УДК 531.36: 534.1

Ограниченное управление движениями двухмассового маятника

Безгласный С.П.*, Краснов М.В., Мухаметзянова А.А.*****

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, СГАУ, Московское шоссе 34, Самара, 443086, Россия

**e-mail: bezglasnsp@rambler.ru*

***e-mail: maxasgard@mail.ru*

****e-mail: Alain.20@mail.ru*

Аннотация

Рассматривается задача об ограниченном управлении плоскими движениями двухмассового параметрического маятника. Маятник моделируются двумя одинаковыми невесомыми стержнями с двумя равными точечными массами, двигающимися по окружности вокруг точки закрепления. Управление реализуется путем непрерывного изменения угла между стержнями и является функцией, зависящей от движения центра масс маятника. Предложены законы управления раскачкой и успокоением маятника в окрестности нижнего положения равновесия при предположении об ограничениях на перемещения центра масс маятника. Построены функции Ляпунова, доказывающие асимптотическую устойчивость и неустойчивость нижнего положения маятника в случаях его успокоения и раскачки

соответственно. Теоретические результаты проиллюстрированы графическим представлением численных расчетов.

Ключевые слова: двухмассовый маятник, управление, функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость.

Введение

В различных задачах механики плоские движения исследуемых систем и объектов при некоторых упрощениях моделируют математическим маятником. Между тем изучение движений самого плоского маятника обнаруживает много качественных свойств нелинейной системы и вызывает самостоятельный интерес у современных исследователей. Так, например, в работе [1] в задаче о колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании при больших частотах вибраций и малых амплитудах колебаний длины маятника и точки его подвеса получены бифуркационные диаграммы равновесий, исследованы резонансы и показано присутствие стохастической паутины вблизи равновесий. В [2] при помощи КАМ-теории в близком к резонансному случаю проведен анализ периодических и условно-периодических движений системы в задаче о движении двух одинаковых маятников, связанных линейной упругой пружиной, в окрестности их устойчивого вертикального положения равновесия. В работе [3] с помощью метода предельных функций и систем решена задача о стабилизации произвольных программных движений математического маятника в переменном поле силы тяжести при наличии неучтенных воздействий с помощью релейного управления. Задачи о построении асимптотически устойчивых заданных маятниковых движений волчка Лагранжа на подвижной платформе и руки робота-манипулятора, моделируемой двустепенным маятником переменной длины, решены в работах [4, 5] соответственно.

Одной из классических задач механики о маятниковых движениях является задача об управлении качелями. Встречаются две основные модели качелей – одномассовый и двухмассовый маятники. Для одномассовой модели в виде плоского математического маятника переменной длины авторами в ряде работ, например [6–8], аналитически и численно исследовались вопросы устойчивости и неустойчивости верхнего и нижнего положений, влияния сил (сухого, вязкого трений и аэродинамического сопротивления), выбора оптимальных режимов раскачки, гашения колебаний и возникновения резонансов. Двухмассовым маятником качели моделируются в работах [9–14]. В [9] методами усреднения и принципа максимума решены задачи управления и оптимизации для случаев малых колебаний и быстрых вращений путем регулируемой по скорости длиной маятника. В работе [10] построены процессы оптимальных раскачки и торможения качелей релейным и «релейно-непрерывным» управлением длиной подвеса подвижной массы для случаев движения без трения и с наличием разных видов трения.

В отличие от большинства указанных выше работ, в которых решались задачи об управлении качелями с помощью скачкообразного (релейного) изменения величины перемещения подвижной массы, невозможного для практической реализации в силу инертности масс, авторами работы [11] был предложен непрерывный закон движения подвижной массы, позволяющий раскачивать и тормозить качели. В [12] решены задачи о диаметральной переориентации и гравитационной стабилизации плоских движений спутника на круговой орбите с помощью подвижной массы по принципу качелей. Но управляющий закон, предложенный в этих работах, предполагает неограниченность расстояния от точки подвеса до подвижной массы в обе стороны, в частности, в [11] авторами приведен численный пример, в котором теоретически считается, что стержень продлен вверх за точку подвеса маятника с предоставленной возможностью движения по нему подвижной массы. На практике реализация таких движений затруднительна. В работах [13, 14] были предложены новые законы управлением подвижной массой по принципу качелей, которые предполагают ограниченность относительного перемещения этой массы вдоль стержня.

