

Труды МАИ. 2025. № 140
Trudy MAI. 2025. No. 140. (In Russ.)

Научная статья

УДК 519.876.5

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184054>

EDN: <https://www.elibrary.ru/XGVHAU>

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ОДНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ИССЛЕДОВАНИИ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ ИЗ СЛОИСТОГО МАТЕРИАЛА

Хоа Ван Донг¹, Любовь Ивановна Миронова²✉

^{1,2}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

¹dong.hoavan@yandex.ru

²mironova_lub@mail.ru ✉

Аннотация. Приведены результаты исследования термонапряженного состояния реальной тонкостенной плакированной конструкции, испытывающей температурное воздействие в процессе проведения доводочной технологической операции изготовления. В качестве расчетной модели принималась двухслойная узкая полоса большой протяженности, жестко закрепленная по длинной стороне. Реакция тонкой прямоугольной полосы на воздействие температурного поля рассматривалась в постановке плоской задачи теории упругости. В качестве метода исследования был принят итерационно-асимптотический метод Сен-Венана–Пикара–Банаха, развитие которого в настоящее время расширило границы применимости в решении задач

теории упругости. Целью работы являлась оценка эффективности применения аналитического решения, полученного на базе данного метода, в обосновании прочности реальных технических конструкций, в качестве которой была выбрана мембранная панель печи мусоросжигательной установки. Полученные расчетные значения температурных деформаций, обусловленных нагревом лицевой поверхности до соответствующей температуры технологического процесса, подтверждены результатами моделирования в программном комплексе ANSYS и сопоставимы с размерными отклонениями панели в ходе проведения доводочной технологической операции. Отклонения расчетных и действительных значений не превышают, в целом, 10%.

Ключевые слова: плоская задача, многослойная полоса, термонапряженное состояние, итерации, метод Сен-Венана–Пикара–Банаха

Для цитирования: Хоа В.Д., Миронова Л.И. Оценка эффективности применения одного аналитического решения задачи теории упругости в исследовании термонапряженного состояния тонкостенной конструкции из слоистого материала // Труды МАИ. 2025. № 140. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=184054>

Original article

EFFICIENCY EVALUATION OF ONE ANALYTICAL SOLUTION OF THE ELASTICITY THEORY PROBLEM IN THE STUDY OF THERMAL STRESS STATE OF A THIN-WALLED STRUCTURE MADE OF LAYERED MATERIAL

Hoа Van D.¹, Lyubov I. Mironova²

^{1,2}Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

¹dong.hoavan@yandex.ru

²mironova_lub@mail.ru ✉

Abstract. The results of study of thermal stress state of a real thin-walled clad structure experiencing temperature effects during the finishing technological operation of manufacturing are presented. A two-layer narrow strip of great length, rigidly fixed along the long side, was adopted as the calculation model. The response of a thin rectangular strip to the effect of temperature field was considered in the formulation of elasticity theory plane problem. The iterative-asymptotic Saint-Venant–Picard–Banach method was adopted as the research method, development of which has currently expanded the boundaries of its applicability in solving elasticity problems. Method includes operating with a small thin-wall parameter. The main results obtained relate to solving mechanics problems, where the models are a narrow strip, a plate and a shell. The proposed mathematical apparatus is used in studying the stress-strain state of thin-walled isotropic and anisotropic bodies. The analytical solution in the final form is found on the relations of lower dimension for new main unknowns of the problem. The transition to them is carried out through the reconstruction of the original system of equations to the form of the operator of the method of simple iterations. Its action is approximate expressions of stress-strain state components through a smaller number of unknowns - functions of lower dimension. The appearance of the latter is not associated with the introduction of hypotheses, but is a consequence of the form of operator containing integration arbitrariness (these functions). Reolving relations for them are found by fulfilling the

boundary conditions by approximate expressions of the components of the stress-strain state. The equations can be solved analytically, including with the involvement of the apparatus of asymptotics. The purpose of the work was to evaluate the efficiency of using the analytical solution obtained on the basis of this method in substantiating the strength of real technical structures using the example of a membrane panel of incinerator furnace. The obtained calculated values of temperature deformations caused by heating the front surface to the corresponding temperature of the technological process are confirmed by the results of modeling in ANSYS software package and are comparable with the dimensional deviations of the panel during the finishing technological operation. Relative deviations of the calculated and actual values do not exceed, in general, 10%.

