

Научная статья  
УДК 539.3  
DOI: [10.34759/trd-2022-127-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-127-05)

## ОЦЕНКА ДЕМПФИРУЮЩИХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТОВ

**Галина Ивановна Кривень**

ПАО «Радиофизика»,

Москва, Россия

[kriven\\_galina@inbox.ru](mailto:kriven_galina@inbox.ru)

*Аннотация:* В работе исследуются волокнистые композиты, проводится анализ их эффективных демпфирующих свойств, собственных частот и коэффициентов потерь. Эффективные диссипативные свойства и волновые свойства определяются наличием вязкоупругого слоя, расположенного между упругим волокном с высокой жесткостью и менее жесткой матрицей. Приводятся аналитические оценки с использованием методов линейно-вязкоупругой аналогии. Установлено, что для определения параметров с высокой точностью метод трех фаз является предпочтительнее метода Рейса. С целью увеличения диссипативных свойств и сохранения эффективных механических свойств предложено использовать вискеризованные структуры, выращенные на поверхности волокна, и погруженные в вязкоупругий слой. Проводится исследование демпфирования колебаний слоистой композитной шарнирно опертой балки. В слоистую композитную балку вводится

вязкоупругая прослойка для улучшения демпфирующих свойства. Резонансная частота и коэффициент модальных потерь балки с различными типами укладок волокон оцениваются с использованием стержневой модели Бернулли-Эйлера и модели Тимошенко. Отмечается, что в случае поперечно ориентированных волокон, обе модели - модель Бернулли-Эйлера и модель Тимошенко, учитывают сдвиговые деформации.

**Ключевые слова:** композитный материал, демпфирующие свойства, метод вязкоупругой аналогии, модификация поверхности волокна, демпфирование колебаний.

**Финансирование:** работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-3607.2022.1.1

**Для цитирования:** Кривень Г.И. Оценка демпфирующих свойств композитов // Труды МАИ. 2022. № 127. DOI: [10.34759/trd-2022-127-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-127-05)

Original article

## EVALUATION OF DAMPING PROPERTIES OF COMPOSITES

**Galina I.Kriven**

PJSC «Radiofizika»,

Moscow, Russia

[kriven\\_galina@inbox.ru](mailto:kriven_galina@inbox.ru)

**Abstract:** The article studies fibrous composites, particularly, analyzes their effective damping properties, natural frequencies and loss coefficients. Both effective dissipative and

wave properties are being defined by the presence of a viscoelastic layer laid between the elastic fiber of high rigidity and a less rigid matrix. Analytical evaluations employing linear viscoelastic analogy method are being presented. The author revealed that the three phases method was more preferable than the Race method for determining parameters with high accuracy. Whiskerized systems, grown on the fiber surface and submerged into the viscoelastic layer, were proposed for use to enhance dissipative properties and retain mechanical ones. The author conducted studies on oscillations damping of the stratified composite hinged beam. The viscoelastic interlayer is being inserted into the composite beam to enhance its damping properties. Resonant frequency and modal losses coefficient of the beam are being evaluated by the Bernoulli-Euler beam model and Timoshenko model. It is noted that in case of transversely oriented fibers both models, i.e. the Bernoulli-Euler beam model and Timoshenko model, account for the shear deformations.

**Keywords:** composite material, damping properties, viscoelastic analogy method, modification of fiber surface, vibration damping

**Funding:** The work was supported by the grant of the President of the Russian Federation MK-3607.2022.1.1

**For citation:** Kriven G.I. Evaluation of damping properties of composites. *Trudy MAI*, 2022, no. 127. DOI: [10.34759/trd-2022-127-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-127-05)

## Введение

Резонансные колебания конструкций и их деталей требуют использования различных способов понижения уровней колебаний. Демпфирующая способность материала приводит к сильному ослаблению собственных колебаний и

существенному понижению амплитуд при вынужденных колебаниях [1]. При повторном деформировании материалы способны поглощать энергию за счет необратимых процессов в них самих и эта их способность используется для разработки вибропоглощающих покрытий и конструкционных материалов. Свойства демпфирующих материалов, применяемых в качестве вибропоглощающих покрытий, изучались в работах [2-5], а исследования динамических характеристик элементов конструкций проводились в работах [6-9]. На конструктивном уровне эффекты демпфирования сдвига широко используются в трехслойных балках и панелях, состоящих из мягких вязкоупругих заполнителей и жестких упругих лицевых панелей. Так называемое демпфирование стесненного слоя [10, 11] реализуется при поперечном нагружении, когда в мягком заполнителе запасается высокий уровень энергии деформации сдвига, а изгибающим моментам в основном сопротивляются лицевые панели. Такие многослойные конструкции хорошо известны своими высокими виброгасящими и звукопоглощающими свойствами и широко используются, в частности, в аэрокосмической, морской, гражданской и автомобильной технике [12–15].

В работе [16] изучались эффективные диссипативные свойства композитных материалов, состоящих из твердых полимерных матриц со сферическими включениями, покрытыми вязкоупругим слоем. Было установлено, что положения пиковых значений поперечных эффективных модулей потерь остаются практически неизменными при различных объемных содержаниях включений, а кривая зависимости поперечного эффективного модуля потерь от ширины вязкоупругого слоя имеет два пика.

В работе [17] было показано, что максимальное значение и форма второго пика не зависят от абсолютной жесткости вязкоупругого слоя, но проявляется на разных толщинах вязкоупругого слоя. Также в работе, отмечалось, что наличие ультратонкого слоя-покрытия из вязкоупругого материала приводит к значительным увеличениям эффективного модуля потерь в несколько десятков раз превышающего модуль потерь включения и матрицы. При этом использование ультратонкого слоя приводит не к таким значительным потерям эффективной жесткости, как использование более толстого вязкоупругого слоя.

В случае сдвигового нагружения композитного материала с вязкоупругим слоем в направлении вдоль волокна наблюдается одно пиковое значение, а в случае нагружения в направлении поперек волокна образуется два пиковых значения [17], которые соответствуют разным механизмам диссипации. При поперечном сдвиге второй пик реализуется на той же толщине вязкоупругого слоя, что и пик при продольном сдвиге, но имеет другую амплитуду. В работе [16] принято, что отношение абсолютной жесткости вязкоупругого слоя к абсолютной жесткости волокна стремится к нулю и предложена простая формула для определения объемного содержания, при котором модуль потерь принимает максимальное значение.

Сравнение эффективных модулей потерь, полученных с использованием методов Рейса, трех фаз и идеи вязкоупругой аналогии, для цилиндрических композитов, состоящих из жесткого включения и вязкоупругой матрицы, проводится в работе [18]. Отмечается, что метод трех фаз позволяет учесть влияние всех физических и геометрических параметров вискерсов и матрицы на эффективный

модуль потерь. За счет этого метод трех фаз обеспечивает более строгие оценки динамических характеристик, однако можно использовать и приближенные оценки, полученные на основе формул Рейсса.

Модификация поверхности волокна специальными наноструктурами-вискерсами позволяет увеличивать эффективные свойства волокнистых композитов [19-24]. В материалах, армированных волокном, демпфирование происходит в основном за счет матрицы и границы раздела матрица/волокно. Предполагается, что за счет модификации поверхности волокна вискеризированными структурами и путем правильного выбора их компонентов можно увеличить как эффективный модуль потерь, так и эффективную жесткость волокнистого композита.

В предложенной работе изучается влияние вязкоупругого покрытия на демпфирующие свойства композитных материалов при различных сдвиговых нагружениях. Одной из задач настоящей работы является определение объемного содержания вязкоупругого слоя, при котором модуль потерь принимает максимальное значение при любом отношении абсолютной жесткости вязкоупругого слоя к абсолютной жесткости волокна. Рассматривается волокнистый композитный материал, состоящий из трех фаз – волокна, вязкоупругого слоя и матрицы.

Исследуется демпфирование колебаний слоистой композитной шарнирно опертой балки с использованием стержневой модели Бернулли-Эйлера и модели Тимошенко. Показывается, что так как диссипативность в значительной степени определяется характером деформирования, то оценки диссипации при колебаниях стержней существенно зависят от выбора расчетных моделей. Поэтому для учета

сдвигового механизма диссипации предпочтительной является модель, учитывающая сдвиговые деформации – модель типа Тимошенко.