В данной работе рассматривается модель параметрического маятника, представляющего собой совокупность двух симметрично отклоненных от оси симметрии одинаковых по длине и массе маятников, с возможностью управлять величиной угла между ними. Предложены законы управления этим углом, позволяющие раскачивать и гасить колебания рассматриваемой модели по принципу качелей. Предполагается ограниченность с двух сторон перемещений центра масс маятника. Ограниченность и непрерывность закона управления позволяют на основе классической теории устойчивости аналитически доказать асимптотическую устойчивость и неустойчивость различных движений маятника путем построения соответствующих функций Ляпунова и предоставляют более удобные возможности для его практической реализации. С помощью численного моделирования движений рассматриваемой системы графически иллюстрируется асимптотическая устойчивость полученных решений.

1 Постановка задачи

Рассмотрим параметрический двухмассовый маятник, состоящий из двух равных точечных масс m, неподвижно закрепленных на концах двух невесомых стержней одинаковой длины b (Рис.1). Свободные концы стержней шарнирно закреплены в неподвижной точке O. Угол между стержнями обозначим 2ψ, тогда на пересечении его биссектрисы с отрезком, соединяющим обе точечные массы, будет находиться центр масс маятника. Расстояние от точки O до центра масс обозначим l.

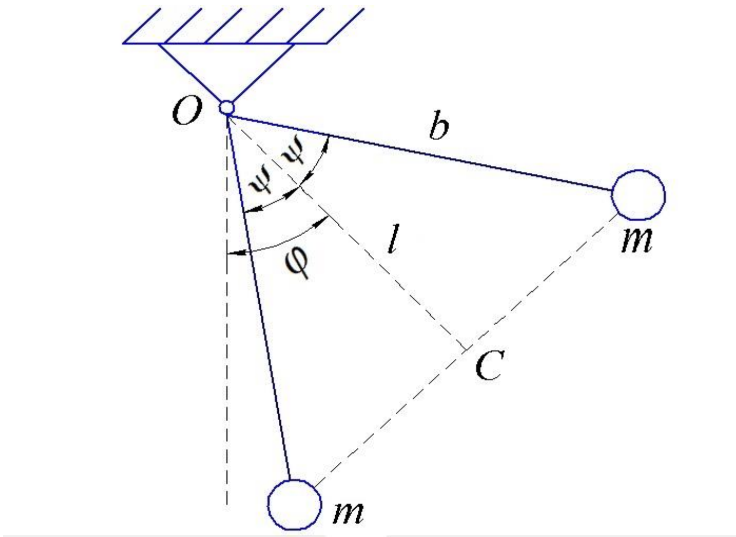

Рис. 1. Двухмассовый маятник

За обобщенную переменную, описывающую движение маятника, примем величину угла φ между биссектрисой и вертикалью. Движения маятника происходят в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Управлением будем считать величину угла $\psi = \psi(\varphi, \dot{\varphi})$, являющуюся непрерывной функцией вектора фазового состояния маятника, где точка обозначает производную по времени.

Кинетическая и потенциальная энергии маятника имеют вид:

$$T = mb^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2),$$

$$\Pi = -2mgb\cos\varphi\cos\psi.$$

Записав лагранжиан рассматриваемой системы

$$L = T - \Pi = mb^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) + 2mgb\cos\varphi\cos\psi,$$

имеем уравнение движения маятника в виде уравнения Лагранжа второго рода:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{b}\sin\varphi\cos\psi = 0, \tag{1}$$

где g – ускорение сил тяготения.

