УДК 539.3

Моментно упругая полуплоскость под действием поверхностных нестационарных нормальных перемещений

Чан Ле Тхай[1*], Тарлаковский Д.В.[1,2]**

[1]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

[1,2]НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Россия

[*]e-mail: tranlethaivvk@gmail.com

[**]e-mail: tdvhome@mail.ru

Аннотация

Рассматривается упругая однородная изотропная полуплоскость, заполненная средой Коссера. В начальный момент времени и на бесконечности возмущения отсутствуют. На границе полуплоскости заданы нестационарные нормальные перемещения. Все компоненты напряженно-деформированного состояния полагаются ограниченными. Разрешающая система уравнений включает в себя три гиперболических уравнений относительно скалярного потенциала, ненулевой компоненты векторного потенциала и вектора поворота. Решение задачи ищется в виде сверток заданного нормального перемещения с соответствующими поверхностными функциями Грина. Для построения последних применяются преобразования Фурье по координате и Лапласа по времени. Оригиналы изображений находятся с помощью совместного обращения преобразований Фурье и Лапласа. Приведены примеры действия различных нестационарных нагрузок на границу полуплоскости.

Ключевые слова: среда Коссера, полуплоскость, поверхностные функции влияния, интегральные преобразования Лапласа и Фурье, совместное обращение преобразований.

Введение

В последнее время отмечается возрастающий интерес к моделям сред, позволяющим учитывать микростроение вещества [1 – 4]. Это вызвано необходимостью детального исследования напряженно-деформированного состояния при проектировании элементов различных современных конструкций, и, в том числе, новых изделий авиационной и ракетной техники.

Одна из моделей, описывающая механическое поведение тел с учетом их микроструктуры – среда Коссера. Общая теория моментной упругости впервые была разработана братьями Коссера (Э. и Ф. Коссера) в 1910 г [5]. В ней в отличие от классической теории упругости, например в [6 – 9], кроме перемещений также учитывается и вектор поворота. Краткие обзоры публикаций по тематике упругих сред с микроструктурой представлены, например, в работах [10 – 17]. Линейная теория среды Коссера рассмотрена в статье [18], а дополнительный учет температурного поля приведен в книге [19]. В статье [20] введена функция напряжений и потенциалы для изотропной центрально-симметричной среды.

Ниже дается решение одной из неисследованных плоских нестационарных задач для полупространства, заполненного средой Коссера. Оно представлено в виде сверток возмущения с ядром – поверхностной функцией влияния. Такая форма позволяет определять напряженно-деформированное состояние полуплоскости при любом поверхностном возмущении. Разработан и реализован алгоритм аналитического построения ядра, основанный на применении метода малого параметра в сочетании с совместным обращением интегральных преобразований Фурье и Лапласа [21].

1. Постановка задачи

Рассматривается задачу полуплоскость, заполненная упругой однородной изотропной средой Коссера, при отсутствии массовых сил и моментов. В прямоугольной декартовой системе координат Oxz (ось Oz направлена вглубь полуплоскости, а Ox - вдоль ее границы $z=0$) движение среды описывается следующими соотношениями [19]:

– уравнения относительно скалярного потенциала φ, ненулевой компоненты ψ векторного потенциала перемещений и угла поворота ω (точками обозначены производные по времени τ)

$$\ddot{\varphi}=\Delta\varphi,\quad \ddot{\psi}=\left(\gamma_1^{-2}+\alpha\right)\Delta\psi+2\alpha\omega,$$
$$\ddot{\omega}=\gamma_2^{-2}\Delta\omega-2\alpha\beta\Delta\psi-4\alpha\beta\omega,\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};\qquad(1)$$

– связи касательного u и нормального w перемещений с потенциалами

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial z},\qquad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial x}.\qquad(2)$$

– связи нетривиальных физических компонент тензоров напряжений $\sigma_{\xi\varsigma}$ и моментов $\mu_{\xi\varsigma}$ $\left(\{\xi,\varsigma\}=\{r,\vartheta,z\}\right)$ с перемещениями

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\kappa\frac{\partial w}{\partial z},\quad \sigma_{yy}=\kappa\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),\quad \sigma_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}+\kappa\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\sigma_{xz}=\left(\gamma_1^{-2}+\alpha\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\left(\gamma_1^{-2}-\alpha\right)\frac{\partial u}{\partial z}+2\alpha\omega,$$
$$\sigma_{zx}=\left(\gamma_1^{-2}+\alpha\right)\frac{\partial u}{\partial z}+\left(\gamma_1^{-2}-\alpha\right)\frac{\partial w}{\partial x}-2\alpha\omega, \tag{3}$$
$$\mu_{xy}=\frac{\partial\omega}{\partial x},\quad \mu_{yx}=\eta\frac{\partial\omega}{\partial x},\quad \mu_{zy}=\frac{\partial\omega}{\partial z},\quad \mu_{yz}=\eta\frac{\partial\omega}{\partial z}.$$

Отметим, что при $\alpha=0$ второе и третье уравнения в (1) становятся независимыми, т.е. поля перемещений и поворотов не связаны между собой.