Keywords: plane problem, multilayer strip, thermally stressed state, iterations, Saint-Venant–Picard–Banach method

For citation: Hoa V.D., Mironova L.I. Efficiency evaluation of one analytical solution of the elasticity theory problem in the study of thermal stress state of a thin-walled structure made of layered material. *Trudy MAI*. 2025. No. 140. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/.published.php?ID=184054>

Важной задачей в исследовании прочности и обеспечения надежности конструкций ответственного назначения является разработка математического аппарата и расчетных моделей, адекватно формализующих эксплуатационные условия работы изделий, а также технологические воздействия в процессе их производства. Особенностью построения таких моделей связано, прежде всего, с многофакторностью точного описания исследуемой области [1]. Вследствие этого

постановка и решение многих задач ограничены допущениями, принятыми в рамках априорных гипотез, что существенно снижает границы применимости теоретических и прикладных методов механики.

Известно, что обоснование прочности и надежности технических конструкций, проводится, как правило, на базе развитого математического аппарата теорий упругости, пластичности, ползучести и требует решения дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков [2, 3]. Классические решения задач такого класса построены на применении известных механизмов преобразований, замены переменных и упрощающих гипотез [4-8], к которым относятся допущения различного характера, осреднения параметров и пр. Последние приводят к понижению порядков вычислительных систем, а также размерности моделей [9]. Многие исследователи отмечают при этом снижение информативности и точности полученных результатов.

Примечателен подход специалистов, стремящихся к построению расчетных моделей с уменьшением числа принятых допущений (или вовсе без них) и получению аналитических решений в задачах механики. Такой подход реализован Е.М. Зверяевым в развитии итерационно-асимптотического метода, названного в литературе методом Сен-Венана–Пикара–Банаха.

Метод в достаточной степени изложен в работах [10-14]. Метод включает оперирование малым параметром тонкостенности. Основные результаты, полученные с его помощью, относятся к решению задач механики, где моделями являются узкая полоса, пластинка и оболочка. Предложенный математический

аппарат используется в изучении напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных изотропных и анизотропных тел.

Аналитическое решение в конечном виде находится на соотношениях меньшей размерности для новых основных неизвестных задачи. Переход к ним выполняется через перестройку исходной системы уравнений к виду оператора метода простых итераций. Его действием являются приближенные выражения компонент НДС через меньшее количество неизвестных – функций меньшей размерности. Появление последних не связано с введением гипотез, а является следствием формы оператора, содержащей произволы интегрирования (т.е. эти функции). Разрешающие соотношения для них находятся путем выполнения граничных условий приближенными соотношениями компонент НДС. Уравнения удается решить аналитически, в том числе с привлечением аппарата асимптотик.

В работах [15-17] изложена методика сведения исходной системы дифференциальных уравнений упругости и термоупругости к итерационной последовательности интегральных уравнений типа Пикара относительно поперечной координаты с асимптотическими оценками всех неизвестных в плоской и пространственной постановке задачи. Конечной целью предложенных расчетных моделей является получение аналитического решения определения компонент напряжений для полосы и пластины. Данные объекты могут использоваться в качестве моделей в изучении реальных тонкостенных конструкций из композиционных и слоистых материалов, испытывающих механические и температурные воздействия.

Следует отметить, что композиционные и слоистые материалы относятся к перспективным конструкционным материалам, широко применяемым в авиационной и другой машиностроительной технике. Методы и подходы в определении НДС конструкций из таких материалов разнообразны, например, описание которых приведено в работах [18-21]. Выбор тех или иных методов исследования требует оценки эффективности применения предлагаемых решений к исследованию реальных технических конструкций.

Целью данной работы является апробирование предложенных расчетных моделей, построенных на базе развитого метода Сен-Венана–Пикара–Банаха, в исследовании термонапряженного состояния технических конструкций из материалов с функционально изменяемым составом и сравнении полученных результатов на конкретном примере лакированной панели, испытывающей температурное воздействие.

Материалы с функционально изменяемым составом характеризуются многослойной структурой, где каждый слой, например, меняющийся от хрупкой керамики до пластичного металла, выполняет заранее заданную функцию. Наружные слои такой структуры способны противостоять нагреву до высокой температуры и воздействию окислительной среды, а внутренние слои – интенсивно охлаждаться [22, 23].

Во многих технических конструкциях имеются металлические детали, поверхности которых наплавлены специальными материалами для создания слоя, обладающего требуемым комплексом свойств, к примеру, повышенной износостойкостью, теплостойкостью, стойкостью к воздействиям агрессивной среды

и пр. Такие многослойные детали получают, как правило, либо методами сварки, либо другими способами [24].

