Электронный журнал «Труды МАИ». Выпуск № 49 www.mai.ru/science/trudy/

УДК 517.977

Оценка устойчивости управления высокотехнологичным проектированием и производством авиационной техники в кризисных ситуациях

Лебедев Г.Н., Дегтярёв Ю.И, Степаньянц Г.А., Аунг Мьё Тху.
Работа выполнена при поддержки гранта РФФИ № 11-08-000-32-а.

Аннотация

Изучены достаточные условия устойчивости нелинейных динамических систем при оптимальном управлении производством. Предложено использовать метод Ляпунова и применить в расчетах функцию Беллмана.

Ключевые слова: кризисные ситуации, переменная рентабельность, оптимальное управление, динамическая устойчивость.

1. Введение

Современное проектирование и производство новой авиационной техники связано с непрерывным совершенствованием как технологии изготовления, так и качества самых выпускаемых изделий, что определяет также и неуклонный рост затрат. Однако желаемое повышение скорости производства, а вслед за качеством и увеличение цены продукции достигаются по сравнению с периодом повышенных затрат в разное время, в связи с чем зависящая от них рентабельность производства является переменной величиной.

Этот факт уже подчеркивает необходимость использования динамической модели технико-экономической системы, устойчивость которой необходимо изучить. Периоды спада производства из-за снижения спроса в кризисных ситуациях делают задачу этого изучения особенно актуальной.

В данной работе показано, что динамическая модель система нелинейная, и для неё применим лишь известный метод Ляпунова. Опираясь на свойства оптимального управления, для оценки устойчивости удается использовать функцию Беллмана, найденную с помощью динамического программирования.

2. Общий подход к устойчивости нелинейных динамических систем

Универсальным методом исследования устойчивости невозмущенного движения является прямой метод Ляпунова, позволяющий оценить область притяжения невозмущенного движения (область притяжения нулевого состояния равновесия системы в отклонениях), а так же, при исследовании движений, являющихся устойчивыми «в большом» и неустойчивыми «в малом» оценить размеры минимального асимптотически устойчивого инвариантного множества (аттрактора) [5,6].

Общий подход к такой оценке состоит в следующем. Рассматривается система (не обязательно исходная), уравнения движения которой близки к уравнениям движения исследуемой системы, а одно из движений совпадает с невозмущенным движением исходной системы (или мало от него отличается). Записывается система уравнений в отклонениях от этого движения и находится положительно определенная функция Ляпунова (обозначим её *V*), которая при некотором допустимом законе управления удовлетворяет достаточным условиям асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия. Производную функции *V* по времени, взятую вдоль траекторий исходной системы и поэтому зависящую от закона управления u, обозначим $W(x,u)$. При фиксированном допустимом законе управления u рассмотрим четыре множества:

$$GW=\{x:W(x,u)<0\},\ \ GV(C_0)=\{x:V(x)\le C_0\},$$
$$GV(C_1)=\{x:V(x)\le C_1\},\ \ G_{01}=GV(C_1)\setminus GV(C_0).$$

Если все эти множества связны, а $0<C_0<C_1\ \&\ G_{01}\subset GW,$ то множество $GV(C_0)$ является оценкой сверху асимптотически устойчивого инвариантного множества, а $GV(C_1)$ является оценкой снизу его области притяжения. В дальнейшем будем считать, что C_0 - минимальное, а C_1 - максимальное из чисел, удовлетворяющих приведенным условиям. Из описываемого подхода следует, что при выбранной функции V наименьшие оценки множества $GV(C_0)$ и наибольшие оценки $GV(C_1)$ будут получаться при таком допустимом законе управления $\hat{u}$, при котором множество $GW(\hat{u})$ будет максимальным, т.е. будет содержать в качестве подмножества область $GW(u)$ при любом другом допустимом законе управления, $GW(\hat{u})\supset GW(u)$.

Нетрудно видеть, что такой результат достигается при законе управления, минимизирующем при каждом значении вектора состояния производную $W(x,u)$ функции V, так, что $W(x,\hat{u})=\min\limits_{u}W(x,u)$.

Сделаем два замечания. Во-первых, построение предлагаемого закона управления не вызывает особенных трудностей. Как правило, значение управления при таких законах лежит на границе области допустимых значений и может быть получено как решение задачи выпуклого (а зачастую – линейного) программирования.