В соотношениях (1) − (3) использованы такие безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены штрихами, которые в них и далее опущены):

$$u'=\frac{u}{L},\ w'=\frac{w}{L},\ x'=\frac{x}{L},\ z'=\frac{z}{L},\tau=\frac{c_1t}{L},\ \varphi'=\frac{\varphi}{L^2},\ \psi'=\frac{\psi}{L^2},$$
$$\sigma'_{\xi\varsigma}=\frac{\sigma_{\xi\varsigma}}{\lambda+2\mu},\ \mu'_{\xi\varsigma}=\frac{L\mu_{\xi\varsigma}}{\gamma+\varepsilon},\ \gamma_1^2=\frac{c_1^2}{c_2^2},\ \gamma_2^2=\frac{c_1^2}{c_3^2},\ \eta=\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon},\ \ \beta=\frac{\rho L^2}{J}, \tag{4}$$
$$\alpha'=\frac{\alpha}{\lambda+2\mu},\ c_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho},\ c_2^2=\frac{\mu}{\rho},\ c_3^2=\frac{\gamma+\varepsilon}{J},\ \kappa=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}=1-2\gamma_1^{-2}.$$

Здесь t − время; L − некоторый характерный линейный размер; $\lambda,\ \mu$ − упругие постоянные Ламе; $\alpha,\ \beta,\gamma,\ \varepsilon$ − физические параметры моментной среды; ρ − ее плотность; J − мера инерции среды при вращении (плотность момента инерции); c_1, c_2 и c_3 − скорости волн растяжения-сжатия, сдвига и кручения соответственно.

Считаем, что в начальный момент времени среда находится в покое:

$$\varphi\big|_{\tau=0}=\dot\varphi\big|_{\tau=0}=\psi\big|_{\tau=0}=\dot\psi\big|_{\tau=0}=\omega\big|_{\tau=0}=\dot\omega\big|_{\tau=0}=0. \tag{5}$$

Все искомые функции предполагаются ограниченными. На границе полуплоскости заданы нормальные перемещения, а касательные перемещения и угол поворота равны нулю:

$$u\big|_{z=0}=0,\quad w\big|_{z=0}=w_0\left(x,\tau\right),\quad \omega\big|_{z=0}=0. \tag{6}$$

Искомые компоненты напряженно-деформированного состояния как решения начально-краевой задачи (1) − (3), (5) и (6) записываем в виде сверток по времени и координате x (они обозначаются звездочками):

$$U_\nu\left(x,z,\tau\right)=w_0\left(x,\tau\right)**\Gamma_\nu\left(x,z,\tau\right). \tag{7}$$

Здесь под функциями $U_\nu\left(x,z,\tau\right)$ понимаются компоненты напряженно-деформированного состояния $u,w,\omega,\sigma_{zz},\sigma_{xz},\sigma_{zx},\mu_{xy},\mu_{yx},\mu_{zy}$ или μ_{yz}, а под $\Gamma_\nu\left(x,z,\tau\right)$ − соответствующие им поверхностные функции влияния:

$$\Gamma_u=u,\quad \Gamma_w=w,\quad \Gamma_\omega=\omega,\quad \Gamma_{zz}=\sigma_{zz},\quad \Gamma_{xz}=\sigma_{xz},$$
$$\Gamma_{zx}=\sigma_{zx},\ \Gamma_{xy}=\mu_{xy},\ \Gamma_{yx}=\mu_{yx},\ \Gamma_{zy}=\mu_{zy},\ \Gamma_{yz}=\mu_{yz},$$

которые есть ограниченные решения уравнений (1) с начальными условиями (5) и следующими граничными условиями:

$$u\big|_{z=0}=0,\quad w\big|_{z=0}=\delta\left(x,y\right)\delta\left(\tau\right),\quad \omega\big|_{z=0}=0, \tag{8}$$

где $\delta\left(\xi\right)$ − дельта-функция Дирака [7].

2. Изображения поверхностных функций влияния

К начально-краевой задаче (1) – (3), (5) и (8) применяем преобразование Лапласа по времени τ и Фурье по координате x (значки «L» и «F» указывают на соответствующие изображения; s и q – параметры этих преобразований) переходят в следующие соотношения [7]:

$$\frac{\partial^2\varphi^{FL}}{\partial z^2}-k_0^2\left(q,s\right)\varphi^{FL}=0, k_0\left(q,s\right)=\sqrt{q^2+\gamma_0^2 s^2}\ \left(\gamma_0=1\right), \mathrm{Re}\sqrt{\cdot}>0,$$

$$\left(\gamma_1^{-2}+\alpha\right)\frac{\partial^2\psi^{FL}}{\partial z^2}-\left[\left(\gamma_1^{-2}+\alpha\right)q^2+s^2\right]\psi^{FL}+2\alpha\omega^{FL}=0, \tag{9}$$

$$\gamma_2^{-2}\frac{\partial^2\omega^{FL}}{\partial z^2}-2\alpha\beta\frac{\partial^2\psi^{FL}}{\partial z^2}-\left(\gamma_2^{-2}q^2+s^2+4\alpha\beta\right)\omega^{FL}+2\alpha\beta q^2\psi^{FL}=0.$$