В настоящее время технологии наплавки методом сварки хорошо разработаны. Однако, изготовленные детали таким способом в окончательном виде подвержены значительному короблению. Нарушение правильности геометрической формы отдельных наплавленных узлов затрудняет сборку всей конструкции, что требует проведения дополнительной операции правки, которая может выполняться как с нагревом исправляемого узла конструкции, так и без дополнительного нагрева путем механического воздействия на холодный металл.

В случае правки изделия посредством его нагрева до некоторой температуры, помимо снятия сварочных деформаций и напряжений, в деталях образуются «свои» температурные деформации, назовем их вторичными. Их оценку проведем на примере мембранной панели печи мусоросжигательной установки, используемой в утилизации бытовых отходов [25].

Исходные данные задачи. Панель имеет сложную тонкостенную геометрическую форму большой протяженности размером L с равной толщиной стенки, рис. 1. Такую конструкцию выполняют сваркой с последующей наплавкой ее лицевых поверхностей. В качестве основного металла используют малоуглеродистую сталь, в качестве наплавки – легированные хромоникелевые сплавы. Образованный защитный слой является жаропрочным и коррозионностойким к воздействиям среды.

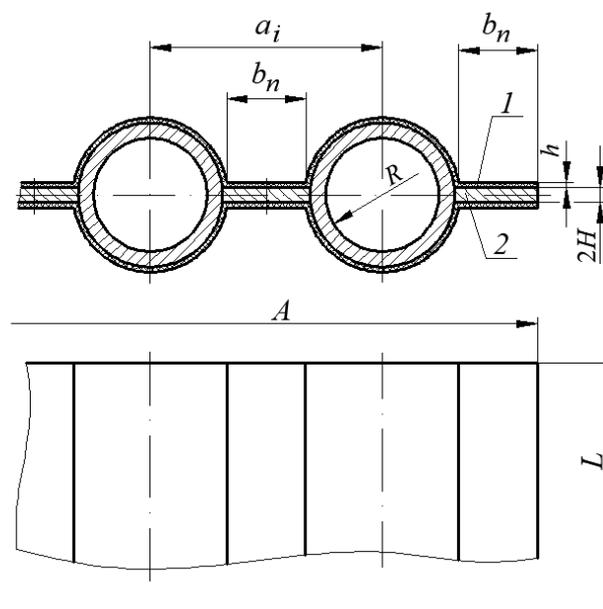


Рис. 1. Панель мембранная: 1 – наплавленный слой; 2 – основной металл

В процессе наплавки и последующего охлаждения наибольшей деформации подвергается свободный край панели, что при сборке оборудования доставляет значительные неудобства. Правку свободного края панели осуществляют нагревом до температуры, значение которой не превышает 280°C .

Для оценки температурных деформаций принимаем модель в виде двухслойной полосы, рассматривая ее в продольном сечении, проходящем через плоскость симметрии основного металла. Расчетная схема и условия закрепления приведены на рис. 2.

При этом считаем, что равномерно нагревается только поверхностный слой панели до температуры 250°C . Такие условия могут быть обеспечены токами высокой частоты (ТВЧ).

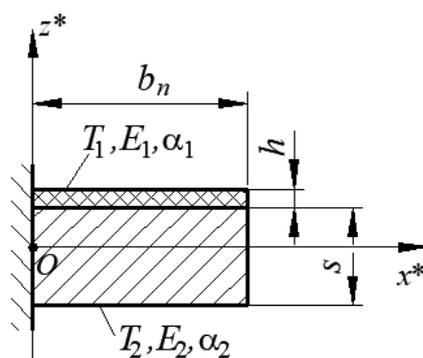


Рис. 2. Расчетная модель: h – толщина наплавки; s – толщина основного металла; b_n – ширина и длина панели; T_1 – температура нагрева верхней лицевой поверхности панели; T_2 – начальная температура нижней лицевой поверхности; $E_1, E_2, \alpha_1, \alpha_2$ – модуль упругости, коэффициент температурного расширения слоя наплавки и основного металла соответственно; x^* и z^* – продольная и поперечная координаты

Основные соотношения и ход решения задачи для упругой полосы под действием температурного поля, в том числе для слоистой полосы со слоями различной толщины, изложены в работах [14, 15]. Исходные данные задачи: $h = 3 \cdot 10^{-3}$ м; $s = 6 \cdot 10^{-3}$ м; $b_n = 3 \cdot 10^{-2}$ м; $L = 6$ м; $T_1 = 250^\circ\text{C}$; $T_2 = 21^\circ\text{C}$; $E_1 = 2,0 \cdot 10^6$ МПа; $E_2 = 2,0 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$; $\alpha_1 = 14,8 \cdot 10^{-6}$ 1/град; $\alpha_2 = 11,3 \cdot 10^{-6}$ 1/град. Начальная температура, при которой отсутствует деформация, – принимается 21°C . Значения физико-механических характеристик взяты осредненными [26]. Расположение слоев в прямоугольной системе координат x^*Oz^* соответствует рис. 2, так, что $0 \leq x^* \leq b_n$, $-(h+s)/2 \leq z^* \leq +(h+s)/2$, и ось абсцисс проходит через плоскость симметрии $(h+s)/2$.

