

Синтез алгоритма принятия решения о траектории воздушного объекта по данным радиолокационных наблюдений

В.Н. Юдин, Н.З. Хунг

Рассматривается задача определения конечной точки траектории воздушного объекта (ВО) по данным радиолокационных наблюдений. Результаты такого определения могут использоваться для своевременного предупреждения защищаемых наземных объектов об опасности со стороны ВО. На основе обработки результатов первичных радиолокационных измерений выносится решение об объекте, которому грозит опасность. С использованием аппарата теории многоальтернативной проверки гипотез синтезирован приближенно оптимальный алгоритм вынесения такого решения. Алгоритм обеспечивает высокую эффективность определения конечной точки траектории ВО при реализуемых уровнях ошибок первичных радиолокационных измерений и малых расстояниях между защищаемыми наземными объектами.

1. Постановка задачи

На местности расположено некоторое количество объектов, которые считаются точечными. Решается задача защиты этих объектов от воздушного объекта (ВО), движущегося по некоторой траектории. Для защиты используется специальная наземная радиолокационная станция (РЛС). Задача РЛС - обнаружение ВО, определение объекта, которому он угрожает и своевременное предупреждение этого объекта об опасности. Для этого РЛС ведет обзор воздушного пространства, выполняет первичные измерения координат ВО, обнаруживает и сопровождает траекторию ВО. На основе анализа получаемой таким образом радиолокационной информации совместно с информацией о координатах защищаемых объектов РЛС решает задачу предсказания объекта, которому грозит опасность. Процесс предсказания объекта угрозы по результатам радиолокационных измерений носит вероятностный характер. Эффективность предсказания характеризуется вероятностями правильного и ложного предсказания (предупреждения) $P_{пп}$ и $P_{лп}$. Возникает задача математического синтеза алгоритмов принятия решения об объекте угрозы, обладающих свойствами оптимальности в смысле некоторого обоснованного критерия. Математическую постановку задачи синтеза представим следующим образом.

Пусть в дискретные моменты времени $t_1, t_2, t_3 \dots$ система первичной обработки информации РЛС выполняет измерения декартовых координат (x, y, z) ВО, движущегося по некото-

рой траектории в направлении одного из защищаемых объектов (ЗО). Результат измерения в произвольный момент t_k , $k=1,2,\dots$, представим в виде вектора единичного первичного измерения:

$$\begin{pmatrix} x_{uk} \\ y_{uk} \\ z_{uk} \\ \tilde{x}_k \\ \tilde{y}_k \\ \tilde{z}_k \end{pmatrix} \quad (1)$$

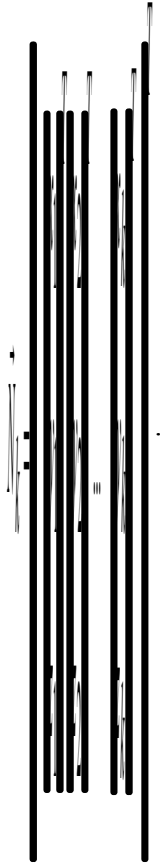
где x_{uk}, y_{uk}, z_{uk} - истинные значения координат ВО в момент t_k ; $\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k$ - ошибки измерения координат x, y, z в момент t_k . Считаем, что ошибки измерения некоррелированные во времени и взаимно статистически независимые случайные величины с гауссовским распределением вероятностей, т.е.

$$\tilde{x}_i \sim N\{0, \sigma_{\tilde{x}_i}\}, \quad \tilde{y}_i \sim N\{0, \sigma_{\tilde{y}_i}\}, \quad \tilde{z}_i \sim N\{0, \sigma_{\tilde{z}_i}\},$$

$$M\{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_{\tilde{x}_i}, & i = j \end{cases}, \quad M\{\tilde{y}_i, \tilde{y}_j\} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_{\tilde{y}_i}, & i = j \end{cases}, \quad M\{\tilde{z}_i, \tilde{z}_j\} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_{\tilde{z}_i}, & i = j \end{cases},$$

$$M\{x_i, y_i\} = 0, \quad M\{x_i, z_i\} = 0, \quad M\{y_i, z_i\} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

