это представляется нам счастливой случайностью, потому что никакого тензора спина, например, нельзя получить аналогичной вариацией по кручению ни для электромагнитного поля, ни для поля, заведомо обладающего спином в пространстве Минковского. Это объясняется тем, что в пространстве Минковского и даже в римановом пространстве тензоры кручения и конторсии тождественно равны нулю, в отличие от метрического тензора.

Ввиду этого нет уверенности, что вариационный принцип способен дать истинные тензоры энергии-импульса и спина в римановом пространстве и в пространстве U_4 (с кручением).

Примечания

Большая часть настоящей статьи является методически усиленным фрагментом серьезной статьи "Проблемы тензоров энергии-импульса и спина в электромагнетизме", на которую редакция журнала *УФН* не дает ответа с 12.01.00, редакция *ЖЭТФ* с 13.04.00 и которую редакция журнала *Известия вузов. Физика* отклонила 11.05.00, а редакция журнала *ТМФ* 31.05.00.

Еще раньше материал настоящей статьи входил в другую статью "Тензор спина электромагнитного поля". Эта статья была отклонена *ЖЭТФ* 16.04.99 без всякой рецензии, журналом *ТМФ* отклонена 15.06.99, а журналом *Известия вузов. Физика* 16.09.99.

Материал настоящей статьи безответно находится в редакции журнала *American Journal of Physics* с 15.09.99 (#11159).

Единственным местом, где материал настоящей статьи был опубликован, явился сборник [2]. Правда, с этой публикацией приключилась история, которая, возможно, подтверждает гипотезу Стругацких о том, что Природа восстает против серьезных научных достижений. Эта гипотеза высказана в романе "За миллиард лет до конца света". Так вот, при безукоризненной печати 275-и тезисов в сборнике [2] тезисы доклада Р.И.Храпко оказались смазанными настолько, что их трудно прочитать.

Список литературы

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. - М.: Наука, 1973.- 504с.
2. Р.И. Храпко. Истинные тензоры энергии-импульса и спина среды однозначны. // X Российская Гравитационная Конференция. Тезисы докладов. - Москва, 1999. - с. 47.
3. Р. Фейнман *et al.* Фейнмановские лекции по физике, т. 6. - М.: Мир, 1977.-347с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Храпко Радий Игоревич, доцент кафедры физики Московского государственного авиационного института (технического университета), к.ф.-м.н.