Безразмерные координаты обозначим через x и z , соблюдая соотношения

$$x = \frac{x^*}{b_n}, \quad z = \frac{z^*}{(h+s)/2}. \quad (1)$$

Принимаем линейный закон распределения температуры по толщине пластины в виде

$$\alpha T = \begin{cases} \frac{\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2}{z_1 - 1} z + \frac{\alpha_2 t_2 z_1 - \alpha_1 t_1}{z_1 - 1}, & \text{при } z \geq z_1 \\ \frac{\alpha_1 t_1}{z_1 + 1} (z + 1), & \text{при } z < z_1 \end{cases}, \quad t_1 = \text{const}; \quad t_2 = \text{const}; \quad (2)$$

$$t_1 = T_{z_1} - T_0, \quad t_2 = T_1 - T_{z_1}. \quad (3)$$

Здесь нижние индексы «1» и «2» присвоены первому и второму слоям.

Внешняя поверхностная нагрузка X, Z отсутствует

$$Z_+ = Z_- = X_+ = X_- = 0, \quad (4)$$

где нижние индексы «+» и «-» соответствуют параметрам верхней и нижней лицевых поверхностей панели.

Удовлетворяя граничным условиям по торцам полосы, свободной от нагрузки, запишем следующие соотношения в безразмерных параметрах

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad w = 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \sigma_x &= 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } x = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Следуя работе [12], в качестве величин начального приближения выберем $w_{(0)} = w_0(x)$, $\tau_{(0)} = \tau_0(x)$. Все остальные параметры НДС вычислим последовательно, как функции от новых неизвестных – $u_0, w_0, \tau_0, \sigma_{z_0}$. Решениями для новых неизвестных будут соотношения

$$\begin{aligned} w_0(x) &= -\varepsilon^{-2} \frac{\alpha_1 t_1}{z_1 + 1} \frac{x^2}{2}; \quad \tau_0(x) = -\frac{E_1}{k(\nu + 1)^2} \frac{\alpha_1 t_1}{z_1 + 1} \exp\left(-\frac{k}{e} x\right); \\ u_0(x) &= \varepsilon^{-1} \frac{\alpha_1 t_1}{z_1 + 1} x; \quad \sigma_{z_0}(x) = 0; \quad k^2 = \frac{6}{2 + \nu}. \end{aligned} \quad (6)$$

При $z \leq z_1$

$$u_{(0)} = -\varepsilon w_0' z + 2(1+\nu)\tau_0 \frac{z}{E_1} + u_0; \quad \varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 w_0'' z + 2(1+\nu)\varepsilon\tau_0' \frac{z}{E_1} + \varepsilon u_0';$$

$$\sigma_{z(0)} = -\varepsilon\tau_0' z; \quad \sigma_{x(0)} = -E_1 \varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon\tau_0' (2+\nu)z + E_1 \varepsilon u_0' - E_1 \frac{\alpha_1 t_1}{z_1 + 1} (z+1);$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \nu \varepsilon^2 w_0'' z - \varepsilon\tau_0' \frac{(1+\nu)^2}{E_1} z - \nu \varepsilon u_0' + (1+\nu) \frac{\alpha_1 t_1}{z_1 + 1} (z+1);$$

$$w_{(1)} = \varepsilon^2 w_0'' \nu \frac{z^2}{2} - \varepsilon\tau_0' \frac{(1+\nu)^2}{E_1} \frac{z^2}{2} - \varepsilon \nu u_0' z + (1+\nu) \frac{\alpha_1 t_1}{z_1 + 1} \left(\frac{z^2}{2} + z \right) + w_0;$$

$$\tau_{(1)} = \tau_0 - \varepsilon^2 \tau_0'' (2+\nu) \frac{z^2}{2}; \quad \sigma_{z(1)} = \varepsilon^3 \tau_0''' (2+\nu) \frac{z^3}{6} - \varepsilon\tau_0' z. \quad (7)$$