## 1. Постановка задачи

Для определения динамических демпфирующих свойств слоистых композитов и композитов с цилиндрическими включениями используется метод комплексных модулей упругости в рамках вязкоупругой аналогии. Например, сдвиговые свойства упругого включения задаются действительным модулем сдвига  $\mu_1 = b$ , а вязкоупругой матрицы комплексным модулем  $\mu_2 = a(1 + i\eta)$ , где  $a, b, \eta$  - вещественные параметры. В таком случае эффективный модуль сдвига определяется методами механики композитов также как комплексный модуль, для составной среды, состоящий из двух компонентов, где действительная часть является модулем упругости, описывающим эффективные упругие свойства материала, а мнимая часть представляет собой эффективный модуль потерь, описывающий демпфирующее поведение композита. Предполагается, что композитный материал нагружается полем деформации, изменяющемуся по гармоническому закону  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$ , где  $\omega$  - круговая частота, равная  $\omega = 1$  рад/сек.

Определим подходы к оценке эффективного модуля потерь при сдвиговых нагрузках слоистых композитов и композитов с цилиндрическими включениями для любого  $a/b$ , выработаем рекомендации по применению простых аналитических оценок эффективных свойств по методу Рейса, по также методу трех фаз при различных структурных особенностях исследуемых композитов.

Исследуем влияние параметра  $a/b$ , и объемного содержания вязкоупругого слоя на поведение модуля потерь. Исследуем трехфазную композитную структуру, состоящую из волокна, вязкоупругого слоя и матрицы. В частности рассмотрим композит, состоящий из волокна, межслоя, образованного вискеризованными структурами, погруженными в вязкоупругий материал, и матрицы. Предложим подход к подбору оптимальных физических и геометрических свойств волокнистой композитной вязкоупругой структуры, позволяющие получить одновременно высокие показатели эффективного модуля потерь и эффективной жесткости.

Рассмотрим многослойную композитную балку, слои которой образованы либо только продольно ориентированными волокнами, либо только поперечно ориентированными волокнами. Слои состоят из волокнистых композитов, в которых между упругим волокном и матрицей введена вязкоупругая прослойка. Считаем, что демпфирующие слои ведут себя как линейно-вязкоупругие и имеют сложные свойства материала, зависящие от частоты, поперечное перемещение между слоями не меняется, слои считаются несжимаемыми по толщине, нет проскальзывания между слоями. Собственная частота балки  $\omega_n$  и коэффициент потерь  $\eta_n$  определяются с использованием классического решения для балки Эйлера-Бернулли и при помощи теории С.П. Тимошенко.

## **2. Оценки модуля потерь слоистой системы по методу осреднения Рейса**

Для слоистой структуры эффективный модуль потерь определим, используя метод осреднения Рейса:

$$\frac{1}{\mu_{eff}} = \frac{f}{\mu_2} + \frac{1-f}{\mu_1}, \quad (1)$$

где  $f$  - объемное содержание вязкоупругого слоя. При заданной угловой частоте эффективный модуль сдвига определяется как  $\mu_{eff} = \mu' + i\mu''$ , где  $\mu''$  - модуль потерь,  $\mu'$  - модуль накопления. Полагая, что пики максимальных значений модуля реализуются в области малых объемных содержаний вязкоупругого слоя, и сделав в формуле (1) замену  $f/a = s$ , где  $s$  - малый параметр, ( $\mu_1 = b$ , а  $\mu_2 = a(1+i\eta)$ ) получим

$$\mu'' = \frac{b^2 s \eta}{(1+bs-f)^2 + (\eta-f\eta)^2} \quad (2)$$

Разложим функцию (2) в ряд Тейлора по малому параметру  $f$  и представим в виде

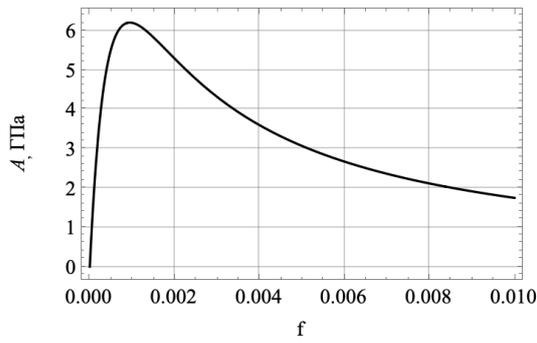
$$\mu'' = A \times B, \quad (3)$$

где

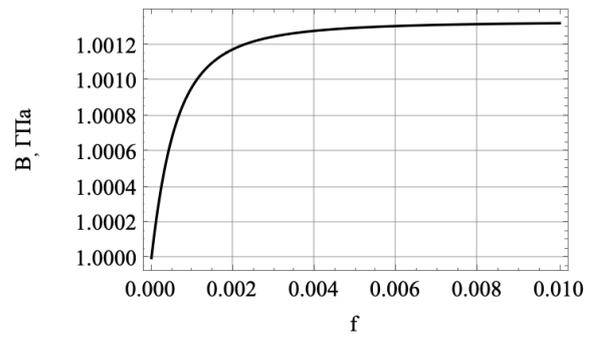
$$A = \frac{b^2 s \eta}{(1+bs)^2 + \eta^2}, \quad (4)$$

$$B = 1 + \frac{2(1+bs+\eta^2)f}{(1+bs)^2 + \eta^2} + \left( \frac{4(1+bs+\eta^2)^2}{((1+bs)^2 + \eta^2)^2} - \frac{1+\eta^2}{(1+bs)^2 + \eta^2} \right) f^2 \quad (5)$$

Исследуем поведение функций  $A$  (4) и  $B$  (5) в зависимости от объемного содержания вязкоупругого материала  $f$ . Зависимости, представленные на рисунке 1 а, б построены для следующих значений модулей упругости  $\mu_1 = 30$  ГПа,  $\mu_2 = 0.02(1+i)$  ГПа.



а)



б)

Рисунок 1 – Графики зависимости а) функции  $A$  от объемного содержания вязкоупругого слоя, б) функции  $B$  от объемного содержания вязкоупругого слоя

Следуя графикам рисунка 1, можно заключить, что на характер распределения модуля потерь от объемного содержания вязкоупругого слоя влияет только первый множитель  $A$  (4) функции (3). А второй множитель  $B$  (5) является монотонно возрастающей функцией, значение которой, на рассматриваемом промежутке значений  $f$  мало отклоняется от единицы.

Таким образом формулу (3) можно упростить и представить в виде

$$\mu'' = \frac{b^2 s \eta}{(1 + bs)^2 + \eta^2} \quad (6)$$

Исследуем функцию (6) на наличие экстремумов и определим объемное содержание вязкоупругого слоя при котором модуль потерь принимает максимальное значение, получим выражение

$$f_{max} = \frac{a\sqrt{1+\eta^2}}{b}, \quad (7)$$

которое полностью совпадает с формулой, полученной в работе [16] при  $a/b \rightarrow 0$ . Следовательно выражение (7) подходит для определения объемного содержания

вязкоупругого слоя при котором модуль потерь принимает максимальное значение для любых  $a / b$ .

Уравнение (7) позволяет получить приближенные оценки величины  $f_{max}$  для любых  $a / b$ .

Формулу (1) для определения модуля потерь, введя замены  $\mu_1 = b$  и  $\mu_2 = a(1 + i\eta)$  также можно записать в виде

$$\mu'' = \frac{bfx\eta}{(f + x - fx)^2 + (-x\eta + fx\eta)^2}, \quad (8)$$

где  $x = a / b$ .

В таком случае выражение для определения максимального объемного содержания принимает вид

$$f_{max} = \frac{\sqrt{x^2 + x^2\eta^2}}{\sqrt{1 - 2x + x^2 + x^2\eta^2}}. \quad (9)$$

Подстановка формул (7) и (9) соответственно в формулы (6) и (8) позволяет получить максимальное значение модуля потерь.

Расчеты показывают, что использование формул (6) и (8), дают фактически одни и те же результаты модуля потерь. На графике (Рисунок 3) показаны зависимости модулей потерь от объемного содержания вязкоупругого слоя.

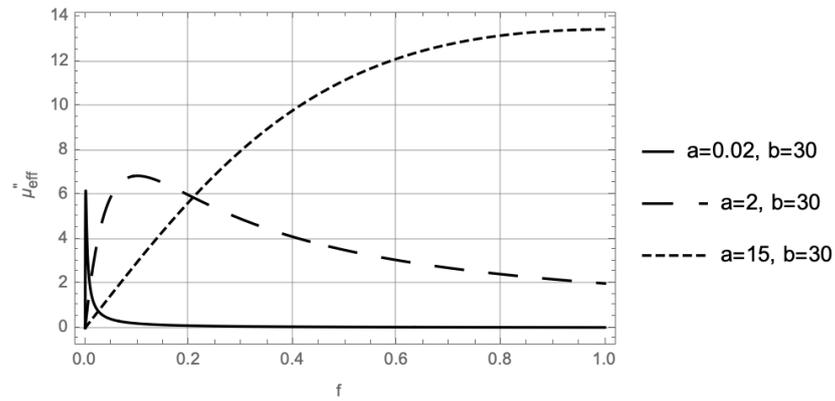


Рисунок 3 – Графики зависимости модуля потерь от объемного содержания вязкоупругого слоя

Чтобы оценить погрешности вычисления  $f_{max}$  на основе приближенного соотношения (7) построим для сравнения графики зависимости объемных содержаний на основе формул (7) и (9) (Рисунок 4).