Изображения необходимых для отыскания функций Грина перемещений и напряжений, а также граничных условий (8) записываются так:

$$u^{FL}=-iq\varphi^{FL}-\frac{\partial\psi^{FL}}{\partial z}, \quad w^{FL}=\frac{\partial\varphi^{FL}}{\partial z}-iq\psi^{FL}; \tag{10}$$

$$\sigma_{zz}^{FL}=\frac{\partial w^{FL}}{\partial z}-iq\vartheta u^{FL},$$

$$\sigma_{xz}^{FL}=\left(\gamma_1^{-2}-\alpha\right)\frac{\partial u^{FL}}{\partial z}-\left(\gamma_1^{-2}+\alpha\right)iqw^{FL}+2\alpha\omega^{FL},$$

$$\sigma_{zx}^{FL}=\left(\gamma_1^{-2}+\alpha\right)\frac{\partial u^{FL}}{\partial z}-\left(\gamma_1^{-2}-\alpha\right)iqw^{FL}-2\alpha\omega^{FL}, \tag{11}$$

$$\mu_{xy}^{FL}=-iq\omega^{FL}, \mu_{yx}^{FL}=-iq\kappa\omega^{FL}, \mu_{zy}^{FL}=\frac{\partial\omega^{FL}}{\partial z}, \quad \mu_{yz}^{FL}=\kappa\frac{\partial\omega^{FL}}{\partial z};$$

$$u^{FL}\Big|_{z=0}=0, \quad w^{FL}\Big|_{z=0}=1, \quad \omega^{FL}\Big|_{z=0}=0. \tag{12}$$

Общее решение первого уравнения в (9) с учетом его ограниченности имеет вид:

$$\varphi^{FL}\left(q,z,s\right)=C_0\left(q,s\right)E_0\left(q,z,s\right), \psi^{FL}\left(q,z,s\right)=\sum_{l=1}^{2}C_l\left(q,s\right)E_l\left(q,z,s\right),$$

$$\omega^{FL}\left(q,z,s\right)=\frac{1}{2\alpha}\sum_{l=1}^{2}T_l\left(q,s\right)C_l\left(q,s\right)E_l\left(q,z,s\right), \tag{13}$$

$$E_j\left(q,z,s\right)=e^{-k_j(q,s)z}, T_l\left(q,s\right)=\left(\gamma_1^{-2}+\alpha\right)\left[q^2-k_l^2\left(q,s\right)\right]+s^2,$$

где $C_l(q,s)$ − постоянные интегрирования; а $k_{1,2}(q,s)$ − корни биквадратного уравнения, приведенного в [22].

Подстановка (13) в (11) и использование условий (12) позволяет определить постоянные интегрирования:

$$C_0(q,s)=-\frac{K_1(q,s)}{R_1(q,s)},\quad C_1(q,s)=-\frac{iqT_2(q,s)}{R_1(q,s)},\quad C_2(q,s)=\frac{iqT_1(q,s)}{R_1(q,s)}. \tag{14}$$

где

$$R_1(q,s)=q^2R_2(q,s)+k_0(q,s)K_1(q,s),$$
$$R_2(q,s)=T_1(q,s)-T_2(q,s),\ K_1(q,s)=k_1(q,s)T_2(q,s)-k_2(q,s)T_1(q,s).$$

Поскольку вид корней $k_{1,2}(q,s)$ не позволяет находить оригиналы аналитически, то аналогично [22] используем разложения в степенные ряды по малому параметру α, а именно, ограничиваясь линейным приближением, перемещения и угол поворота записываем так:

$$\Gamma_\nu(x,z,\tau)=\Gamma_{\nu 0}(x,z,\tau)+\Gamma_{\nu 1}(x,z,\tau)\alpha \tag{15}$$

Соответствующие (15) равенства для $k_{1,2}(q,s)$ получены в [22]:

$$\begin{gathered}
k_l(q,s)=k_{0l}(q,s)+\alpha k_{1l}(q,s)\ (l=1,2), k_{0l}(q,s)=\sqrt{q^2+\gamma_l^2 s^2},\\
k_{11}(q,s)=-\frac{\gamma_1^4 s^2}{2k_{01}(q,s)}, k_{12}(q,s)=\frac{2\beta\gamma_2^2}{k_{02}(q,s)}, T_1(q,s)=T_{12}(q,s)\alpha^2,\\
T_2(q,s)=T_{20}(q,s)+\alpha T_{21}(q,s), T_{12}(q,s)=-\frac{4\beta\gamma_1^2\gamma_2^2}{\gamma_2^2-\gamma_1^2},\\
T_{20}(q,s)=\gamma_1^{-2}\left(\gamma_1^2-\gamma_2^2\right)s^2,\qquad T_{21}(q,s)=-\gamma_1^{-2}\gamma_2^2\left(4\beta+\gamma_1^2 s^2\right),
\end{gathered} \tag{16}$$