При $1 \geq z \geq z_1$

$$u_{(0)} = -\varepsilon w_0' z + 2(1+\nu)\tau_0 \left(\frac{z_1}{E_1} + \frac{z-z_1}{E_2} \right) + u_0; \quad \varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 w_0'' z + 2(1+\nu)\varepsilon\tau_0' \left(\frac{z_1}{E_1} + \frac{z-z_1}{E_2} \right) + \varepsilon u_0';$$

$$\sigma_{z(0)} = -\varepsilon\tau_0' z;$$

$$\sigma_{x(0)} = -E_2 \varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon\tau_0' \left[2(1+\nu)E_2 \left(\frac{z_1}{E_1} + \frac{z-z_1}{E_2} \right) - \nu z \right] +$$

$$+ E_2 \varepsilon u_0' - \frac{E_2}{z_1 - 1} [(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2)z + \alpha_2 t_2 z_1 - \alpha_1 t_1];$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \nu \varepsilon^2 w_0'' z - \varepsilon\tau_0' \left[2(1+\nu)\nu \left(\frac{z_1}{E_1} + \frac{z-z_1}{E_2} \right) + \frac{1-\nu^2}{E_2} z \right] -$$

$$- \nu \varepsilon u_0' + (1+\nu) \frac{(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2)z + \alpha_2 t_2 z_1 - \alpha_1 t_1}{z_1 - 1};$$

$$w_{(1)} = \varepsilon^2 w_0'' \nu \frac{z^2}{2} - \varepsilon\tau_0' (1+\nu)^2 \left(\frac{z_1^2}{E_1} + \frac{z^2 - z_1^2}{E_2} \right) -$$

$$-\varepsilon u_0' v z + (1 + \nu) \frac{(\alpha_1 t_1 - \alpha_2 t_2) \frac{z^2}{2} + (\alpha_2 t_2 z_1 - \alpha_1 t_1) z}{z_1 - 1} + w_0;$$

$$\tau_{(i)} = \tau_0 - \varepsilon^2 \tau_0'' (2 + \nu) \frac{z^2}{2}; \quad \sigma_{z(i)} = \varepsilon^3 \tau_0''' (2 + \nu) \frac{z^3}{6} - \varepsilon \tau_0' z. \quad (8)$$

В выражениях (6)-(8) приняты следующие обозначения: u , w – продольные и поперечные перемещения; ε – параметр тонкостенности, $\varepsilon = (h+s) / L$; ε_x , ε_z – линейные деформации; σ_x , σ_z , τ – нормальные и касательные напряжения; ν – коэффициент Пуассона. Индекс в скобках указывает порядковый номер итерации.

Вычисления по формулам (1)-(8) проводились в программном комплексе JupyterLab, по результатам которых были построены графики. Некоторые из них приведены ниже. Расчетные результаты сравнивались с численными решениями задачи, полученными методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS.

Следует отметить, что при решении задачи температура нижней лицевой поверхности принималась равной 21°C намеренно, с целью определения максимального значения температурной деформации. В действительности в условиях естественного охлаждения нижней поверхности (на воздухе) величина коробления будет значительно меньше в силу меньшего температурного градиента.

Распределение температуры по толщине пластины относительно безразмерной координаты z показано на рис. 3.

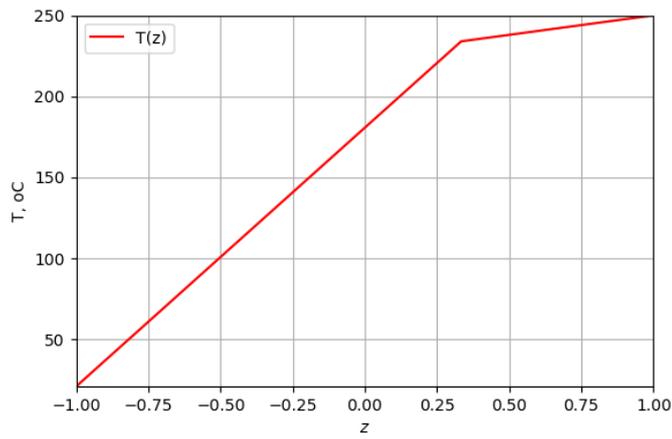


Рис. 3. Распределение температуры ($^{\circ}\text{C}$) по безразмерной толщине полосы

Графики распределения продольных и поперечных деформаций пластины в абсолютных величинах приведены на рис. 4, 5.