На текущий момент t_k РЛС располагает совокупностью наблюдений $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_k$, которую представим в виде составного вектора



(2)

Обозначим дополнительно

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}^T, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}^T, \quad \vec{n}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}^T.$$

Кроме наблюдений \vec{N}_k РЛС располагает информацией о координатах защищаемых объектов $ZO^{(1)}, ZO^{(2)}, \dots, ZO^{(M)}$. Координаты объекта $ZO^{(m)}, m = 1, 2, \dots, M$ представим в виде вектора

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{(m)} \\ \vdots \\ \tilde{x}_k^{(m)} \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(m)} \\ \vdots \\ x_k^{(m)} \\ \vdots \\ x_n^{(m)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{(m)} \\ \vdots \\ \tilde{x}_k^{(m)} \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^{(m)} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $x_u^{(m)}$ - истинное значение координаты X объекта $3O^{(m)}$; $\tilde{x}^{(m)}$ - ошибка с которой на стороне РЛС известна координата X объекта $3O^{(m)}$. Совокупность сведений о координатах $3O$ представим в виде составного вектора

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{x}_k^{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{x}_1^{(M)} \\ \vdots \\ \tilde{x}_k^{(M)} \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^{(M)} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Всю совокупность сведений о координатах ВО и $3O$, имеющуюся у РЛС на текущий момент t_k , представим в виде полного (расширенного) вектора наблюдений

$$\tilde{N}_{pk} = \left\| \tilde{n}_1^T \tilde{n}_2^T \dots \tilde{n}_k^T ; \tilde{n}^{(1)T} \tilde{n}^{(2)T} \dots \tilde{n}^{(M)T} \right\|^T = \left\| \tilde{N}_k^T N_{3O}^T \right\|^T,$$

$$\bar{N}_k^T = \|\bar{n}_1^T \bar{n}_2^T \dots \bar{n}_k^T\|, \quad \bar{N}_{3O}^T = \|\bar{n}^{(1)T} \bar{n}^{(2)T} \dots \bar{n}^{(M)T}\|.$$

Таким образом, имеем наблюдения

$$\bar{N}_{pk} = \|\bar{N}_k^T \bar{N}_{3O}^T\|^T. \quad (5)$$

Располагая в момент t_k наблюдениями \bar{N}_{pk} , наблюдатель должен принять решение: какой объект из совокупности 3O является объектом угрозы со стороны ВО.

По своему содержанию рассматриваемая задача относится к классу задач многоальтернативной проверки гипотез. Математическая постановка задачи может быть представлена следующим образом.

Имеется $M \geq 2$ гипотез $H^{(1)}, H^{(2)}, H^{(3)}, \dots, H^{(M)}$. Гипотеза $H^{(m)}$ означает, что объектом угрозы является $3O^{(m)}$. Известно априорное распределение вероятностей гипотез, т.е. заданы

вероятности $P(H^{(m)})$, $m = 1, 2, \dots, M$, $\sum_m P(H^{(m)}) = 1$. Наблюдатель располагает в текущий момент

t_k результатами наблюдения в виде расширенного вектора \bar{N}_{pk} . Задано статистическое

описание входящих в \bar{N}_{pk} ошибок измерения координат $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i$, $\tilde{x}^{(m)}, \tilde{y}^{(m)}, \tilde{z}^{(m)}$, $i = 1, 2, \dots, k$, $m = 1, 2, \dots, M$ (См. (1)). Располагая указанными сведениями, наблюдатель должен в момент

t_k принять одну из гипотез и отвергнуть остальные.

2. Оптимальный алгоритм

В соответствии с рекомендациями статистической теории решений для принятия решения об объекте угрозы в рассматриваемой задаче нужно на основе наблюдений \bar{N}_{pk} вычислить апостериорные вероятности $P(H^{(m)}/\bar{N}_{pk})$, $m = 1, 2, \dots, M$ всех гипотез.