Поставим и решим следующие задачи управления плоскими движениями параметрического маятника – построить непрерывные законы управления величиной угла ψ, реализующие раскачку и асимптотическое успокоение колебаний соответственно в окрестности нижнего положения равновесия. Решать задачу будем в предположении, что движения центра масс маятника вдоль биссектрисы угла 2ψ ограничены с двух сторон.

2 Управление затухающими движениями маятника

Решение задачи об асимптотическом успокоении колебаний двухмассового маятника относительно его нижнего положения равновесия получим на основе второго метода классической теории устойчивости. Выберем управляющий закон в виде:

$$\psi = \begin{cases} \arccos\dfrac{l_0 + a\dot{\varphi}\sin\varphi}{b}, \quad \text{при} \quad -c < a\dot{\varphi}\sin\varphi < c; \\ \arccos\dfrac{l_0 + c\cdot sign(\sin\varphi)\cdot sign\dot{\varphi}}{b}, \text{ при } a\dot{\varphi}\sin\varphi \le -c \;\cup\; A\dot{\varphi}\sin\varphi \ge c, \end{cases} \tag{2}$$

где величина $l_0 = const > 0$ задает некоторое положение стержней маятника, соответствующее его нижнему положению равновесия, число a удовлетворяет условию $0 < a = const < l_0$.

Подставив (2) в уравнение (1), получим:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \dfrac{(l_0 + a\dot{\varphi}\sin\varphi)g}{b^2}\sin\varphi = 0, \quad при \quad -c < a\dot{\varphi}\sin\varphi < c; \\ \ddot{\varphi} + \dfrac{g(l_0 + c\cdot sign(\sin\varphi)\cdot sign\dot{\varphi})}{b^2}\sin\varphi = 0, \quad при \;\; a\dot{\varphi}\sin\varphi \le -c \;\bigcup A\dot{\varphi}\sin\varphi \ge c. \end{cases} \tag{3}$$

Для доказательства асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3) выберем функцию Ляпунова $V = V(\varphi, \dot{\varphi})$ в виде:

$$V = \dot{\varphi}^2(1 + k\varphi\dot{\varphi}) + \frac{2gl_0}{b^2}(1 - \cos\varphi) \tag{4}$$

Эта функция $V(\varphi,\dot{\varphi})$ при любых значениях коэффициента k в окрестности нижнего положения равновесия $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ является положительно определенной и допускает бесконечно малый высший предел по переменным $\varphi,\ \dot{\varphi}$. Оценим полную производную этой функции по времени в силу уравнения (3):

$$\dot{V} = -\frac{g}{b^2}\left(l_0 + a\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\sin\varphi\left(2\dot{\varphi} + 3k\varphi\dot{\varphi}^2\right) + k\dot{\varphi}^4 + \frac{2gl_0}{b^2}\dot{\varphi}\sin\varphi. \tag{5}$$

Разложив в правой части равенства (5) функцию $\sin\varphi$ в ряд, выполнив элементарные преобразования и отбросив слагаемые старше четвертой степени по переменным $\varphi,\ \dot{\varphi}$, получим, что в окрестности положения $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ производная (4) с точностью до слагаемых четвертого порядка малости представима выражением:

$$\dot{V} \approx k\dot{\varphi}^4 + \varphi^2 x\dot{\varphi}^2\left(-\frac{3kgl_0 + 2ag}{b^2}\right).$$

При выборе коэффициента k согласно условиям:

$$-\frac{2a}{3l_0} < k < 0,$$

например, выберем

$$k = -\frac{a}{3l_0},$$

будем иметь оценку производной функции Ляпунова $\dot{V}$ в виде:

$$\dot{V} \approx -\frac{a}{3l_0}\dot{\varphi}^4 - \frac{ag}{b^2}\dot{\varphi}^2\varphi^2 \le -\frac{a}{3l_0}\dot{\varphi}^4.$$

Таким образом, функция $\dot{V}$ будет отрицательно определенной по скорости $\dot{\varphi}$ функцией. Множество $\{\dot{\varphi} = 0\}$ не содержит решений системы (3), кроме $\varphi = 0$. На основе теоремы Барбошина-Красовского [15] имеем асимптотическую устойчивость нижнего положения равновесия $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ маятника.