Использование (10), (11), (13), (14) и (16) позволяет найти изображения искомых коэффициентов в (15). Например, для нормального напряжения они имеют вид:

$$\Gamma_{zz00}^{FL}(q,z,s)=\frac{\gamma_1^{-2}k_3^2(q,s)k_{01}(q,s)}{R(q,s)}e^{-k_0(q,s)z},\Gamma_{zz01}^{FL}(q,z,s)=-\frac{\gamma_1^2 s^2 q^2 k_3^2(q,s)}{2k_{01}(q,s)R^2(q,s)}e^{-k_0(q,s)z},$$

$$\Gamma_{zz10}^{FL}(q,z,s)=-\frac{2\gamma_1^{-2}q^2k_{01}(q,s)}{R(q,s)}e^{-k_{01}(q,s)z},\Gamma_{zz2}^{FL}(q,z,s)=0,$$

$$\Gamma_{zz11}^{FL}(q,z,s)=\frac{\gamma_1^2 s^2 q^2}{R(q,s)}\left[\frac{q^2}{k_{01}(q,s)R(q,s)}-z\right]e^{-k_{01}(q,s)z}, \tag{17}$$

$$R(q,s)=q^2-k_0(q,s)k_{01}(q,s),\;\; k_3^2(q,s)=2q^2+\gamma_1^2 s^2.$$

Далее ограничимся рассмотрением функций влияния на поверхности $z=0$. При этом, вводя обозначения

$$\Gamma_{0zz}^{FL}(q,s)=\Gamma_{zz}^{FL}(q,0,s)=\sum_{j=0}^{2}\Gamma_{0zzj}^{FL}(q,s),\,\Gamma_{0zzj}^{FL}(q,s)=\Gamma_{zzj}^{FL}(q,0,s),$$

из (17) получаем:

$$\Gamma_{0zzj}^{FL}(q,s)=s^2\Gamma_{33j}^{FL}(q,s),\,(j=0,1), \tag{18}$$

где

$$\Gamma_{330}^{FL}(q,s)=\frac{k_{01}(q,s)}{R(q,s)},\qquad \Gamma_{331}^{FL}(q,s)=-\frac{\gamma_1^4 s^2 q^2}{2k_{01}(q,s)R^2(q,s)}. \tag{19}$$

Тогда оригиналы функций влияния определяются следующий образом (штрих соответствует производной по координате x):

$$\Gamma_{0zzj}(x,\tau)=\ddot{\Gamma}_{33j}(x,\tau)\quad (j=0,1).$$

Отметим, что знание оригиналов функций $\Gamma_{33j}^{FL}(q,s)$ в соответствии с (7), (15) и (18) при учете свойств преобразования Лапласа и свертки позволяет записать нормальное напряжение на границе полупространства так:

$$\sigma_{zz}(x,\tau)=\ddot{w}_0(x,\tau)**\Gamma_{33}(x,\tau),\,\Gamma_{33}(x,\tau)=\Gamma_{330}(x,\tau)+\alpha\Gamma_{331}(x,\tau). \tag{20}$$

3. Оригиналы функций влияния

Чтобы найти оригиналы функций влияния используем алгоритм совместного обращения преобразований Фурье и Лапласа [7, 21, 23]. По этому алгоритму, выполняя замену аргументов $q=\lambda s$, из (19) получаем:

$$\Gamma_{33j}^{FL}(q,s)=\frac{1}{s}h_{33j}(\lambda)\quad (j=0,1),$$

$$h_{330}(\lambda)=\frac{k_{01}(\lambda^2,1)}{S(\lambda^2)},\ h_{331}(\lambda)=-\frac{\gamma_1^4\lambda^2}{2k_{01}(\lambda^2,1)S^2(\lambda^2)},\ S(\lambda)=\lambda-k_0(\lambda,1)k_{01}(\lambda,1);$$

$$\lambda=-\tau\frac{y+xi}{x^2+y^2},\ \lim_{y\to\pm 0}\lambda=\lambda_0(x,\tau)=-\frac{i\tau}{x},$$

Тогда искомые функции определяются так:

$$\Gamma_{33j}(x,\tau)=-\frac{1}{2\pi ix}\left[\lim_{y\to+0}h_{33j}(\lambda)-\lim_{y\to-0}h_{33j}(\lambda)\right]\quad (j=0,1). \tag{21}$$