При наличии этих вероятностей решение об объекте угрозы может быть вынесено на основе соотношения

$$P(H^{(m_{OU})}/\bar{N}_{pk}) = \max_{m=1,2,\dots,M} P(H^{(m)}/\bar{N}_{pk}), \quad (6)$$

где m_{OU} - номер 3O - объекта угрозы, или, иначе

$$m_{OU} = \arg \max_{m=1,2,\dots,M} [P(H^{(m)}/\bar{N}_{pk})]. \quad (7)$$

Алгоритм расчёта апостериорных вероятностей $P(H^{(m)}/\bar{N}_{pk})$ получим, рассматривая совместное событие $(H^{(m)}, \bar{N}_{pk})$. Для вероятности этого события справедливо

$$P(H^{(m)}, \bar{N}_{pk}) = P(H^{(m)})P(\bar{N}_{pk}/H^{(m)}) = P(\bar{N}_{pk})P(H^{(m)}/\bar{N}_{pk}), \quad (8)$$

где $P(\bar{N}_{pk}/H^{(m)})$ - функция правдоподобия гипотезы $H^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots, M$. Из (8) следует

$$P(H^{(m)}/\bar{N}_{pk}) = \frac{P(H^{(m)})P(\bar{N}_{pk}/H^{(m)})}{P(\bar{N}_{pk})} \quad (9)$$

Здесь

$$P(\bar{N}_{pk}) = \sum_{i=1}^M P(H^{(i)})P(\bar{N}_{pk}/H^{(i)})$$

- полная (усреднённая по всем гипотезам) вероятность получить наблюдения \bar{N}_{pk} . Поскольку полная вероятность $P(\bar{N}_{pk})$ одинакова для всех гипотез $H^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots, M$, вместо (7) справедливо соотношение

$$m_{OY} = \arg \max_{m=1, 2, \dots, M} [P(H^{(m)})P(\bar{N}_{pk}/H^{(m)})] \quad (10)$$

Далее будем исходить из предположения, что в рассматриваемой РЛС реализован цифровой съём координат, при котором величины x_k, y_k, z_k $k = 1, 2, \dots$ квантуются на требуемое число уровней. При этом вероятность $P(\bar{N}_{pk}/H^{(m)})$ может быть вычислена интегрированием соответствующей плотности распределения вероятностей (п. р. в.):

$$P(\bar{N}_{pk}/H^{(m)}) = \int \dots \int P_{\Omega}(\Phi) d\Phi \quad (11)$$

Здесь $\Omega = x_1 \dots x_k, x^{(1)} \dots x^{(M)}, y_1 \dots y_k, y^{(1)} \dots y^{(M)}, z_1 \dots z_k, z^{(1)} \dots z^{(M)}$;

$\Phi = u_1 \dots u_k, u^{(1)} \dots u^{(M)}, v_1 \dots v_k, v^{(1)} \dots v^{(M)}, w_1 \dots w_k, w^{(1)} \dots w^{(M)}$;

$$d\Phi = du_1 \dots du_k, du^{(1)} \dots du^{(M)}, dv_1 \dots dv_k, dv^{(1)} \dots dv^{(M)}, dw_1 \dots dw_k, dw^{(1)} \dots dw^{(M)};$$

u, v, w - независимые переменные для координат x, y, z соответственно;

$P_{\Omega}(\Phi)$ - $3(k+M)$ - мерная п.р.в. непрерывных координат x, y, z ОУ. Интегрирование в (11) ведётся в пределах соответствующих зон квантования, используемых при съеме координат с помощью преобразователей “координата-цифровой код”. Введём в рассмотрение вектора:

$$\bar{X}_k = \|x_1 x_2 \dots x_k\|^T, \quad \bar{Y}_k = \|y_1 y_2 \dots y_k\|^T, \quad \bar{Z}_k = \|z_1 z_2 \dots z_k\|^T$$

наблюдений по координатам x, y, z , вектора:

$$\bar{X}_{3O} = \|x^{(1)}, x^{(2)} \dots x^{(M)}\|^T, \quad \bar{Y}_{3O} = \|y^{(1)}, y^{(2)} \dots y^{(M)}\|^T, \quad \bar{Z}_{3O} = \|z^{(1)}, z^{(2)} \dots z^{(M)}\|^T$$