Проведенные численные расчеты подтверждают сделанные выводы об асимптотической устойчивости нижнего положения равновесия $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ маятника и демонстрируют асимптотическое затухание амплитуды колебаний не только в малой окрестности, но и при произвольно больших начальных отклонениях. На рис. 2 изображен график зависимости угла φ от времени, полученный численным интегрированием уравнения движения (3) при следующих значениях параметров системы: $l_0 = 2м,\ a = 1,\ b = 4м,\ \text{c} = 1,\ g = 9{,}81 м/c^2$ и начальных данных: $\varphi(t_0) = 0\, рад,$ $\dot{\varphi}(t_0) = 4\, рад/c.$ Интегрирование проведено на временном промежутке $t \in [0,100]c$.

Из рис. 2 видно, что, начав движение с большой начальной скоростью, маятник сначала совершает два оборота против часовой стрелки вокруг точки подвеса, а потом происходит асимптотическое затухание его колебаний в окрестности точки $\varphi = 4\pi,\ \dot{\varphi} = 0$, которая физически соответствует положению $\varphi = \dot{\varphi} = 0$. Поэтому строго говоря, положение равновесия $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ маятника не является асимптотически устойчивым в целом, тем не менее затухание его колебаний при управлении (2) происходит при любых начальных условиях.