Выделение однозначных ветвей функций $k_0(\lambda^2,1)$ и $k_{01}(\lambda^2,1)$ проводится с помощью разрезов комплексной плоскости λ вдоль мнимой оси:

$$\begin{gathered}
\lim_{y\to\pm 0}k_0(\lambda^2,1)=\begin{cases}\sqrt{1-\tau^2/x^2} & (\tau/|x|<1),\\ \pm i\operatorname{sign}(x)\sqrt{\tau^2/x^2-1} & (\tau/|x|\ge 1),\end{cases}\\
\lim_{y\to\pm 0}k_{01}(\lambda^2,1)=\begin{cases}\sqrt{\gamma_1^2-\tau^2/x^2} & (\tau/|x|<\gamma_1),\\ \pm i\operatorname{sign}(x)\sqrt{\tau^2/x^2-\gamma_1^2} & (\tau/|x|\ge\gamma_1).\end{cases}
\end{gathered} \tag{22}$$

Выполняя предельные переходы (21), с учетом (22) получаем следующие выражения для оригиналов:

- при $\tau/|x|<1$

$$\Gamma_{330}(x,\tau)=\Gamma_{331}(x,\tau)=0, \tag{23}$$

- при $1 \le \tau/|x| < \gamma_1$

$$\Gamma_{330}(x,\tau) = \frac{\left(\tau^2 - \gamma_1^2 x^2\right)\sqrt{\tau^2 - x^2}}{\pi\left(1+\gamma_1^2\right)x^2\left(\tau^2 - \nu_1^2 x^2\right)} = \Gamma_{3300}(x,\tau), \qquad \nu_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}} < 1,$$
$$\Gamma_{331}(x,\tau) = \frac{\gamma_1^4 \tau^4 \sqrt{\tau^2 - x^2}}{\pi\left(1+\gamma_1^2\right)^2 x^2 \left(\tau^2 - \nu_1^2 x^2\right)^2} = \Gamma_{3310}(x,\tau), \tag{24}$$

- при $\tau/|x| \ge \gamma_1$

$$\Gamma_{330}(x,\tau) = \frac{Q\left(x^2,\tau^2\right)\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}}{\pi\left(1+\gamma_1^2\right)x^2\left(\tau^2 - \nu_1^2 x^2\right)} = \Gamma_{3302}(x,\tau),\ Q(x,\tau) = \tau + \sqrt{\tau - x}\sqrt{\tau - \gamma_1^2 x},$$
$$\Gamma_{331}(x,\tau) = \frac{\gamma_1^4 \tau^2 Q^2\left(x^2,\tau^2\right)}{2\pi\left(1+\gamma_1^2\right)^2 x^2 \left(\tau^2 - \nu_1^2 x^2\right)^2 \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}} = \Gamma_{3312}(x,\tau). \tag{25}$$

Учитывая, что для известных моментно упругих материалов [11] имеет место неравенство $\gamma_1 > 1$, формулы (23) − (25) представляем так ($H(\xi)$ − единичная функция Хевисайда [7]):

$$\Gamma_{33j}(x,\tau) = \sum_{l=0}^{1} \Gamma_{33jl}(x,\tau) H\left(\tau - \gamma_l |x|\right) \ (j = 0,1), \tag{26}$$

где

$$\Gamma_{3301}(x,\tau) = \Gamma_{3302}(x,\tau) - \Gamma_{3300}(x,\tau) = \frac{\tau^2\sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}}{\pi\left(1+\gamma_1^2\right)x^2\left(\tau^2 - \nu_1^2 x^2\right)},$$
$$\Gamma_{3311}(x,\tau) = \Gamma_{3312}(x,\tau) - \Gamma_{3310}(x,\tau) = \frac{\gamma_1^4 \tau^2 \left[\tau^4 + \left(\tau^2 - x^2\right)\left(\tau^2 - \gamma_1^2 x^2\right)\right]}{2\pi\left(1+\gamma_1^2\right)^2 x^2 \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}\left(\tau^2 - \nu_1^2 x^2\right)^2}.$$

Отсюда следует, что функция $\Gamma_{330}(x,\tau)$ непрерывна всюду, а $\Gamma_{331}(x,\tau)$ непрерывна везде за исключением точек $\tau = \gamma_1 |x|$. При этом имеют место соотношения:

$$\lim_{\tau\to|x|\pm 0}\Gamma_{33j}\left(x,\tau\right)=0\ \left(j=0,1\right),\ \lim_{\tau\to\gamma_1|x|\pm 0}\Gamma_{330}\left(x,\tau\right)=0,$$

$$\lim_{\tau\to\gamma_1|x|-0}\Gamma_{331}\left(x,\tau\right)=\frac{\sqrt{\gamma_1^2-1}}{\pi|x|},\quad \lim_{\tau\to\gamma_1|x|+0}\Gamma_{331}\left(x,\tau\right)=+\infty.$$

4. Примеры расчетов функции влияния

Полагаем, что материалом, заполняющим полупространство, является зернистый композит из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице, со следующими физическими характеристиками [11]:

$$\lambda=7,59\,\text{ГПа};\quad \mu=1,89\,\text{ГПа};\quad \alpha=7,45\,\text{МПа};\ \gamma+\varepsilon=2,64\,\text{кН};\ J=0,429\cdot 10^{-3}\,\text{кг/м}.$$

В качестве характерного линейного размера принимаем $L=1\,\text{м}$. При этом безразмерные параметры в (4) таковы:

$$\gamma_1=2,45;\ \gamma_2=0,92;\ \alpha=0,66\cdot 10^{-3};\ \beta=5,1\cdot 10^{6}.$$

На рис. 1 и 2 представлены построенные с помощью формулы (26) зависимости функций влияния $\Gamma_{330}\left(x,\tau\right)$ и $\Gamma_{331}\left(x,\tau\right)$ от времени τ при различных значений координаты: сплошная кривая соответствует $x=0,2$, пунктирная - $x=0,4$, а штрихпунктирная - $x=0,6$.