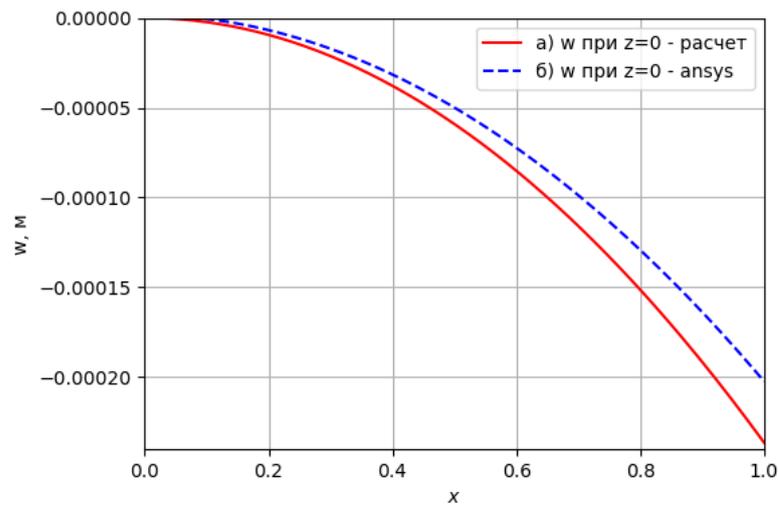


Рис. 4. Поперечные перемещения [м] при $z=0$: (а) – аналитическое решение; (б) – численное решение

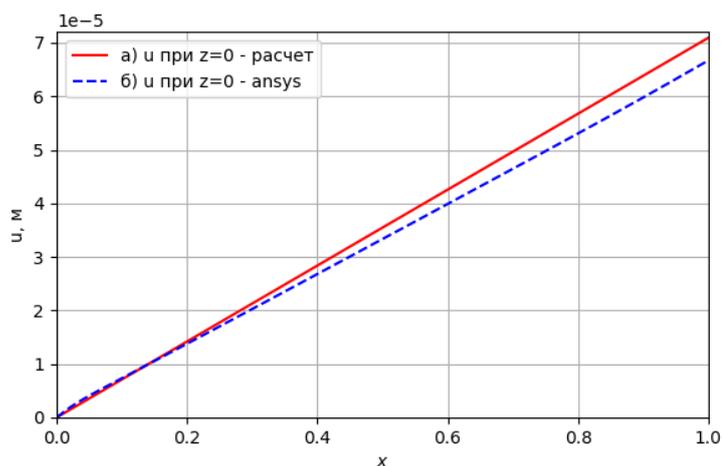


Рис. 5. Продольные перемещения [м] при $z=0$: (а) – аналитическое решение;
(б) – численное решение

Полученные расчетные значения показали следующее. Прогиб на конце панели в поперечном сечении составил 0,02 мм, в продольном направлении удлинение полосы составило 0,007 мм, что соответствует реальной картине коробления лакированной панели в процессе проведения доводочной операции. Отклонения размеров не превышают допусковых предельных отклонений чертежа.

Сопоставимость результатов приведенных решений с действительной картиной прогиба лакированной панели позволяет сделать вывод о том, метод Сен-Венана – Пикара – Банаха, изложенный в работах [15-17], может быть успешно применен в оценке НДС изделий из слоистых материалов. Предложенные математические модели расширяют область практического применения данного метода, и могут быть использованы не только в обосновании прочности и надежности ответственных конструкций, но и в конструкторско-технологическом

обеспечении машиностроительного производства при выборе рациональных режимов технологии изготовления.

Список источников

1. Шарунов А.В. Численное моделирование процесса предварительного деформирования толстостенной муфты из сплава с памятью формы // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178461>
2. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. – М–Л.: ОГИЗ, 1947. – 304 с.
3. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
4. Георгиевский Д.В. Течение Сен-Венана в тонком слое, подверженном пластическому сжатию // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 4. С. 104–115.
5. Анисимов С.А. Численный анализ устойчивости при осевом сжатии вафельных цилиндрических оболочек из алюминиевых сплавов // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178880>
6. Сазанов В.П., Павлов В.Ф., Письмаров А.В., Матвеева К.Ф. Влияние соотношений компонентов первоначальных деформаций на распределение остаточных напряжений в упрочнённом слое детали // Труды МАИ. 2023. № 132. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=176843>