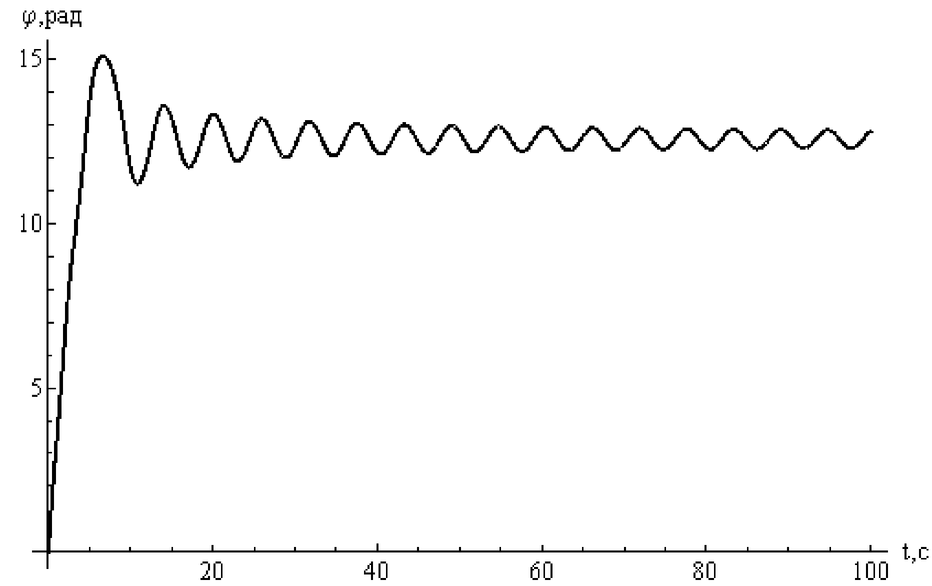

Рис. 2. Зависимость угла φ от времени

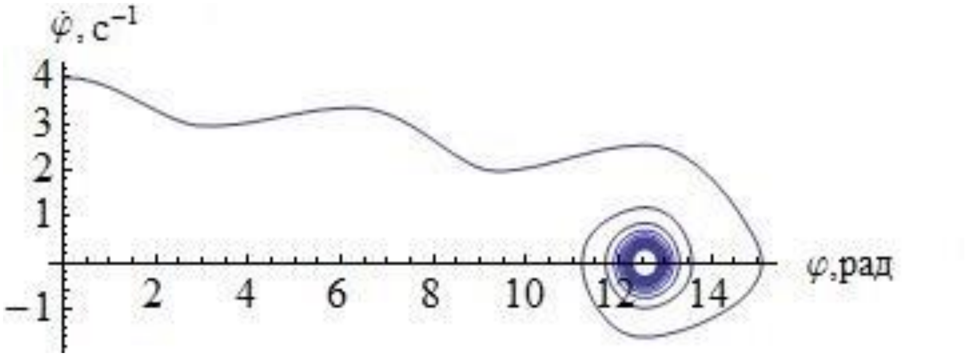

Рис. 3. Фазовый портрет

На рис. 3 изображен фазовый портрет решения уравнения (3) с управлением (2). Фазовая траектория отображает затухание амплитуды и скорости колебаний маятника вокруг нулевого положения равновесия. Графики, представленные на рис. 2 и 3, иллюстрируют очень медленную сходимость решений к нулевому положению равновесия после значений $\varphi = 0.3$ *рад,* что позволяет сделать вывод о слабой эффективности предложенных управлений при малых углах отклонений. Тем не менее, численное интегрирование, проведенное на больших интервалах времени, подтверждает асимптотическую сходимость решений и отсутствие ненулевых предельных циклов.

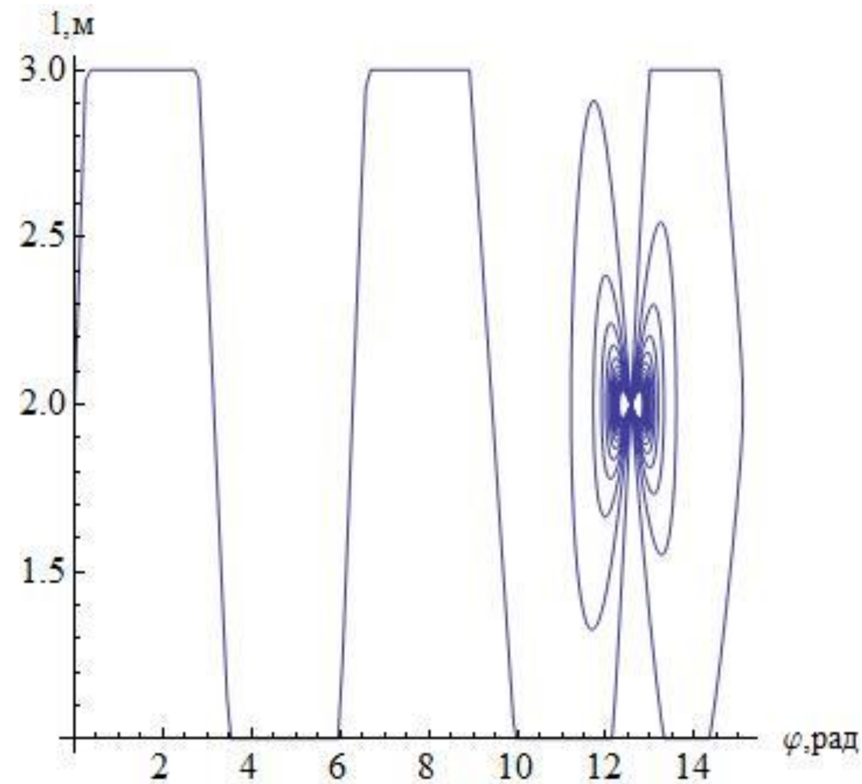

Рис. 4. Зависимость длины подвеса подвижной точки от угла отклонения

Рис. 4 демонстрирует поведение величины расстояния l от точки подвеса до центра масс маятника в зависимости от угла φ. Из него видно, что перемещения центра масс вдоль биссектрисы угла 2ψ происходят в окрестности значения l_0, задаваемой константой $c=1$, как при колебательных, так и при вращательных движениях маятника. Точка C с течением времени асимптотически приближается к положению l_0.

3 Раскачка маятника

Применим аналогичный подход к решению задачи о раскачке маятника из произвольной окрестности нижнего положения равновесия. Заметим, что при нулевых начальных значениях $\varphi(t_0)=\dot{\varphi}(t_0)=0$ система (1) является неуправляемой для всех $t_0<t<\infty$ при любом законе управления вида $\psi=\psi(\varphi,\dot{\varphi})$. Но если выбором этого закона добиться, чтобы положение равновесия $\varphi=\dot{\varphi}=0$ системы было неустойчивым по Ляпунову, то действующие на систему силы (внешние возмущения) выведут ее из положения равновесия, и станет возможным эффективный процесс управления – раскачка.