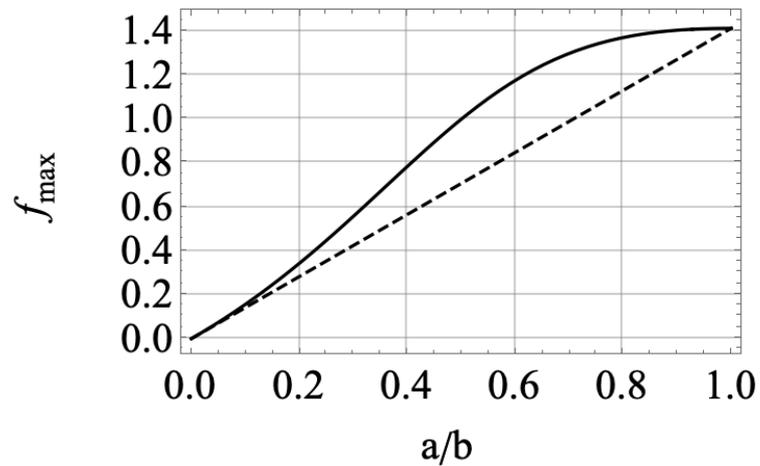


Рисунок 4 – График зависимости объемного содержания, при которых модуль потерь принимает максимальное значение, от  $a/b$  (пунктирная линия – график,

полученный при использовании формулы (7), сплошная линия – график,  
полученный при использовании формулы (9))

На графиках (Рисунок 4), построенных по формулам (7) и (9) видно, что формула (9) дает более строгие оценки для определения объемных содержаний, при которых модуль потерь принимает максимальное значение.

В связи с чем оказывается, что для вычисления модуля потерь слоистого материала с любыми параметрами  $a$  и  $b$  удобно использовать компактную формулу (6). А для определения объемного содержания, при котором модуль потерь принимает максимальное значение, для материалов с характеристиками  $a/b < 0.3$  можно использовать формулу (7), в то время как при  $a/b > 0.3$  больше подходит формула (9).

### **3. Метод Рейсса и метод трех фаз при оценке модуля потерь волокнистого композита с вязкоупругим слоем**

Рассмотрим волокнистый композит, образованный волокном, межфазным слоем и матрицей.

В случае нагружения такого волокнистого композита вдоль оси цилиндрического включения однородным полем деформации  $\varepsilon_0$ , при котором перемещения вдали от включения имеют вид  $u_z(r, \theta) = 2\varepsilon_0 r \cos \theta$  эффективный

продольный модуль сдвига  $\mu_{eff23}$  можно определить по методу трех фаз из системы 6 уравнений с 6 неизвестными ( $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$  и  $\mu_{eff23}$ ):

$$\begin{aligned}
1) \quad & D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}} - D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}} = 0, \\
2) \quad & D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}} - D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}} = 0, \\
3) \quad & D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}} - 2\varepsilon_0 r_3 = 0, \\
4) \quad & C_{55}^{(1)} \lambda_{(1)} D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}-1} - C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}-1} + C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}-1} = 0, \\
5) \quad & C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}-1} - C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}-1} - C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}-1} + \\
& \quad + C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}-1} = 0, \\
6) \quad & C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}-1} - C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}-1} - 2\varepsilon_0 \mu_{eff23} = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

где  $C_{ij}^{(i)}$  - упругие константы,  $r_1, r_2, r_3$  - радиусы волокна, межфазного слоя и матрицы,  $\lambda_{(i)} = \sqrt{G_{\theta z}^{(i)} / G_{rz}^{(i)}}$  - материальные константы. Для изотропного материала

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{44}^{(i)} / C_{55}^{(i)}} = 1$$

В случае нагружения волокнистого композита поперек оси цилиндрического включения однородным полем деформации  $\varepsilon_0$ , при котором перемещения вдали от включения имеют вид  $u_{rr}(r, \theta) = \varepsilon_0 r \cos(2\theta)$ ,  $u_{r\theta}(r, \theta) = -\varepsilon_0 r \sin(2\theta)$  эффективный поперечный модуль сдвига  $\mu_{eff12}$  можно определить по методу трех фаз из системы 12 уравнений с 12 неизвестными ( $D_1^{(1)}, D_3^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_3^{(2)}, D_4^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_3^{(3)}, D_4^{(3)}, D_4^{(N+1)}$  и  $\mu_{eff12}$ ):

$$\begin{aligned}
1) & (\phi_1^{(1)} D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}} + \phi_3^{(1)} D_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}}) - \\
& - (\phi_1^{(2)} D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}} + \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}} + \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}} + \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}}) = 0, \\
2) & (\phi_1^{(2)} D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(12)}} + \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}} + \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}} + \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}}) - \\
& - (\phi_1^{(3)} D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(13)}} + \phi_2^{(3)} D_2^{(3)} r_2^{\lambda_{(23)}} + \phi_3^{(3)} D_3^{(3)} r_2^{\lambda_{(33)}} + \phi_4^{(3)} D_4^{(3)} r_2^{\lambda_{(43)}}) = 0, \\
3) & \phi_1^{(3)} D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(13)}} + \phi_2^{(3)} D_2^{(3)} r_3^{\lambda_{(23)}} + \phi_3^{(3)} D_3^{(3)} r_3^{\lambda_{(33)}} + \phi_4^{(3)} D_4^{(3)} r_3^{\lambda_{(43)}} - \\
& (-D_4^{(N+1)} / r_3^3 + r_3 \varepsilon_0) = 0, \\
4) & -D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}} - \phi_3^{(1)} D_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}} - \\
& (-D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}} - D_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}} - D_3^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}} - D_4^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}}) = 0, \\
5) & -D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(12)}} - \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}} - \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}} - \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}} - \\
& (-D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(13)}} - \phi_2^{(3)} D_2^{(3)} r_2^{\lambda_{(23)}} - \phi_3^{(3)} D_3^{(3)} r_2^{\lambda_{(33)}} - \phi_4^{(3)} D_4^{(3)} r_2^{\lambda_{(43)}}) = 0, \\
6) & -D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(13)}} - \phi_2^{(3)} D_2^{(3)} r_3^{\lambda_{(23)}} - \phi_3^{(3)} D_3^{(3)} r_3^{\lambda_{(33)}} - \phi_4^{(3)} D_4^{(3)} r_3^{\lambda_{(43)}} - \\
& (-D_4^{(N+1)} / r_3^3 - r_3 \varepsilon_0) = 0, \\
7) & D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}-1} (C_{11}^{(1)} \lambda_{(11)} \phi_1^{(1)} + C_{12}^{(1)} (-2 + \phi_1^{(1)})) + \\
& + D_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}-1} (C_{11}^{(1)} \lambda_{(31)} \phi_3^{(1)} + C_{12}^{(1)} (-2 + \phi_3^{(1)})) - \\
& (D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(12)} \phi_1^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_1^{(2)})) + \\
& + D_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(22)} \phi_2^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_2^{(2)})) + \\
& + D_3^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(32)} \phi_3^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_3^{(2)})) + \\
& + D_4^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(42)} \phi_4^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_4^{(2)})) = 0, \\
8) & D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(12)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(12)} \phi_1^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_1^{(2)})) + \\
& + D_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(22)} \phi_2^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_2^{(2)})) + \\
& + D_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(32)} \phi_3^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_3^{(2)})) + \\
& + D_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(42)} \phi_4^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_4^{(2)})) \\
& - (D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(13)}-1} (C_{11}^{(3)} \lambda_{(13)} \phi_1^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_1^{(3)})) + \\
& + D_2^{(3)} r_2^{\lambda_{(23)}-1} (C_{11}^{(3)} \lambda_{(23)} \phi_2^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_2^{(3)})) \\
& + D_3^{(3)} r_2^{\lambda_{(33)}-1} (C_{11}^{(3)} \lambda_{(33)} \phi_3^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_3^{(3)})) + \\
& + D_4^{(3)} r_2^{\lambda_{(43)}-1} (C_{11}^{(3)} \lambda_{(43)} \phi_4^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_4^{(3)})) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9) \quad & D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(13)}^{-1}} \left( C_{11}^{(3)} \lambda_{(13)} \phi_1^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_1^{(3)}) \right) + \\
& + D_2^{(3)} r_3^{\lambda_{(23)}^{-1}} \left( C_{11}^{(3)} \lambda_{(23)} \phi_2^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_2^{(3)}) \right) \\
& + D_3^{(3)} r_3^{\lambda_{(33)}^{-1}} \left( C_{11}^{(3)} \lambda_{(33)} \phi_3^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_3^{(3)}) \right) + \\
& + D_4^{(3)} r_3^{\lambda_{(43)}^{-1}} \left( C_{11}^{(3)} \lambda_{(43)} \phi_4^{(3)} + C_{12}^{(3)} (-2 + \phi_4^{(3)}) \right) - \\
& 2(3D_4^{(N+1)} r_3^{\lambda_{(4N+1)}^{-1}} + \varepsilon_0) \mu_{eff12} = 0, \\
10) \quad & C_{66}^{(1)} (D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}^{-1}} (-\lambda_{(11)} - 1 - 2\phi_1^{(1)})) + \\
& + D_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}^{-1}} (-\lambda_{(31)} - 1 - 2\phi_3^{(1)}) - \\
& C_{66}^{(2)} (D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}^{-1}} (-\lambda_{(12)} - 1 - 2\phi_1^{(2)})) + \\
& + D_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}^{-1}} (-\lambda_{(22)} - 1 - 2\phi_2^{(2)}) \\
& + D_3^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}^{-1}} (-\lambda_{(32)} - 1 - 2\phi_3^{(2)}) + \\
& + D_4^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}^{-1}} (-\lambda_{(42)} - 1 - 2\phi_4^{(2)}) = 0, \\
11) \quad & C_{66}^{(2)} (D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(12)}^{-1}} (-\lambda_{(12)} - 1 - 2\phi_1^{(2)})) + \\
& + D_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}^{-1}} (-\lambda_{(22)} - 1 - 2\phi_2^{(2)}) + \\
& + D_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}^{-1}} (-\lambda_{(32)} - 1 - 2\phi_3^{(2)}) + \\
& + D_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}^{-1}} (-\lambda_{(42)} - 1 - 2\phi_4^{(2)}) - \\
& C_{66}^{(3)} (D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(13)}^{-1}} (-\lambda_{(13)} - 1 - 2\phi_1^{(3)})) + \\
& + D_2^{(3)} r_2^{\lambda_{(23)}^{-1}} (-\lambda_{(23)} - 1 - 2\phi_2^{(3)}) \\
& + D_3^{(3)} r_2^{\lambda_{(33)}^{-1}} (-\lambda_{(33)} - 1 - 2\phi_3^{(3)}) + \\
& + D_4^{(3)} r_2^{\lambda_{(43)}^{-1}} (-\lambda_{(43)} - 1 - 2\phi_4^{(3)}) = 0, \\
12) \quad & C_{66}^{(3)} (D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(13)}^{-1}} (-\lambda_{(13)} - 1 - 2\phi_1^{(3)})) + \\
& + D_2^{(3)} r_3^{\lambda_{(23)}^{-1}} (-\lambda_{(23)} - 1 - 2\phi_2^{(3)}) + \\
& + D_3^{(3)} r_3^{\lambda_{(33)}^{-1}} (-\lambda_{(33)} - 1 - 2\phi_3^{(3)}) + \\
& + D_4^{(3)} r_3^{\lambda_{(43)}^{-1}} (-\lambda_{(43)} - 1 - 2\phi_4^{(3)}) - \\
& (4D_4^{(N+1)} \mu_{eff12} r_3^{\lambda_{(4N+1)}^{-1}} - 4\varepsilon_0 \mu_{eff12}) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Вывод формул (10) и (11) представлен в работах [25-27].