7. Vasilev V.V. Kirchhoff and Thomson – Tait transformations in the classical theory of plates // *Mechanics of Solids*. 2012. No. 47. P. 571–579. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654412050111>
8. Бобылев А.А. Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругого слоя // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2023. № 2. С. 70–89.
9. Зверяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // *Прикладная математика и механика*. 2003. Т. 67, № 3. С. 472–481.
10. Зверяев Е.М. Метод Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83, № 5–6. С. 823–833.
11. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2014. № 95. 29 с. DOI: [10.13140/RG.2.2.21968.00000](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.21968.00000)
12. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // *Труды МАИ*. 2015. № 79. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=55762>
13. Зверяев Е.М. Метод Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений в частных производных с малым параметром // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2018. № 83. 19 с. DOI: [10.20948/prepr-2018-83](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-83)

14. Зверяев Е.М. Температурная деформация длинной упругой полосы // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22, № 2. С. 293–304.
15. Хоа В.Д., Зверяев Е.М., Пыхтин А.В. Напряженно-деформированное состояние тонкой прямоугольной полосы при температурном воздействии // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178462>
16. Хоа В.Д., Зверяев Е.М. Аналитическое решение для термонапряженной двухслойной упругой полосы // Труды МАИ. 2023. № 133. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177653>.
17. Зверяев Е.М., Пыхтин А.В., Хоа В.Д. Пространственная задача для прямоугольной упругой пластины // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 4. С. 2–11. DOI: [10.37538/0039-2383.2021.4.2.11](https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.4.2.11)
18. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Краевое напряженное состояние круглой пластины переменной толщины при термомеханическом нагружении на основе уточненной теории // Тепловые процессы в технике. 2020. Т. 12, № 1. С. 39–48. URL: <https://doi.org/10.34759/tpt-2020-12-1-39-48>
19. Фирсанов В.В., Фам В.Т, Чан Н.Д. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных композитных сферических оболочек на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2020. № 114. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=118893>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-07](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-07)
20. Milton G.W. The Theory of Composites. Cambridge University Press, 2004.
21. Boikov A., Mironova L., Shishkin S. About One of the Approaches for the Research of the Stress-Strain State of a Flange Connection with a Seal Made of an Alloy with Shape

Memory // Journal Materials Research Proceedings. 2022. V. 21, P. 156-160. URL:
<https://doi.org/10.21741/9781644901755-28>

22. Федик И.И., Миронова Л.И. Оценочные критерии термopочности композиций с функционально изменяемым составом // Материалы XXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Вятчи, 16–20 февраля 2015): сборник трудов. – М.: Изд-во ТРП, 2015. С. 83-84.

23. Ланин А.Г., Федик И.И. Термopочность материалов. – Подольск: Луч, 2005. – 309 с.

24. Сварка и свариваемые материалы. Справочник в трех томах / Под общей ред. В.Н. Волченко. Том I. – М.: Металлургия, 1991. - 528 с.

25. Тугов А.Н. Энергетическая утилизация ТКО: мировой и отечественный опыт (обзор) // Теплоэнергетика. 2022. № 12. С. 5–22.

26. Марочник сталей / Под общей ред. А.С. Зубченко. – М.: Машиностроение, 2003. – 784 с.

References

1. Sharunov A.V. Numerical simulation of the preforming process of a thick-walled coupling made of shape memory alloys. *Trudy MAI*. 2024. No. 134. (In Russ.). URL:
<https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178461>

2. Mikhlin S.G. *Prilozheniya integral'nykh uravnenii k nekotorym problemam mekhaniki, matematicheskoi fiziki i tekhniki* (Applications of integral equations to some problems of

mechanics, mathematical physics and engineering). Moscow–Leningrad: OGIZ Publ., 1947. 304 p.

3. Timoshenko S.P. *Prochnost' i kolebaniya elementov konstruktsii* (Strength and vibrations of structural elements). Moscow: Nauka Publ., 1975. 704 p.

4. Georgievskii D.V. Saint-Venant flow in a thin layer subjected to plastic compression. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 2011. No. 4. P. 104–115. (In Russ.)

5. Anisimov S.A. Numerical analysis of buckling under axial compression of orthogridstiffened cylindrical shells made of aluminum alloys. *Trudy MAI*. 2024. No. 134. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178880>

6. Sazanov V.P., Pavlov V.F., Pis'marov A.V., Matveeva K.F. Influence of the ratio of the components of the initial deformations on the distribution of the residual stresses in the strengthened layer of the part. *Trudy MAI*. 2023. No. 132. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=176843>

7. Vasilev V.V. Kirchhoff and Thomson – Tait transformations in the classical theory of plates. *Mechanics of Solids*. 2012. No. 47. P. 571–579. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654412050111>

8. Bobylev A.A. Algorithm for solving discrete contact problems for an elastic layer. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 2023. No. 2. P. 70–89. (In Russ.)