Выбрав закон управления в виде:

$$\psi=\begin{cases} \arccos\dfrac{l_0-a\dot{\varphi}\sin\varphi}{b}, & \text{\textit{при}}\quad -c<a\dot{\varphi}\sin\varphi<c; \\ \arccos\dfrac{l_0-c\cdot sign(\sin\varphi)\cdot sign\dot{\varphi}}{b}, & \text{\textit{при}}\;\; a\dot{\varphi}\sin\varphi\le -c \,\cup\, a\dot{\varphi}\sin\varphi\ge c. \end{cases} \qquad (6)$$

и подставив (6) в уравнение (1), получим:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \dfrac{(l_0 - a\sin\varphi \cdot \dot{\varphi})g}{b^2}\sin\varphi = 0, \ \textit{при} \quad -c < a\dot{\varphi}\sin\varphi < c; \\ \ddot{\varphi} + \dfrac{(l_0 - c \cdot sign\left(\sin\varphi\right) \cdot sign\dot{\varphi})g}{b^2}\sin\varphi = 0, \ \textit{при} \ \ a\dot{\varphi}\sin\varphi \le -c \ \bigcup A\dot{\varphi}\sin\varphi \ge c. \end{cases} \tag{7}$$

Для доказательства неустойчивости нулевого решения системы (7) воспользуемся положительно определенной функцией Ляпунова (4). Ее полная производная по времени в силу уравнений (7) с точностью до слагаемых четвертого порядка малости включительно по переменным φ, $\dot{\varphi}$ имеет вид:

$$\dot{V} \approx k\dot{\varphi}^4 + \varphi^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{2ag - 3kgl_0}{b^2}\right). \tag{8}$$

При выборе коэффициента k согласно условиям:

$$0 < k < \frac{2a}{3l_0},$$

например, выберем

$$k = \frac{a}{3l_0},$$

будем иметь оценку производной функции Ляпунова $\dot{V}$ в виде:

$$\dot{V} \approx \frac{a}{3l_0}\dot{\varphi}^4 + \frac{ag}{b^2}\dot{\varphi}^2\varphi^2.$$

На основании первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [15] имеем неустойчивость нижнего положения $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ маятника.