Во-вторых, определение конфигурации области отрицательности функции $W(x,u)$ является достаточно трудной задачей, особенно при нелинейных уравнениях движения, а попытки грубо оценить эту область как правило, малоэффективны. Поэтому целесообразно не пытаться искать формулы для оценки границ области GW так как при предлагаемом законе управления лучшей оценки, полученной с помощью выбранной функции V не существует.

При построении оптимальных законов управления одним из наиболее эффективных методов является метод динамического программирования. Хорошо известно, что при грамотно выбранном функционале качества его оптимальное значение является функцией Ляпунова, обеспечивающей выполнение достаточных условий асимптотической устойчивости оптимального решения.

Если задача оптимального управления решена для какого-либо конкретного значения параметров, то в случае, если параметры объекта случайным образом изменяются в процессе работы в некотором ограниченном диапазоне, а задача обеспечения устойчивости движения является первоочередной (например, для собственно неустойчивых объектов), то можно предложить использовать законы управления, обеспечивающие минимум производной от оптимального значения показателя качества. При этом следует учитывать, что такой закон управления обеспечивает максимальную величину оценки области притяжения невозмущенного движения снизу и минимальную величину оценки аттрактора (минимального асимптотически устойчивого множества) сверху. Как правило, такой закон управления не является оптимальным по выбранному функционалу качества.

3. **Постановка задачи**

1. Приняты, как заданные, следующие динамические модели[2]:

Производственное звено описывается дифференциальным уравнением первого порядка, а его структура содержит отрицательную и положительную связь,как это показано на рис. 1

$$\dot{x_1} = \frac{x_1}{\tau}[(1+\rho)U_1 - 1] \tag{1}$$

где τ– время оборота капитала , ρ– рентабельность производства,

$x_1(0)$– начальный капитал, x_1– стоимость выходной продукции в единицу времени ; U_1 – доля стоимости выходной продукции, направляемой для возобновления производства.

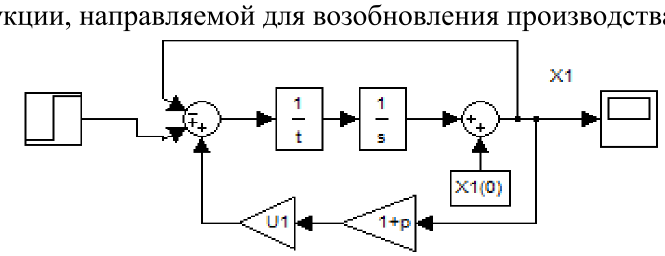

Рис.1 Математическая модель производственного звена

2. Экономические звенья, связанные с описанием процессов ценообразования, спроса и сбыта продукции, в данной работе не учитываются, прибыль x_2 вляется алгебраической функцией от x_1, а процесс x_3 накопления прибылив банке описывается интегрирующим звеном, как показано на рис. 2. Процесе повышения качества продукции и создания новой техники также не рассматривается, поскольку он относится к длинно-периодическому движению.