Волокнистый композит, образованный волокном, вязкоупругим межфазным слоем и матрицей, у которого физические свойства волокна и матрицы равны между собой, рассмотрим отдельно как слоистый композит и как композит с цилиндрическим включением. Будем считать, что оба композита состоят из двух слоев – жесткого включения и вязкоупругой матрицы. Тогда модуль потерь такого композита можно определить при помощи метода Рейса, используя формулу (8), а также по методу трех фаз, расширенного на многофазную среду. Модуль потерь по методу трех оценивается по формуле (10) в случае чистого сдвига вдоль волокна и по формуле (11) в случае чистого сдвига поперек волокна. Положим, что радиус включения – волокна, покрытого вязкоупругим слоем, равен радиусу матрицы, т.е.  $r_2 = r_3$ . На рисунке 5 представлены графики зависимости эффективных сдвиговых модулей потерь от толщины межфазного вязкоупругого слоя  $\Delta / r_1$ . Считаем, что волокно и вязкоупругий слой являются изотропными материалами со следующими свойствами: модуль объемного расширения волокна  $k_1 = 40$  ГПа, модуль сдвига волокна  $\mu_1 = 30$  ГПа, модуль объемного расширения и вязкоупругого межфазного слоя  $k_2 = 4$  ГПа, модуль сдвига вязкоупругого межфазного слоя  $\mu_2 = 0,02(1+i)$  ГПа.

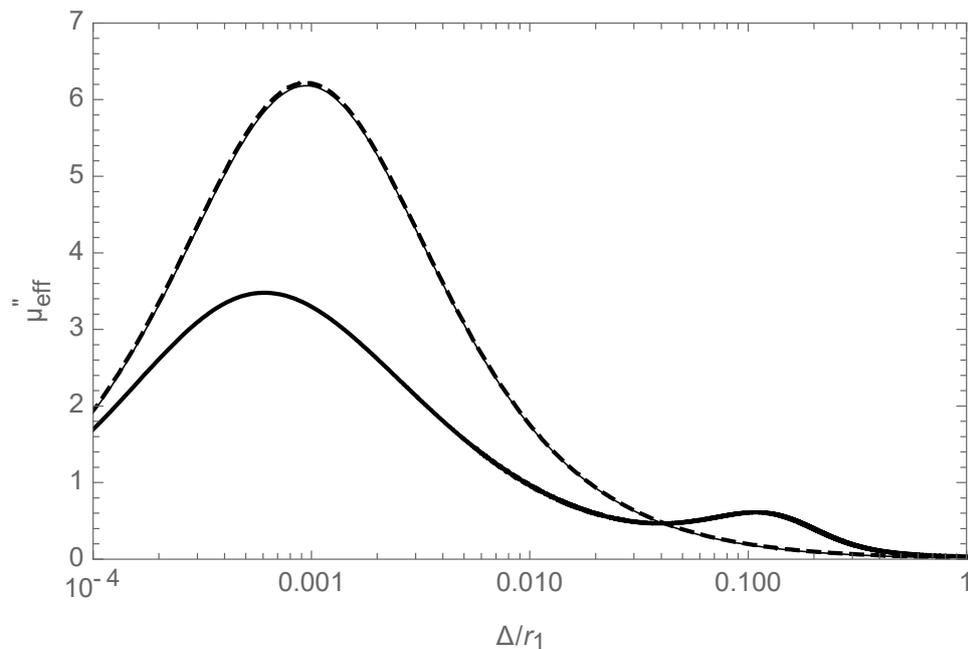


Рисунок 5 – График зависимости эффективного модуля потерь от толщины вязкоупругого слоя. Сплошная жирная линия – эффективный модуль потерь, полученный по методу трех фаз, в случае чистого сдвига поперек волокон; сплошная тонкая линия – эффективный модуль потерь, полученный по методу трех фаз, в случае чистого сдвига вдоль волокон, пунктирная линия - - эффективный модуль потерь, полученный по методу Рейсса

Согласно рисунку 5 использование метода Рейсса позволяет получить результаты, полностью соответствующие результатам, полученным по методу трех фаз в случае чистого сдвига вдоль волокна. Однако, в случае чистого сдвига поперек волокна, метод Рейсса приводит к завышенным численным результатам модуля потерь, нежели метод трех фаз, а также не позволяет отследить еще одну область пиковых значений эффективного модуля потерь.

#### 4. Волокнистый композит с вязкоупругим слоем

Исследуем влияние  $a/b$  на наличие пиковых значений эффективного модуля потерь в случае чистого сдвига поперек волокон. Согласно рассуждениям, приведенным в разделе 3, при исследовании эффективных свойств композита с цилиндрическими включениями, покрытыми вязкоупругим слоем, в случае чистого сдвига поперек волокон, предпочтительно использовать метод трех фаз. Рассмотрим композит, состоящий из трех слоев – кремниевого волокна ( $k_1 = 50$  ГПа,  $\mu_1 = 30$  ГПа), вязкоупругого слоя с переменными свойствами  $a$  ( $k_2 = 4$  ГПа,  $\mu_2 = a(1+i)$  ГПа) и эпоксидной матрицы ( $k_3 = 2.5$  ГПа,  $\mu_3 = 1.15$  ГПа). Объемное содержание волокна, покрытого вязкоупругим слоем, в матричном слое примем равным 50 %. На рисунке 6 представлены графики зависимости эффективного поперечного модуля потерь и эффективного модуля поперечного сдвига от толщины вязкоупругого слоя при различных  $a/b$  (1/30, 0.1/30, 0.01/30, 0.001/30).