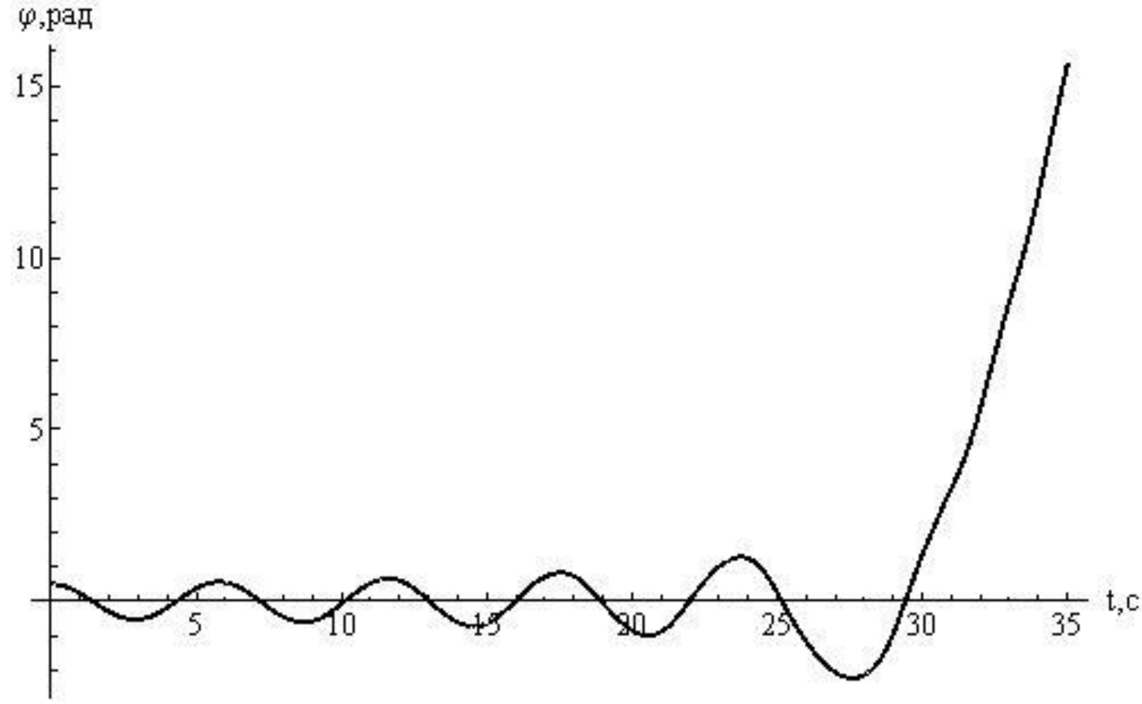

Рис. 5. Зависимость угла φ от времени

На рис. 5 изображен график зависимости угла φ от времени, полученный численным интегрированием уравнения движения (7) при следующих значениях параметров системы: $l_0 = 2м,\ a = 1,\ b = 4м,\ c = 1,\ g = 9{,}81 м/c^2$ и начальных данных: $\varphi(t_0) = 0{,}5\,рад,\quad \dot{\varphi}(t_0) = 0\,рад/c.$ Интегрирование проведено на временном промежутке $t \in [0{,}35]c$.

На рис. 6 изображен соответствующий фазовый портрет. Фазовая траектория отображает нарастание с течением времени амплитуды и скорости колебания двухмассового маятника и переход от колебаний к вращательному движению.

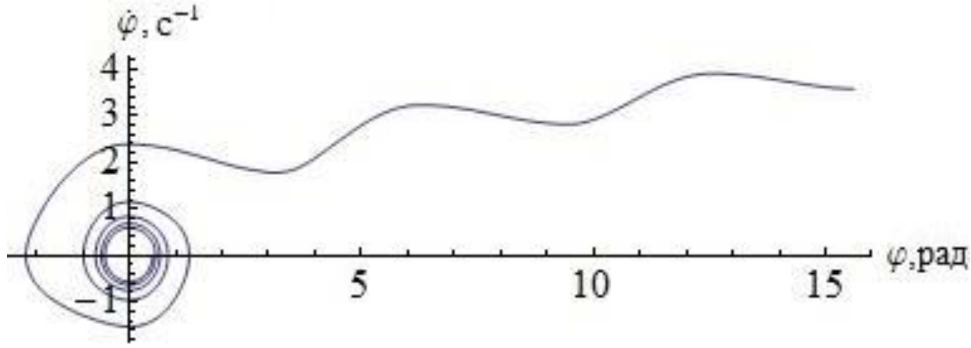

Рис. 6 . Фазовый портрет

Рис. 7 демонстрирует поведение величины расстояния l от точки подвеса до центра масс маятника в зависимости от угла φ. При нарастании отклонений и скоростей и переходе маятника от колебательных к вращательным движениям при управлении (6) величина l остается в окрестности значения l_0, задаваемой константой $c = 1$.