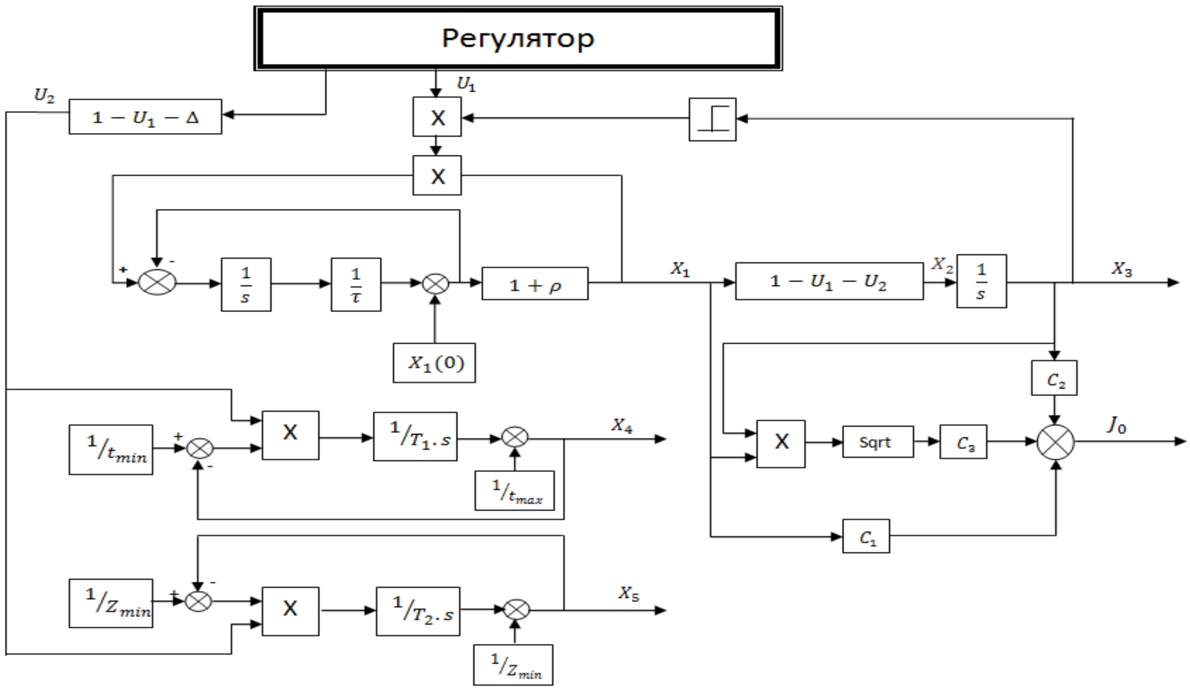

Рис. 2 Структурная схема системы управления промышленным производством

3. В общем случае рентабельность ρ производства является переменной

$$\rho = \hat{\rho} + Asinwt \qquad (3)$$

где $\hat{\rho} > 0$ – средняя рентабельность, A – амплитуда колебаний, $\frac{1}{\omega}$ – период возникновения кризисиных ситуаций. При $\rho < 0$ возникает ситуация спада производства. С учётом вышесказанного принципа декомпозиции движения на данном этапе считается, что в течение некоторого ограниченного периода рентабельностьρ есть постоянная величина, либо положительная, либо отрицательная.

4. Объединение перечисленных звеньевв общую структуру позволяет промоделировать её в MatLab, используя показанную на рис. 2 схему. Видно, что искомые значения U_1 и U_2 влияют на работу звеньев мультипликативно, играя роль либо катализаторов , либо замедлителей процессов развития производства, что в корне отличает систему от классической, в которой управляющий сигнал поступает на вход звеньев. Эта уникальная особенность усложняет решение задачи и требует особого подхода.

5. Ставится задача выбора такого критерия эффективности системы, который бы учитывал в свертке как производственные, так и экономические показатели и открыл путь к синтезу оптимального управления.
6. Требуется найти первую версию оптимального управления предприятием по возможности в виде линейной функции от координат x_1 ,x_2 ,x_3, не учитывая пока что возможность совершенствования технологии производства[3]. После накождения первоочередного управления U_1 требуется найти вид функции Ляпунова *V* и проанализировать знак её производной $W(x,u)$.

4. Синтез оптимального управления

В состествии с методом аналитического конструирования оптимального рягуляторов [5] оптимальное управление U1 близко к релейному и имеет вид, показанный на рис.3

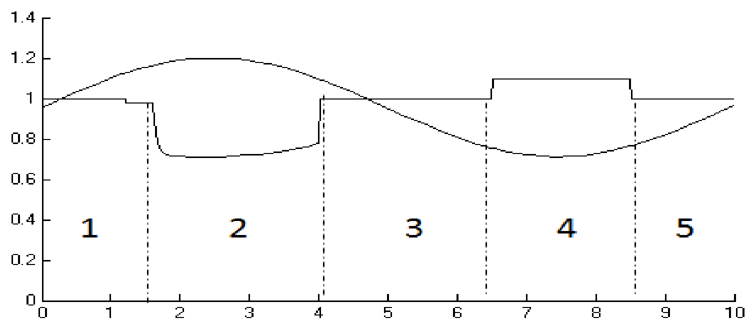

Рис 3. Оптимальное управление промышленным производством

На рис.3 показаны 5 характерных участков управления производством за период T_0

1 – расширение производством без отчисления прибыли

2 – простое воспроизводство с отчислением сверх прибыли

3 – сохранение производства при низкой рентабельности без отчисления прибыли

4 – убыточное производство при расходовании накопленной прибыли

5 – сохранении производства без отчисления прибыли

Каждый участок имеет свою производную $W(x,u)$ с таким знаком, чтобы в целом система была устойчива на всем периоде T_0.