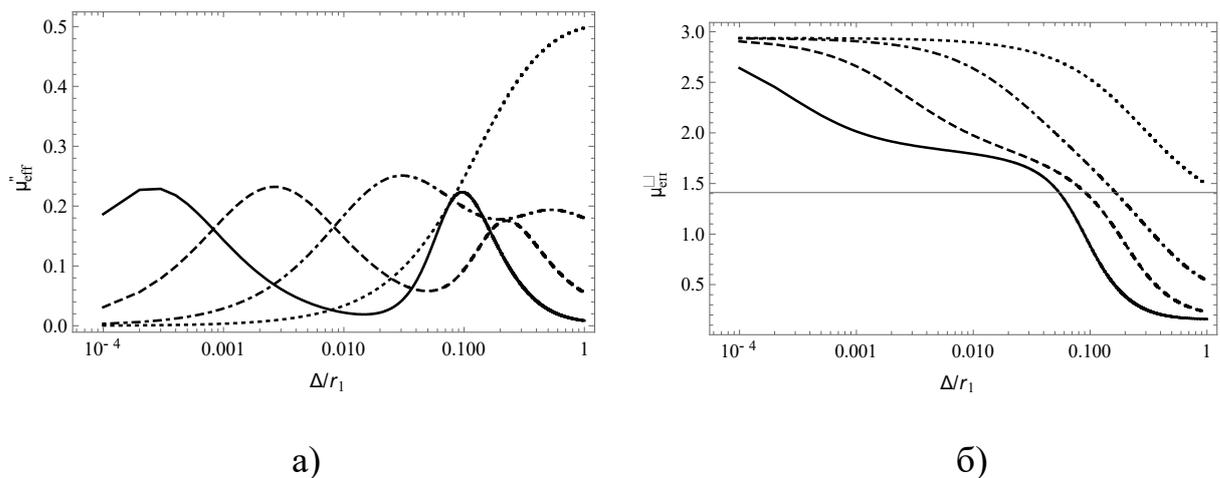


Рисунок 6 – Влияние отношения  $a/b$  на эффективный модуль потерь поперечного сдвига (а) и на эффективный модуль поперечного сдвига (б)

$$\cdots \mu=1(1+i) \quad \cdots \mu=0.1(1+i) \quad \cdots \mu=0.01(1+i) \quad \text{—} \mu=0.001(1+i)$$

Согласно рисунку 6 а) при малых отношениях  $a/b$  ( $a/b = 0.01/30, 0.001/30$ ) на малых толщинах проявляются пиковые значения эффективного поперечного модуля потерь, которые больше модуля потерь матрицы в 20-200 раз. Такая структура может быть интересной с точки зрения модификации поверхности волокна тонким вязкоупругим слоем, однако технологически такая толщина вязкоупругого слоя трудно достижима. В то же время, при больших толщинах и при больших значениях  $a/b$  также наблюдается рост эффективного модуля потерь по сравнению с модулем потерь матрицы. Так, например, при  $\Delta/r_1$  от 0.1 до 1 и при отношении  $a/b = 0.1/30$  наблюдаются стабильные значения эффективного модуля потерь, превышающие модуль потерь матрицы в два раза.

Исследуем также модуль накопления, используя те же волокнистые композитные структуры с теми же свойствами компонент. На рисунке 6 б) приведены графики зависимости модуля накопления от толщины вязкоупругого слоя при различных  $a/b$ . При оценке модуля накопления, предпочтительными оказываются, наоборот, большие значения отношения  $a/b$

## 5. Волокнистый композит с вискеризованным вязкоупругим слоем

Согласно исследованиям, проведенным в работах [19, 20], модификация поверхности волокна, путем выращивания перпендикулярно его поверхности

специальных наноструктур – вискерсов, позволяет значительно повышать жесткостные свойства волокнистого композита.

В работах [19, 20, 27] оценивалось влияние различных физических и геометрических параметров вискерсов и матрицы на эффективный модуль потерь вискеризованного слоя в случае чистого сдвига вдоль вискерсов, что дает нам основания использовать эти данные при исследовании динамических свойств всего композита с вискеризованными волокнами в случае нагружения его чистым сдвигом поперек волокна. Особенностью вискеризованного слоя является то, что плотность вискерсов меняется с расстоянием от поверхности волокна, и, следовательно, зависит от длины нановискерсов (толщины межфазного слоя). Оказывается, при этом, что объемная доля матрицы в вискеризованном слое даже при максимальной плотности нановискерсов, выращенных на поверхности волокна и для достаточно тонких межфазных слоев весьма значительна и превышает 30 % (в случае использования в качестве вискерсов нанотрубок из окиси цинка) и 50 % (в случае использования в качестве вискерсов нанотрубок из окиси цинка) [18]. Однако, даже в таком случае, ожидается увеличение модуля потерь вискеризованного слоя более чем в 2 раза.

Для одновременного увеличения как динамических, так и жесткостных свойств, интересной для исследования оказывается область вязкоупругого слоя достаточно малой толщины ( $\Delta / r_1 = 0.0001$ ). Исследуем модифицированный композит с вискеризованными волокнами, состоящий из кремниевого волокна, вязкоупругого слоя с переменными свойствами и эпоксидной матрицы (параметры материала указаны в разделе 4), принимая  $a / b = 0.001 / 30$ . Оценим влияние параметра  $\eta$  на

эффективный поперечный модуль потерь и эффективный модуль поперечного сдвига.

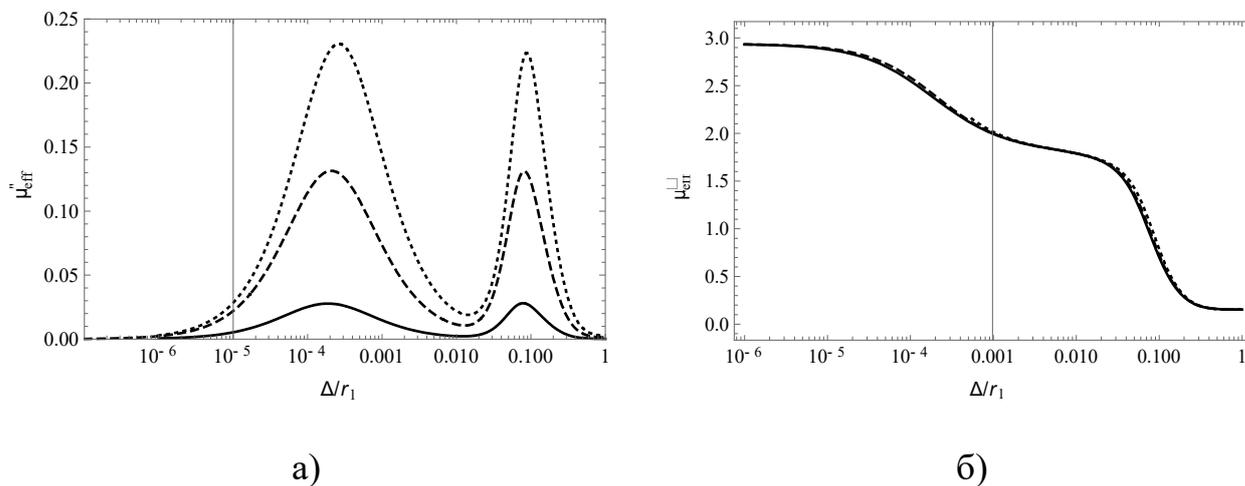


Рисунок 7 – Влияние параметра  $\eta$  на эффективный поперечный модуль потерь (а) и эффективный модуль поперечного сдвига (б)

..... -  $\eta=1$ , ----- -  $\eta=0.5$ , — -  $\eta=1$

## 6. Изгибные колебания многослойной композитной вязкоупругой балки

Рассмотрим многослойную композитную вязкоупругую балку, состоящую из четырех слоев. Слои такой балки состоят из кремниевого волокна ( $k_1 = 50$  ГПа,  $\mu_1 = 30$  ГПа), вязкоупругого слоя ( $k_2 = 4$  ГПа,  $\mu_2 = 0.001(1+i)$  ГПа) и эпоксидной матрицы ( $k_3 = 2.5$  ГПа,  $\mu_3 = 1.15$  ГПа). Толщина слоя определяется диаметров матрицы. Объемное содержание волокна, покрытого вязкоупругим слоем, в

матричном слое составляет 50 %. Изучается поведение многослойной композитной вязкоупругой балки при продольном и поперечном ориентировании волокон.