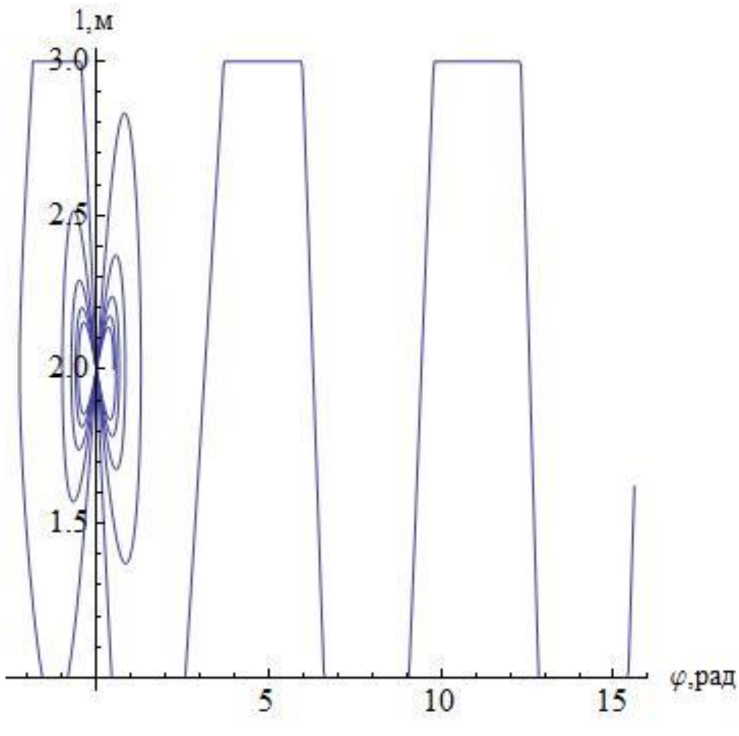

Рис. 7. Зависимость длины подвеса подвижной точки от угла отклонения

Заключение

В работе для задачи параметрического управления плоскими движениями двухмассового маятника предложены законы управления его раскачкой и асимптотическим успокоением путем непрерывного изменения величины угла между стержнями, зависящей от фазового состояния центра масс при ограничениях на его движения. Для предложенных законов управления методом функций Ляпунова доказана асимптотическая устойчивость и неустойчивость соответственно успокоения и раскачки маятника относительно нижнего положения равновесия. Теоретические результаты подтверждены и проиллюстрированы численными расчетами. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании управляемых маятниковых движений различных механических систем.

Представленные результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России №9.540.2014/К.

Библиографический список

1. Красильников П.С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании // Прикладная математика и механика. 2012. Т.76. № 1. С. 36-51.

2. Маркеев А.П. Нелинейные колебания симпатических маятников // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 3. С. 605-622.

3. Андреев А.С. Метод функций Ляпунова в задачах управления // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12. № 4. С. 64-73.

4. Безгласный С.П., Мысина О.А. Стабилизация программных движений твердого тела на подвижной платформе // Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8. №. 4. С.44-52.

5. Безгласный С.П., Батина Е.С., Воробьев А.С. Синтез асимптотически устойчивых движений руки робота-манипулятора. Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. № 4, ч. 1. С. 36-42.

6. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». - Алма-Ата: Наука, 1981. - 253 с.

7. Сейранян А.П. Качели. Параметрический резонанс // Прикладная математика и механика. 2004. Т.68. № 5. С. 847-856.

8. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Устойчивость равновесия маятника переменной длины // Прикладная математика и механика. 2009. Т.73. № 6. С. 893-901.

9. Акуленко Л.Д. Параметрическое управление колебаниями и вращениями физического маятника (качели) // Прикладная математика и механика. 1993. Т.57. № 2. С. 82-91.

10. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Оптимальное управление раскачиванием качелей // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. № 2. С. 92-101.

11. Асланов В.С., Безгласный С.П. Устойчивость и неустойчивость управляемых движений двухмассового маятника переменной длины // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 32-46.

12. Асланов В.С., Безгласный С.П. Гравитационная стабилизация спутника с помощью подвижной массы // Прикладная математика и механика. Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. № 4. С. 565-575.

13. Безгласный С.П., Пиякина Е.Е., Талипова А.А. Ограниченное управление двухмассовым маятником // Автоматизация процессов управления. 2013. Т. 34. № 4.С. 35-41.

14. Безгласный С.П., Батина Е.С., Пиякина Е. Е., Параметрическое управление с ограничением движениями двухмассового маятника // Электронный журнал «Труды МАИ», 2014, № 72: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=47314 (дата публикации 27.01.2014).

15. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. - М.: Наука, 1966. - 530 с.