5. Анализ устойчивости производства но различных участках оптимального управления

В [5] показано, что если система управления оптимальна в смысле некоторого интегрального критерия, то тогда в роли функции Ляпунова может быть использована функция Беллмана ε.

$$\varepsilon(x) = \min \int_{t}^{tu} f_0(\bar{x}, \bar{u}) dt$$

Поскольку со временем t нижний предел интеграла увеличивается, сам интеграл уменьшается, а подинтегральное значение f_0 целиком определяет скорость изменение функции $\frac{d\varepsilon}{dt}$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -f_0(x, u) = W(x, u) \tag{2}$$

Действительно пусть объект описывается уравнениями

$$x_i = f_i(x, \bar{u})$$

а условие оптимальности – уравнению Беллмана в частных производных, в установившем состоянии имеющем вид

$$0 = \min \{f_0 + \sum_{i=1}^{u} \frac{d\varepsilon}{dx_i} \; f_i(\bar{x}, u)\}$$

Но второе слагаемое в фигурных скобках и есть $\frac{d\varepsilon}{dt}$, значит соотношение (2) является верным. Поэтому определим, чему равно f_0 в нашей задаче, и определим знаки этой функции на каждом из 5 участков периода управления T_0 . Если на них $f_0 > 0$, то система устойчива.

$$f_0 = k_1\dot{x}_1 + k_2\dot{x}_2 + k_3\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\dot{x}_1 + k_3\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\dot{x}_2$$

При упрощающем предположении $K_1 = 1$; $K_2 = \frac{1}{\tau}$ получим

$$f_0 = (\mathrm{B} - \Phi)U + \Phi \tag{3}$$

где $\mathrm{B} = \frac{\rho}{\tau}\left(1 + K_3\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right)$; $\Phi = K_3(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}})$

Из приведенных формул видно, что как A, так Ф меняют на периоде свой знак в разное время. Поэтому рассмотрим 6 случаев, и для каждого из них найдем минимальную по величине долю U1 того дохода, которое возвращается в производство, но так, чтобы f_0 было положительным

1. $\text{В} > 0,\ \ \Phi > 0,\ \ \text{А} - \Phi > 0$ имеем $U = 1$ или $U = 1 - б$ (участок 4)
2. $\text{В} > 0,\ \ \Phi > 0,\ \ \text{А} - \Phi < 0$ имеем $U = 1$ (участок 1)
3. $\text{В} > 0,\ \ \Phi < 0,\ \ \text{А} - \Phi > 0$ имеем $U = \frac{1}{1+\hat{\rho}}$ (участок 2)
4. $\text{В} < 0,\ \ \Phi > 0,\ \ \text{А} - \Phi < 0$ имеем $U < 1$ (участок 3)
5. $\text{В} < 0,\ \ \Phi < 0,\ \ \text{А} - \Phi > 0$ имеем $U = \frac{1+2\hat{\rho}}{1+\hat{\rho}}$ (участок 4)
6. $\text{В} < 0,\ \ \Phi < 0,\ \ \text{А} - \Phi < 0$ имеем $U = 1$ или $U = 1 - б$ (участок 5)

Таким образом оказывается,что при оптимальном управлении фактически на всех участках условие устойчивости соблюдается. Наиболее сложным является участок в период спада производства. Борьба с этим спадом тем труднее, чем больше амплитуда А колебаний рентабельности и чем меньше средняя положительная рентабельность $\hat{\rho}$. Приближенно условие сохранения устойчивости на этом участке можно описать в виде неравенства

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} - \frac{1}{\tau}\left(2 - \frac{A}{\hat{\rho}}\right)\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} > \frac{1 - \frac{A}{\hat{\rho}}}{K_3\tau} \tag{4}$$

Условие (4) показывает, что чем больше скорость x_1 производства, тем лучше. Значит, первоочередной задачей является сохранение производственных мощностей в кризисных ситуациях.

Результаты моделирования в виде фазовой траектории, содержащей повторяющиеся циклы, подтверждают теоретический результат и показаны на рис.4.