Резонансная частота балки  $\omega_n$  и коэффициент потерь  $\eta_n$  находятся по формулам

$$\omega_n = \sqrt{\operatorname{Re}((\omega_n^*)^2)}, \quad (12)$$

$$\eta_n = \frac{\operatorname{Im}(\omega_n^2)}{\operatorname{Re}(\omega_n^2)}, \quad (13)$$

где  $\omega_n^*$  - комплексная собственная частота, которая находится с использованием классического решения для балки Эйлера-Бернулли, или при помощи теории С.П. Тимошенко.

Классическое решение для комплексной собственной частоты  $(\omega_n^*)_{classic}$  в стержневой модели Бернулли-Эйлера имеет вид:

$$(\omega_n^*)_{classic} = k_n^2 \sqrt{\frac{D_1}{\mu}}, \quad (14)$$

где  $k_n = \pi n / L (n = 1, 2, \dots)$  - волновое число  $n$ -ой формы колебания,  $L$  - длина балки,  $D_1 = E_{eff} h^3 / (12(1 - \nu_{eff}^2))$  - цилиндрическая жесткость,  $E_{eff}$  - эффективный модуль упругости,  $\nu_{eff}$  - эффективный коэффициент Пуассона,  $h$  - толщина балки,  $\mu$  - масса на единицу площади.

Комплексная собственная частота  $(\omega_n^*)_{Timoshenko}$  при использовании модели типа Тимошенко имеет вид:

$$(\omega_n^*)_{Timoshenko} = \sqrt{\lambda_n^2 (\mu_{eff} / \rho) + k_n^2 (E_{eff} / \rho)} \quad (15)$$

где  $\lambda_n = \pi n / L (n=1,2\dots)$ ,  $\mu_{eff}$  - эффективный модуль сдвига,  $\rho$  - плотность материала.

Эффективные свойства  $E_{eff}$ ,  $\nu_{eff}$ ,  $\mu_{eff}$  многослойной композитной вязкоупругой балки находятся по формулам, полученным с использованием метода трех фаз, расширенного на многофазную структуру.

В случае, когда слои балки состоят из волокон, уложенных вдоль балки эффективный продольный модуль сдвига  $\mu_{eff23}$  определяется из системы уравнений (10), эффективный коэффициент Пуассона  $\nu_{eff31}$  находим из системы 6 уравнений с 6 неизвестными ( $D_1^{(1)}$ ,  $D_1^{(2)}$ ,  $D_2^{(2)}$ ,  $D_1^{(3)}$ ,  $D_2^{(3)}$  и  $\nu_{eff31}$ ):

$$\begin{aligned}
1) \quad & D_1^{(1)} r_1^{\lambda(1)} - D_1^{(2)} r_1^{\lambda(2)} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda(2)} = 0, \\
2) \quad & D_1^{(2)} r_2^{\lambda(2)} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda(2)} - D_1^{(3)} r_2^{\lambda(3)} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda(3)} = 0, \\
3) \quad & D_1^{(3)} r_3^{\lambda(3)} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda(3)} = -\nu_{31eff} \varepsilon_0 r_3 \\
4) \quad & D_1^{(1)} (\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) r_1^{\lambda(1)-1} + C_{13}^{(1)} \varepsilon_0 - \\
& - D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{\lambda(2)-1} - D_2^{(2)} (-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{-\lambda(2)-1} - \\
& - C_{13}^{(2)} \varepsilon_0 = 0, \\
5) \quad & D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{\lambda(2)-1} + D_2^{(2)} (-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{-\lambda(2)-1} + \\
& + C_{13}^{(2)} \varepsilon_0 - D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{\lambda(3)-1} - \\
& - D_2^{(3)} (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{-\lambda(3)-1} - C_{13}^{(3)} \varepsilon_0 = 0, \\
6) \quad & D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{\lambda(3)-1} + D_2^{(3)} (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{-\lambda(3)-1} + \\
& + C_{13}^{(3)} \varepsilon_0 = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

эффективный продольный модуль Юнга  $E_{eff33}$  находим по формуле

$$E_{eff33} = \frac{2}{\varepsilon_0 r_3^2} \sum_{i=1}^3 \int_{r_{i-1}}^{r_i} \sigma_{zz}^{(i)} r dr, \tag{17}$$

где  $\sigma_{zz}^{(i)}$  - поле напряжений в каждой из фаз.

В случае, когда слои балки состоят из волокон, уложенных поперек балки эффективный поперечный модуль сдвига  $\mu_{eff12}$  определяется из системы уравнений (11), эффективный модуль поперечного сдвига определяется по формуле:

$$E_{eff11} = \frac{4\mu_{eff12}K_{eff12}}{K_{eff12} + \mu_{eff12} + 4(\nu_{31eff})^2 \mu_{eff12}K_{eff12} / E_{eff33}}, \quad (18)$$

где  $K_{eff12}$  - эффективный объемный модуль плоской деформации,

а эффективный коэффициент Пуассона  $\nu_{eff13}$  определяется из соотношения:

$$\frac{\nu_{eff31}}{E_{eff33}} = \frac{\nu_{eff13}}{E_{eff11}}.$$

Выводы формул (16)-(18) приведены в работах [25-27].

Разные модели оценки колебаний шарнирно опертой балки позволяют учесть разные механизмы диссипации. Изучим резонансные частоты изгибных колебаний и коэффициенты модальных потерь. Для этого воспользуемся формулами (12) и (13) и подставим в них значения комплексной собственной частоты  $(\omega_n^*)_{classic}$ , найденное по формуле (14), и значение  $(\omega_n^*)_{Timoshenko}$ , найденное по формуле (15). На рисунке 8 а) представлены графики зависимости резонансной частоты, нормированной на квадрат плотности от толщины вязкоупругого слоя, а на рисунке 8 б) – график зависимости коэффициента модальных потерь от толщины вязкоупругого слоя. Графики построены для двух различных типов укладки волокон, для 1-ой формы частоты колебания, а длина балки  $L$  принимается равной единице.

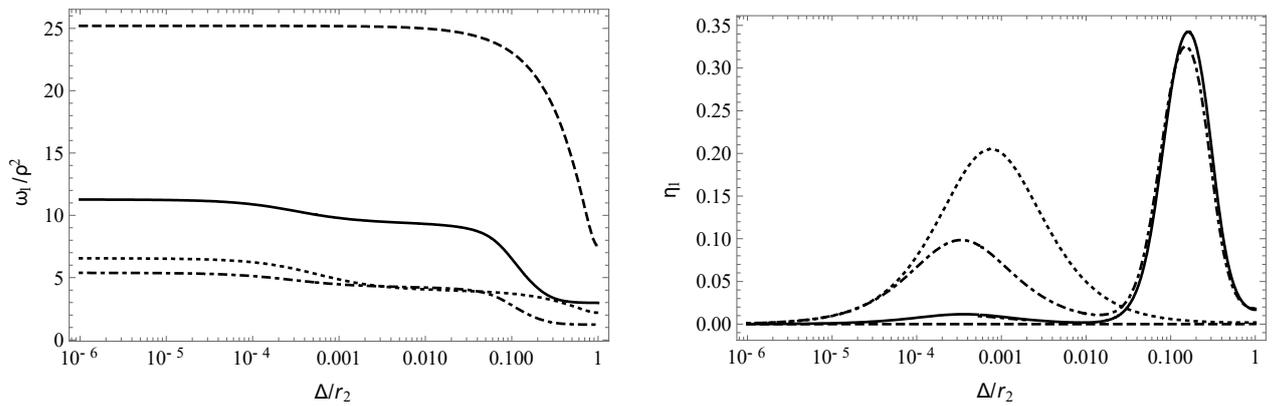
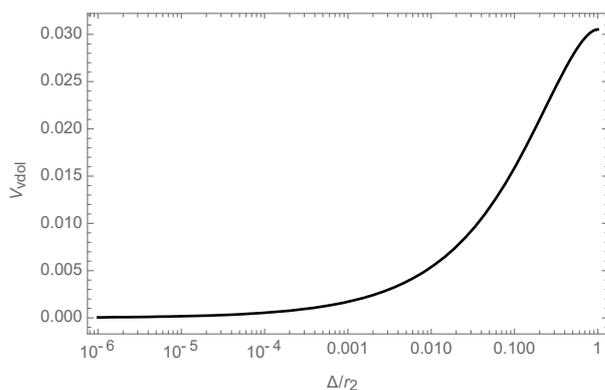


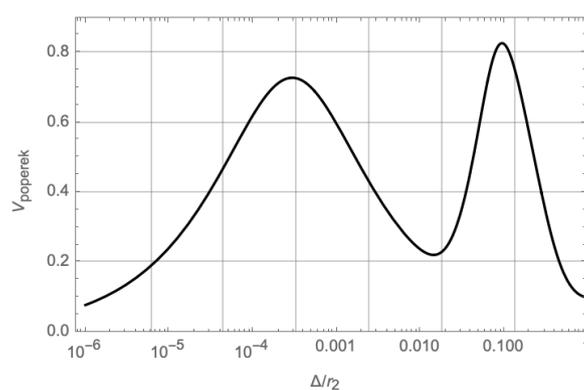
Рисунок 8 а) График зависимости резонансной частоты, нормированной на квадрат плотности, от толщины вязкоупругого слоя; б) График зависимости коэффициента модальных потерь от толщины вязкоупругого слоя. ----- - модель Тимошенко, волокна уложены вдоль балки, - - - - - модель Тимошенко, волокна уложен поперек балки, - - - - - классическая модель, волокна уложены вдоль балки, — - классическая модель, волокна уложены поперек балки.