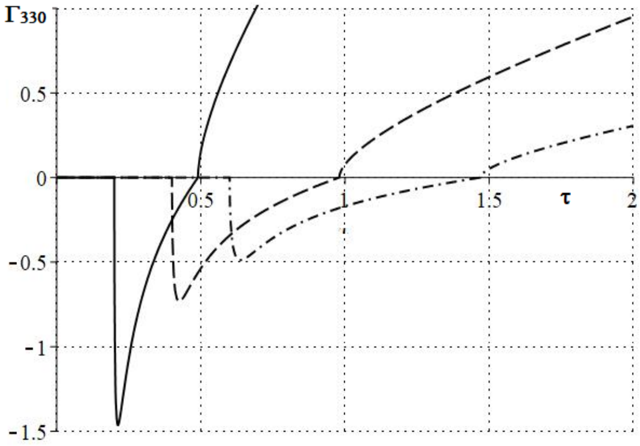


Рис. 1

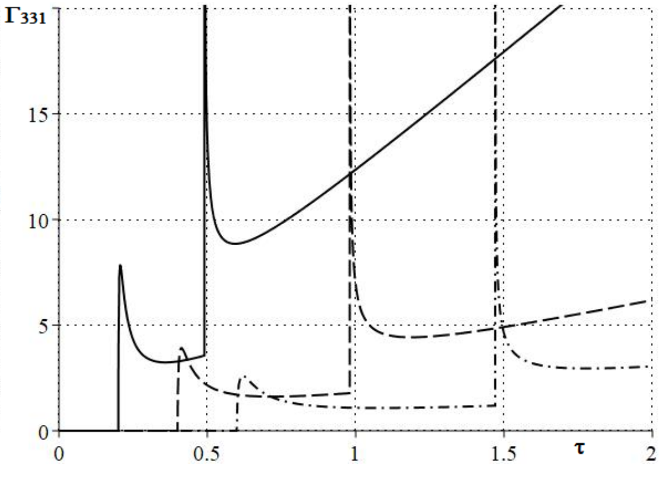
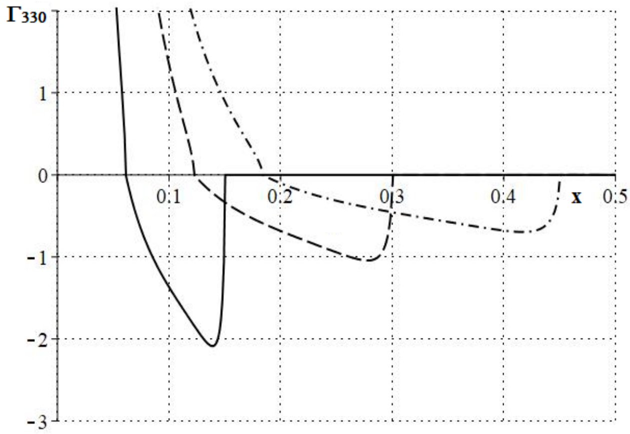


Рис. 2

На рис. 3 и 4 изображены зависимости тех функций от координаты x при различных значений времени: сплошная кривая соответствует $\tau = 0{,}15$, пунктирная - $\tau = 0{,}3$, а штрихпунктирная - $\tau = 0{,}45$.



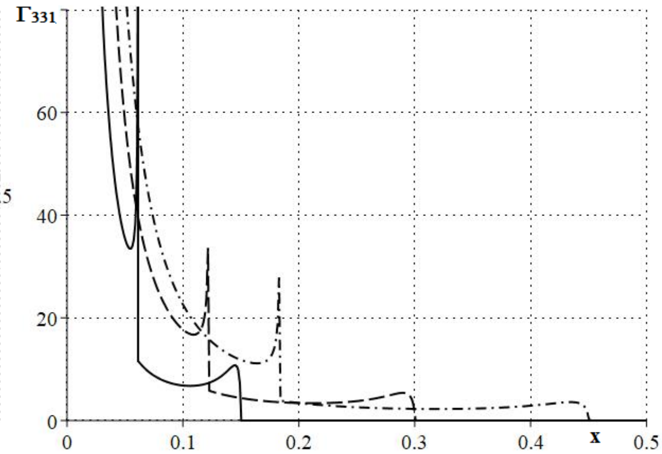


Рис. 3 Рис. 4

Отметим, что поскольку порядки функций $\Gamma_{330}(x,\tau)$ и $\Gamma_{331}(x,\tau)$ одинаковые, то в соответствии с формулой (23) влияние учета моментных свойств среды имеет порядок коэффициента α.