9. Zveryaev E.M. Analysis of hypotheses used in constructing the theory of beams and slabs. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2003. V. 67, No. 3. P. 472–481. (In Russ.)

10. Zveryaev E.M. Saint-Venant–Picard–Banach method for integrating the equations of elasticity theory for thin-walled systems. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2019. V. 83, No. 5–6. P. 823–833. (In Russ.)

11. Zveryaev E.M., Olekhova L.V. Reduction of three-dimensional equations of the VAT of a composite plate to two-dimensional ones based on the principle of compressed maps. *Preprinty IPM im. M.V.Keldysha*. 2014. No. 95. 29 p. (In Russ.). DOI: [10.13140/RG.2.2.21968.00000](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.21968.00000)
12. Zveryaev E.M., Olekhova L.V. Iterative interpretation of Saint-Venant semi-inverse method for construction of composite material thin-walled structural elements equations. *Trudy MAI*. 2015. No. 79. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=55762>
13. Zveryaev E.M. Metod Sen-Venana–Pikara–Banakha integrirovaniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh s malym parametrom. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*. 2018. No. 83. 19 p. (In Russ.). DOI: [10.20948/prepr-2018-83](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-83)
14. Zveryaev E.M. Thermal deformation of a long elastic strip. *Vestnik Rossiiskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Inzhenernye issledovaniya*. 2021. V. 22, No. 2. P. 293–304. (In Russ.)
15. Hoa V.D., Zveryaev E.M., Pykhtin A.V. Analytical solution for thermally stressed two-layer elastic strip. *Trudy MAI*. 2024. No. 134. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178462>
16. Hoa V.D., Zveryaev E.M. Analytical solution for thermally stressed two-layer elastic strip. *Trudy MAI*. 2023. No. 133. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=177653>
17. Zveryaev E.M., Pykhtin A.V., Hoa V.D. Spatial problem for rectangular elastic plate. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii*. 2021. No. 4. P. 2–11. (In Russ.). DOI: [10.37538/0039-2383.2021.4.2.11](https://doi.org/10.37538/0039-2383.2021.4.2.11)

18. Firsanov V.V., Zoan K.H. Edge stress state of a circular plate of variable thickness under thermo-mechanical loading on the basis of refined theory. *Teplovye protsessy v tekhnike*. 2020. V. 12, No. 1. P. 39–48. (In Russ.). URL: <https://doi.org/10.34759/tpt-2020-12-1-39-48>
19. Firsanov V.V., Fam V.T, Chan N.D. Strain-stress state analysis of multilayer composite spherical shells based on the refined theory. *Trudy MAI*. 2020. No. 114. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118893>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-07](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-07)
20. Milton G.W. *The Theory of Composites*. Cambridge University Press, 2004.
21. Boikov A., Mironova L., Shishkin S. About One of the Approaches for the Research of the Stress-Strain State of a Flange Connection with a Seal Made of an Alloy with Shape Memory. *Journal Materials Research Proceedings*. 2022. V. 21, P. 156-160. URL: <https://doi.org/10.21741/9781644901755-28>
22. Fedik I.I., Mironova L.I. Evaluation criteria of thermal stability of compositions with functionally variable composition. *Materialy XXI Mezhdunarodnogo simpoziuma «Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksii i sploshnykh sred» im. A.G. Gorshkova*, Vyatichi, February 2015. Moscow: Izd-vo TRP Publ., 2015. P. 83-84.
23. Lanin A.G., Fedik I.I. *Termoprochnost' materialov* (Thermal strength of materials). Podol'sk: Luch Publ., 2005. 309 p.
24. Volchenko V.N. *Svarka i svarivaemye materialy. Spravochnik v trekh tomakh* (Welding and materials to be welded. Handbook in three volumes). V. I. Moscow: Metallurgiya Publ., 1991. 528 p.

25. Tugov A.N. Municipal solid wastes-to-energy conversion: global and domestic experience (review). *Теплоэнергетика*. 2022. No. 12. P. 5–22. (In Russ.)

26. Zubchenko A.S. *Marochnik stalei* (Vintage of steels). Moscow: Mashinostroenie Publ., 2003. 784 p.

Статья поступила в редакцию 23.11.2024

Одобрена после рецензирования 28.11.2024

Принята к публикации 25.02.2025

The article was submitted on 23.11.2024; approved after reviewing on 28.11.2024; accepted for publication on 25.02.2025