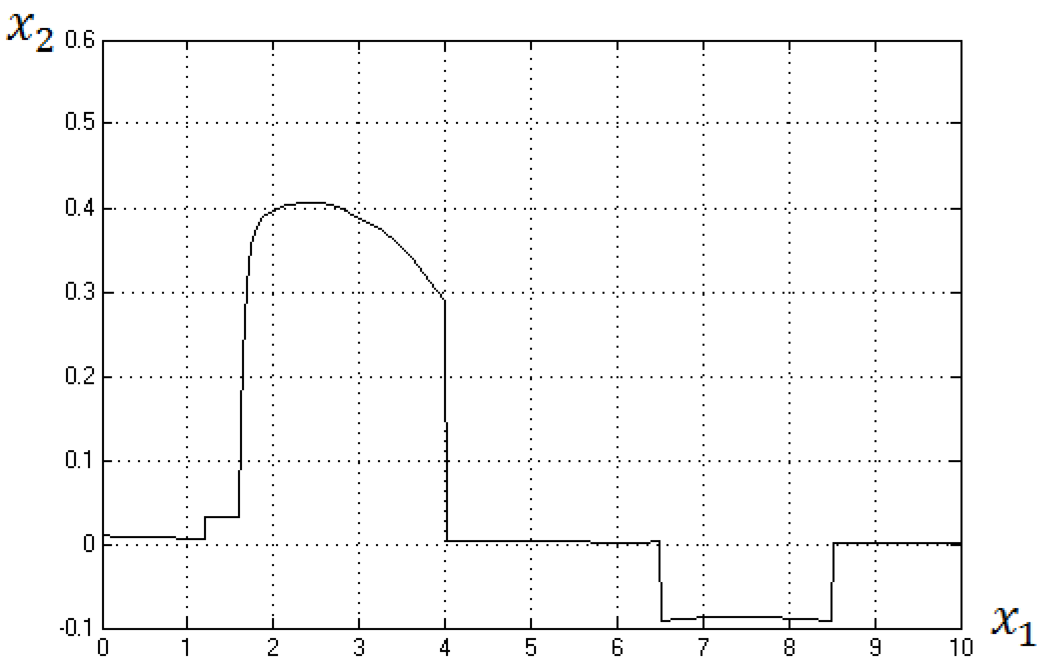

Рис 4. Фазовая траектория движения системы в течение заданного периода T_0

Из рисонка видно, что скорость накопления x_2 на разных участках различна, но в среднем больше нуля (прибыль в банке растёт). Зато мощность производства x_1 увеличивается в 10 раз, поэтому система устойчиво развивается.

6. Выводы

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы

1. Показано, что при оптимальном управлении промышленным производством, найденном с помощью динамического программирования, существует 5 участков его расширения, стабилизации и сокращения при использовании сверхприбыли в период падения спроса продукции.
2. Выявлено, что при найденном релейном управлении получаемым доходом анализируемая технико-экономическая система имеет запас устойчивости.

3. Моделирование на ЭВМ показало, что в течение нескольких периодов роста и снижения рентабельности производства система способна в среднем устойчиво развиваться, если путем непрерывного совершенствования качества авиационной техники будет обеспечен постоянный спрос.

Литература

1. Царьков В.А Экономическая динамика и эффективность капитальных вложений. М., Изд. дом «Лексикон», 1997, 103 стр.
2. Лебедев Г.Н. Постановка задачи оптимального управления технологическими процессами для обеспечения динамической устойчивости промышленного производства в кризисных ситуациях. М., Изд. «Новые технологии», 2010, №7 стр 53-55.
3. Лётов А.М. Динамика полёта и управления. М.,Наука, 1969 г.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. М.,Изд. ИИЛ, 1961 г.
5. Лебедев Г.Н, Аунг Мьё Тху, Динамические модели производственного и технологического звена в задаче оптимального управления предприятием в кризисных ситуациях.М., Изд. «Системы управления и информационные технологии», 2011, №3(45), стр 36-40.
6. Г.А.Степаньянц, Теория динамических систем. Москва, URSS, “Либирком”, 2010г.
7. Г.А.Степаньянц, Стабилизация систем управления неустойчивости и слабодемифировоными объектами. Москва, Изд. МАИ, 2011г.

Сведения об авторах

Лебедев Георгий Николаевич, заместитель заведующего кафедрой Москоского авиационного института (национального исследовательского университета), д.т.н., профессор, тел.: 786-8995, 8(916)306-9284;e-mail: kaf301@mai.ru

Аунг Мьё Тху, аспирант Москоского авиационного института (национального исследовательского университета),тел.: 8(925)716-4141; e-mail:aungmyothu22@gmail.com

Степаньянц Георгий Аркадьевич, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.т.н.,тел.: 8 (499)-158-41 82; e-mail: kaf301@mai.ru

Дегтярёв Юрий .Иванович, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.т.н.,тел.: 8 (499)-157-4434; e-mail: kaf301@mai.ru