5. Примеры действия нормальных перемещений

В качестве первого примера рассмотрим действие на полуплоскость сосредоточенного в начале координат возмущения вида $w_0(x,\tau) = \tau_+^2 \delta(x)/2$. Учитывая, что при этом $\ddot{w}_0(x,\tau) = H(\tau)\delta(x)$ из формулы (20) получаем

$$\sigma_{zz}(x,\tau) = \sigma_{zz0}(x,\tau) + \alpha\sigma_{zz1}(x,\tau) \tag{27}$$

Здесь

$$\sigma_{zzj}\left(x,\tau\right)=\sum_{l=0}^{1}H\left(\tau-\gamma_l\left|x\right|\right)\int\limits_{\gamma_l|x|}^{\tau}\Gamma_{33jl}\left(x,t\right)dt \quad \left(j=0,1\right).$$

Входящие сюда интегралы находим численно. Результаты расчетов зависимости функции нормальных напряжений $\sigma_{zz0}\left(x,\tau\right)$ и $\sigma_{zz1}\left(x,\tau\right)$ от времени τ при различных значений координаты x представлены на рис. 5 и 6 (где сплошная кривая соответствует $x=0,2$, пунктирная - $x=0,4$, а штрихпунктирная - $x=0,6$).

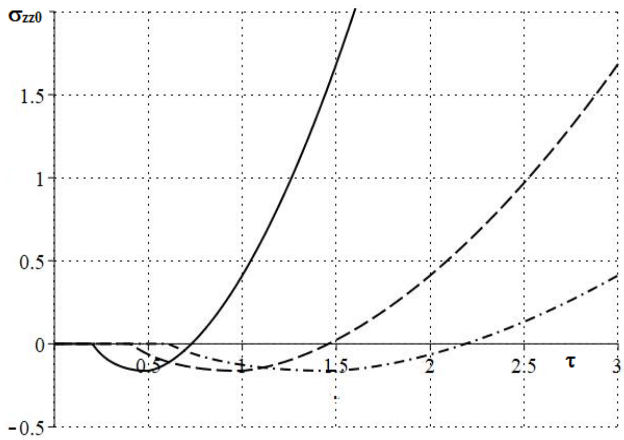


Рис. 5

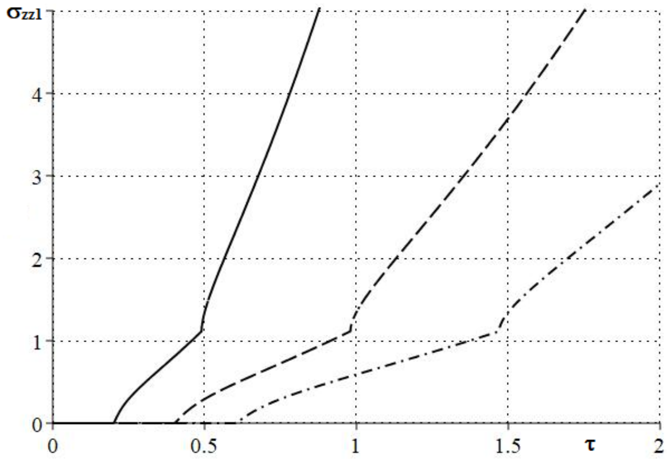


Рис. 6

Второй вариант возмущения – распределенное по оси Ox перемещение вида $w_0\left(x,\tau\right)=\tau_+ f\left(x\right)H\left(a-\left|x\right|\right)$, где $f\left(x\right)=\left(a^2-x^2\right)^2$, $a>0$. Учитывая, что в этом случае $\ddot{w}_0\left(x,\tau\right)=f\left(x\right)\delta\left(\tau\right)$, из формулы (20) получаем равенство (27), в котором нужно положить ($j=0,1$)

$$\sigma_{zzj}\left(x,\tau\right)=\sum_{l=0}^{1}\sigma_{zzjl}\left(x,\tau\right),$$

где

$$\sigma_{zzjl}\left(x,\tau\right)=\int\limits_{b_l}^{c_l}H\left(a-\left|x-\xi\right|\right)f\left(x-\xi\right)H\left(\tau-\gamma_l\left|\xi\right|\right)\Gamma_{33jl}\left(\xi,\tau\right)d\xi,$$
$$b_l=\min\left(x-a,-\tau/\gamma_l\right),\quad c_l=\min\left(x+a,\tau/\gamma_l\right),$$

Входящие сюда интегралы находим численно. Результаты расчетов зависимости функции нормальных напряжений $\sigma_{zz0}(x,\tau)$ и $\sigma_{zz1}(x,\tau)$ от координаты x для различных значений времени τ при $a=0,5$ представлены на рис. 7 и 8 (где сплошная кривая соответствует $\tau=0,2$, пунктирная - $\tau=0,4$, а штрихпунктирная - $\tau=0,6$).