Модель Эйлера-Бернулли фактически пренебрегает сдвигом и позволяет учитывать только механизм растяжения-сжатия. Модель Тимошенко позволяет частично учесть оба механизма. Скорость распространения продольных волн в тонком стержне, вызванных его продольным растяжением и сжатием можно оценить по формуле  $V = \sqrt{E_{eff} / \rho}$ .

На рисунке 9 показаны зависимости скорости продольных волн в слоистых шарнирно опертых балках от толщин вязкоупругих включений, расположенных между упругими волокном и матрицей.



а)



б)

Рисунок 9 а) Зависимость скорости продольной волны от толщины вязкоупругого включения при продольной укладке волокон, б) Зависимость скорости продольной волны от толщины вязкоупругого включения при поперечной укладке волокон

Продольная волна в случае укладки волокон поперек балки связана с эффективным модулем поперечного сдвига, поэтому учитывает сдвиговую диссипацию при малых объемных содержаниях вязкоупругого слоя.

### Заключение

В работе рассмотрены задачи сдвигового нагружения вязкоупругих композитов. Предложены подходы к определению динамических демпфирующих свойств слоистых композитов и композитов с цилиндрическими включениями. Были рассмотрены слоистые композиты, состоящие из упругих включений и вязкоупругих матриц и волокнистые композиты, состоящие из упругих волокна и матрицы и вязкоупругого межфазного слоя.

В основе предлагаемых подходов оценки демпфирующих положены метод Рейса, метод трех фаз и метод вязкоупругой аналогии. Было показано, что на основе метода Рейса могут быть получены простые формулы для определения эффективного модуля потерь слоистых композитов и композитов с цилиндрическими включениями, нагруженных продольным сдвигом. Такие формулы позволяют учитывать влияние свойств  $a, b, \eta$ , и толщины вязкоупругого слоя на эффективные свойства композита. Однако, в случае определения эффективного поперечного модуля потерь метод Рейса не позволяет учесть полный механизм работы волокнистого композита и отследить все пиковые значения эффективного модуля потерь. Поэтому в случае чистого сдвига поперек волокон полезно использовать формулы, полученные на основе метода трех фаз.

Введение в композит вязкоупругих слоев позволяет значительно увеличивать эффективный поперечный модуль потерь композита, но, показано, что эффективный модуль поперечного сдвига стремительно падает по мере увеличения толщины вязкоупругого слоя.

В работе сделано предположение, что введение в вязкоупругий слой специальных наноструктур – вискерсов, позволит одновременно увеличивать эффективный поперечный модуль потерь, сохраняя достаточно высокие значения эффективного модуля поперечного сдвига.

Решена задача определения собственной частоты вязкоупругой композитной балки и коэффициента потерь. Показано, что классическая стержневая модель Бернулли-Эйлера изгибные колебания учитывает только при поперечной укладке

волокон. А модель типа Тимошенко позволяет учесть сдвиговой механизм диссипации как при продольной, так и при поперечной укладке волокон.

### Список источников

1. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний – М.: Мир, 1988. – 488 с.
2. Поляков П.О., Шестеркин П.С. Численное моделирование демпфирующих покрытий // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168998>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-12](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-12)
3. Рабинский Л.Н., Бабайцев А.В., Шестеркин П.С. Определение демпфирующих свойств металлической ленты марки ЗМ на базе решения обратной задачи динамики трехслойного стержня и экспериментальных данных // Механика композиционных материалов и конструкций. 2022. Т. 28. № 3. С. 387-398.
4. Wu G., Yang J.-M. The mechanical behavior of GLARE laminates for aircraft structures // JOM: the journal of the Minerals, Metals & Materials Society, 2005, vol. 57 (1), pp. 72–79. DOI: [10.1007/s11837-005-0067-4](https://doi.org/10.1007/s11837-005-0067-4)
5. Vogeslang L.B., Volt A. Development of Fibre Metal Laminates for Advanced Aerospace Materials // Journal of Materials Processing Technology, 2000, vol. 103 (1), pp. 1–5. DOI: [10.1016/S0924-0136\(00\)00411-8](https://doi.org/10.1016/S0924-0136(00)00411-8)
6. Прокудин О.А., Рабинский Л.Н., Тханг Ч.К. Определение динамических характеристик металлополимерного слоистого стержня // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161419>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-06)

7. Прокудин О.А., Соляев Ю.О., Бабайцев А.В., Артемьев А.В., Коробков М.А. Динамические характеристики трехслойных балок с несущими слоями из алюмокомпозитов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 4. С. 260-270. DOI:[10.15593/perm.mech/2020.4.22](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.22)
8. Botelho E.C., Silva R.A., Pardini L.C., Rezende M.C. A review on the development and properties of continuous fiber/epoxy/aluminum hybrid composites for aircraft structures // Materials Research, 2006, vol. 9 (3), pp. 247–256. DOI:[10.1590/S1516-14392006000300002](https://doi.org/10.1590/S1516-14392006000300002)
9. Соломатов В.И., Черкасов В.Д., Фомин Н.Е. Вибропоглощающие композиционные материалы. – Саранск: Изд-во Мордовского университета, 2001. – 96 с.
10. Ungar E.E. Loss factors of viscoelastically damped beam structures // Journal of the Acoustical Society of America, 1962, vol. 34 (8), pp. 1082-1089. URL: <https://doi.org/10.1121/1.1918249>
11. Jones D.I.G. Handbook of Viscoelastic Vibration Damping. Wiley, New York, 2001, 416 p.
12. Rao M.D. Recent applications of viscoelastic damping for noisecontrol in automobiles and commercial airplanes // Journal of Sound and Vibration, 2003, vol. 262 (3), pp. 457-474. URL: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00106-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00106-8)
13. D'Alessandro V., Petrone G., Franco F., Rosa S.D. A review of the vibroacoustics of sandwich panels: Models and experiments // Journal of Sandwich Structures Materials, 2013, vol. 15 (5), pp. 541-582. URL: <https://doi.org/10.1177/1099636213490588>

14. Njuguna J. *Lightweight Composite Structures in Transport Design, Manufacturing, Analysis and Performance*, Woodhead publishing, Cambridge, 2016, 474 p.
15. Lurie S., Solyaev Y., Ustenko A. Optimal Damping Behavior of a Composite Sandwich Beam Reinforced with Coated Fibers // *Applied Composite Materials*, 2019, vol. 26, pp. 389–408. DOI:[10.1007/s10443-018-9698-9](https://doi.org/10.1007/s10443-018-9698-9)
16. Gusev A.A., Lurie S.A. Loss Amplification Effect in Multiphase Materials with Viscoelastic Interfaces // *Macromolecules*, 2009, no. 42, pp. 5372–5377. DOI:[10.1021/ma900426v](https://doi.org/10.1021/ma900426v)
17. Lurie S., Minhat M., Tuchkova N., Soliaev J. On remarkable loss amplification mechanism in filled and layered composite materials // *Applied Composite Materials*, 2014, vol. 21 (1), pp.179-196. DOI:[10.1007/s10443-013-9371-2](https://doi.org/10.1007/s10443-013-9371-2)
18. Кривень Г.И., Маковский С.В. О демпфирующих свойствах вискеризованного слоя в модифицированных волокнистых композитах // *Труды МАИ*. 2020. № 114. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118729>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-03](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-03)
19. Lurie S.A, Minhat M. Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites // *Composites B*, 2014, vol. 61, pp. 26-40. DOI:[10.1016/J.COMPOSITESB.2014.01.021](https://doi.org/10.1016/J.COMPOSITESB.2014.01.021)
20. Lurie S.A., Volkov-Bogorodskii D.B., Kriven G.I., Rabinskiy L.N. On estimating structural stresses in composites with whiskerized fibers // *International Journal of Civil Engineering & Technology (IJCIET)*, 2018, vol. 9 (6), pp. 294-308.
21. Song Q., Li Ke-zhi, Li Hai-liang, Li He-jun, Chang Ren. Grafting straight carbon nanotubes radially onto carbon fibers and their effect on the mechanical properties of