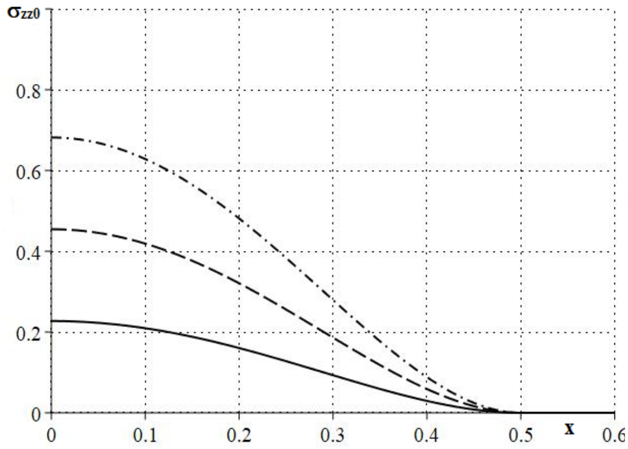


Рис. 7

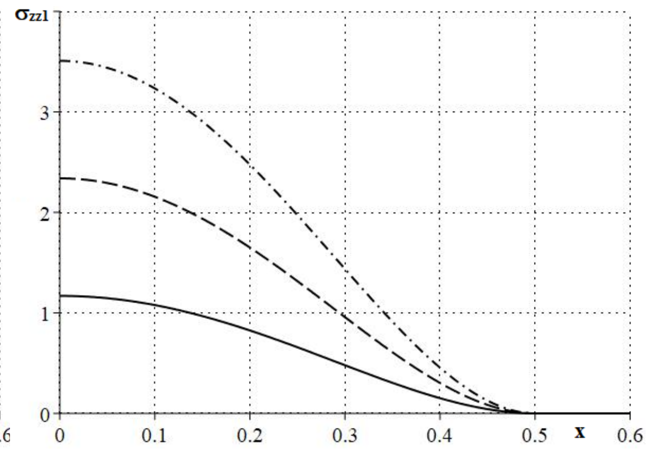


Рис. 8

5. Заключение

Построено аналитическое решение задачи о распространении нестационарных поверхностных кинематических возмущений в моментно упругой полуплоскости, позволяющее с помощью квадратур находить напряжения для любого закона изменения нагрузки. Установлено, что поправки, вносимые в решение учетом моментных свойств среды, имеют порядок коэффициента, связывающего поля перемещений и поворота. Показано, что поверхностные функции Грина в этом случае имеют интегрируемую особенность на фронте волны сдвига.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-08-00471).

Библиографический список

1. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. 1960. Т. 2. № 9. С. 1399 – 1409.

2. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. № 3. С. 401 – 408.

3. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. - М.: Наука, 1975. - 416 с.

4. Eringen C.A. A unified continuum theory of liquid crystals // ARI - An International Journal for Physical and Engineering Sciences, 1997, vol. 50, pp. 73 - 84.

5. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909, 226 p.

6. Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В. Нестационарные поверхностные функции влияния для упруго-пористой полуплоскости // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29269

7. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. - М.: Физматлит, 2004. - 472 с.

8. Старовойтов Э.И., Локтева Н.А., Старовойтова Е.Э. Деформирование трехслойных композитных ортотропных прямоугольных пластин // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=53018

9. Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С., Литвинчук С.Ю. Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и

пороупругости // Труды МАИ. 2010. № 42. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=22862

10. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарная осесимметричная задача об ударе сферической оболочки по упругому полупространству (начальный этап взаимодействия) // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 2. С. 98 – 108.

11. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. - М.: Изд-во МГУ, 1999. - 328 с.

12. Кулеш М.А., Шардаков И.Н. Построение и анализ некоторых точных аналитических решений двумерных упругих задач в рамках континуума Коссера // Вестник Пермского государственного технического университета. Математическое моделирование. 2001. № 9. С. 187 – 201.

13. Шкутин И.Л. Обобщенные модели типа Коссера для анализа конечных деформаций тонких тел // Прикладная механика и техническая физика. 1996. № 3. С. 120 – 132.

14. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29267

15. Eremeyev V.A., Zubov L.M. On constitutive inequalities in nonlinear theory of elastic shells // ZAMM, 2007, vol. 87, no. 2, pp. 94 – 101.

16. Савин Г.Н., Лукашов А.А., Лыско Е.М. Распространение упругих волн в твердом теле с микроструктурой // Прикладная механика. 1970. Т. 6. № 7. С. 48 – 52.

17. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. № 6. С. 1117 – 1120.

18. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Континуальная теория асимметричной упругости. Учет внутреннего вращения // Физика твердого тела. 1964. Т. 6. № 9. С. 2689 - 2699.

19. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. - 872 с.

20. Миндлин Р.Д., Тирстен Г.Ф. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика. 1964. № 4. С. 163 – 176.

21. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.

22. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных нормальных поверхностных перемещений // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2017. Т. 159. Кн. 2. С. 231 – 245.

23. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. - М.: Наука. Физматлит, 1995. - 352 с.