- carbon/carbon composites // Carbon, 2012, vol. 50, pp. 3943-3960.  
DOI:[10.1016/j.carbon.2012.03.023](https://doi.org/10.1016/j.carbon.2012.03.023)
22. Lv P., Feng Y., Zhang P., Chen H., Zhao N., Feng W. Increasing the interfacial strength in carbon fiber/epoxy composites by controlling the orientation and length of carbon nanotubes grown on the fibers // Carbon, 2011, vol. 49, pp. 4665-4673.  
DOI:[10.1016/j.carbon.2011.06.064](https://doi.org/10.1016/j.carbon.2011.06.064)
23. Zhang Fu-Hua, Wang Rong-Guo, He Xiao-Dong, Wang C., Ren Li-Ning. Interfacial shearing strength and reinforcing mechanisms of an epoxy composite reinforced using a carbon nanotube/carbon fiber hybrid // Journal of Material Science, 2019, vol. 44 (13), pp. 3574-3577. DOI:[10.1007/s10853-009-3484-x](https://doi.org/10.1007/s10853-009-3484-x)
24. Sharma S.P., Lakkad S.C. Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites // Surface & Coatings Technology, 2010, vol. 205 (2), pp. 350-355. DOI:[10.1016/j.surfcoat.2010.06.055](https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2010.06.055)
25. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. - 334 с.
26. Herve E., Zaoui A. N-layered inclusion-based micromechanical model // International Journal of Engineering Science, 1993, vol. 31 (1), pp. 1–10. DOI:[10.1016/0020-7225\(93\)90059-4](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90059-4)
27. Лурье С.А., Кривень Г.И., Рабинский Л.Н. О прочности модифицированного композита с вискеризованными волокнами // Композиты и наноструктуры. 2019. Т. 11. № 1. С. 1-15.

## References

1. Nashif A., Dzhouns D., Khenderson Dzh. *Dempfirovanie kolebaniĭ* (Vibration damping), Moscow, Mir, 1988, 488 p.
2. Polyakov P.O., Shesterkin P.S. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168998>. DOI: [10.34759/trd-2022-126-12](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-12)
3. Rabinskii L.N., Babaitsev A.V., Shesterkin P.S. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 387-398.
4. Wu G., Yang J.-M. The mechanical behavior of GLARE laminates for aircraft structures, *JOM: the journal of the Minerals, Metals & Materials Society*, 2005, vol. 57 (1), pp. 72–79. DOI:[10.1007/s11837-005-0067-4](https://doi.org/10.1007/s11837-005-0067-4)
5. Vogeslang L.B., Volt A. Development of Fibre Metal Laminates for Advanced Aerospace Materials, *Journal of Materials Processing Technology*, 2000, vol. 103 (1), pp. 1–5. DOI:[10.1016/S0924-0136\(00\)00411-8](https://doi.org/10.1016/S0924-0136(00)00411-8)
6. Prokudin O.A., Rabinskii L.N., Tkhang Ch.K. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161419>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-06)
7. Prokudin O.A., Solyaev Yu.O., Babaitsev A.V., Artem'ev A.V., Korobkov M.A. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2020, no. 4, pp. 260-270. DOI:[10.15593/perm.mech/2020.4.22](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.22)
8. Botelho E.C., Silva R.A., Pardini L.C., Rezende M.C. A review on the development and properties of continuous fiber/epoxy/aluminum hybrid composites for aircraft structures, *Materials Research*, 2006, vol. 9 (3), pp. 247–256. DOI:[10.1590/S1516-14392006000300002](https://doi.org/10.1590/S1516-14392006000300002)

9. Solomatov V.I., Cherkasov V.D., Fomin N.E. *Vibropogloshchayushchie kompozitsionnye materialy* (Vibration-absorbing composite materials), Saransk, Izd-vo Mordovskogo universiteta, 2001, 96 p.
10. Ungar E.E. Loss factors of viscoelastically damped beam structures, *Journal of the Acoustical Society of America*, 1962, vol. 34 (8), pp. 1082-1089. URL: <https://doi.org/10.1121/1.1918249>
11. Jones D.I.G. *Handbook of Viscoelastic Vibration Damping*. Wiley, New York, 2001, 416 p.
12. Rao M.D. Recent applications of viscoelastic damping for noisecontrol in automobiles and commercial airplanes, *Journal of Sound and Vibration*, 2003, vol. 262 (3), pp. 457-474. URL: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00106-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00106-8)
13. D'Alessandro V., Petrone G., Franco F., Rosa S.D. A review of the vibroacoustics of sandwich panels: Models and experiments, *Journal of Sandwich Structures Materials*, 2013, vol. 15 (5), pp. 541-582. URL: <https://doi.org/10.1177/1099636213490588>
14. Njuguna J. *Lightweight Composite Structures in Transport Design, Manufacturing, Analysis and Performance*, Woodhead publishing, Cambridge, 2016, 474 p.
15. Lurie S., Solyaev Y., Ustenko A. Optimal Damping Behavior of a Composite Sandwich Beam Reinforced with Coated Fibers, *Applied Composite Materials*, 2019, vol. 26, pp. 389–408. DOI:[10.1007/s10443-018-9698-9](https://doi.org/10.1007/s10443-018-9698-9)
16. Gusev A.A., Lurie S.A. Loss Amplification Effect in Multiphase Materials with Viscoelastic Interfaces, *Macromolecules*, 2009, no. 42, pp. 5372–5377. DOI:[10.1021/ma900426v](https://doi.org/10.1021/ma900426v)

17. Lurie S., Minhat M., Tuchkova N., Soliaev J. On remarkable loss amplification mechanism in filled and layered composite materials, *Applied Composite Materials*, 2014, vol. 21 (1), pp.179-196. DOI:[10.1007/s10443-013-9371-2](https://doi.org/10.1007/s10443-013-9371-2)
18. Kriven' G.I., Makovskii S.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 114. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118729>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-03](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-03)
19. Lurie S.A, Minhat M. Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites, *Composites B*, 2014, vol. 61, pp. 26-40. DOI:[10.1016/J.COMPOSITESB.2014.01.021](https://doi.org/10.1016/J.COMPOSITESB.2014.01.021)
20. Lurie S.A., Volkov-Bogorodskii D.B., Kriven G.I., Rabinskiy L.N. On estimating structural stresses in composites with whiskerized fibers, *International Journal of Civil Engineering & Technology (IJCIET)*, 2018, vol. 9 (6), pp. 294-308.
21. Song Q., Li Ke-zhi, Li Hai-liang, Li He-jun, Chang Ren. Grafting straight carbon nanotubes radially onto carbon fibers and their effect on the mechanical properties of carbon/carbon composites, *Carbon*, 2012, vol. 50, pp. 3943-3960. DOI:[10.1016/j.carbon.2012.03.023](https://doi.org/10.1016/j.carbon.2012.03.023)
22. Lv P., Feng Y., Zhang P., Chen H., Zhao N., Feng W. Increasing the interfacial strength in carbon fiber/epoxy composites by controlling the orientation and length of carbon nanotubes grown on the fibers, *Carbon*, 2011, vol. 49, pp. 4665-4673. DOI:[10.1016/j.carbon.2011.06.064](https://doi.org/10.1016/j.carbon.2011.06.064)
23. Zhang Fu-Hua, Wang Rong-Guo, He Xiao-Dong, Wang C., Ren Li-Ning. Interfacial shearing strength and reinforcing mechanisms of an epoxy composite reinforced using a carbon nanotube/carbon fiber hybrid, *Journal of Material Science*, 2019, vol. 44 (13), pp. 3574-3577. DOI:[10.1007/s10853-009-3484-x](https://doi.org/10.1007/s10853-009-3484-x)

24. Sharma S.P., Lakkad S.C. Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites, *Surface & Coatings Technology*, 2010, vol. 205 (2), pp. 350-355. DOI:[10.1016/j.surfcoat.2010.06.055](https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2010.06.055)
25. Kristensen R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* (Introduction to the mechanics of composites) Moscow, Mir, 1982, 334 p.
26. Herve E., Zaoui A. N-layered inclusion-based micromechanical model, *International Journal of Engineering Science*, 1993, vol. 31 (1), pp. 1–10. DOI:[10.1016/0020-7225\(93\)90059-4](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90059-4)
27. Lur'e S.A., Kriven' G.I., Rabinskii L.N. *Kompozity i nanostruktury*, 2019. vol. 11, no. 1, pp. 1-15.

Статья поступила в редакцию 02.11.2022

Статья после доработки 04.11.2022

Одобрена после рецензирования 15.11.2022

Принята к публикации 26.12.2022

The article was submitted on 02.11.2022; approved after reviewing on 15.11.2022; accepted for publication on 26.12.2022