координат защищаемых объектов, а также расширенные вектора:

$$\bar{X}_{pk} = \|\bar{X}_k^T \bar{X}_{3O}^T\|^T, \quad \bar{Y}_{pk} = \|\bar{Y}_k^T \bar{Y}_{3O}^T\|^T, \quad \bar{Z}_{pk} = \|\bar{Z}_k^T \bar{Z}_{3O}^T\|^T \text{ наблюдаемых координат.}$$

С учётом сделанных обозначений фигурирующая в (11) п.р.в. может быть записана в более компактном виде

$$\begin{aligned}
P_{(\dots)}(\dots/H^{(m)}) &\triangleq P_{\bar{N}_{pk}}(\dots/H^{(m)}) \triangleq \\
&\triangleq P_{\bar{X}_{pk}\bar{Y}_{pk}\bar{Z}_{pk}}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}/H^{(m)}) \triangleq \\
&\triangleq P_{\bar{X}_k, \bar{X}_{30}, \bar{Y}_k, \bar{Y}_{30}, \bar{Z}_k, \bar{Z}_{30}}(\bar{U}', \bar{U}'', \bar{V}', \bar{V}'', \bar{W}', \bar{W}''/H^{(m)})
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{U}' &= \|u_1 u_2 \dots u_k\|^T, \quad \bar{V}' = \|v_1 v_2 \dots v_k\|^T, \quad \bar{W}' = \|w_1 w_2 \dots w_k\|^T, \\
\bar{U}'' &= \|u^{(1)} u^{(2)} \dots u^{(M)}\|^T, \quad \bar{V}'' = \|v^{(1)} v^{(2)} \dots v^{(M)}\|^T, \quad \bar{W}'' = \|w^{(1)} w^{(2)} \dots w^{(M)}\|^T, \\
\bar{U} &= \left\| \bar{U}'^T \bar{U}''^T \right\|^T, \quad \bar{V} = \left\| \bar{V}'^T \bar{V}''^T \right\|^T, \quad \bar{W} = \left\| \bar{W}'^T \bar{W}''^T \right\|^T.
\end{aligned}$$

- вектора независимых переменных. При малых размерах зон квантования значения плотности $\bar{P}_{\bar{N}_{pk}}(\dots/H^{(m)})$ можно считать постоянным в пределах каждой из этих зон, при этом справедливо приближение

$$\begin{aligned}
P(\bar{N}_{pk}/H^{(m)}) &= \int \dots \int P_{\bar{X}_{pk}\bar{Y}_{pk}\bar{Z}_{pk}}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}/H^{(m)}) d\bar{U}d\bar{V}d\bar{W} \approx \\
&\approx P_{\bar{X}_{pk}\bar{Y}_{pk}\bar{Z}_{pk}}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}/H^{(m)}) \int \dots \int d\bar{U}d\bar{V}d\bar{W}
\end{aligned} \tag{13}$$

Точность приближения (13) растёт с увеличением числа уровней квантования в устройствах съёма координат РЛС. Приближение (13) позволяет модифицировать алгоритм (10). Поскольку интеграл в правой части (13) не зависит от $H^{(m)}$, вместо (10) справедливо

$$m_{OA} = \arg \max_{m=1,2,\dots,M} \left\{ P(H^{(m)}) P_{\bar{X}_{pk}\bar{Y}_{pk}\bar{Z}_{pk}}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}/H^{(m)}) \right\}. \tag{14}$$

Алгоритм (14) требует для своего применения знания функции правдоподобия $P_{\bar{X}_{pk}\bar{Y}_{pk}\bar{Z}_{pk}}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}/H^{(m)})$ и априорных вероятностей $P(H^{(m)})$, $m = 1, 2, \dots, M$ гипотез. Если априорные вероятности неизвестны, то можно ориентироваться на т.н. “байесовский постулат”. В соответствии с байесовским постулатом неизвестное априорное вероятностное распределение оцениваемого параметра полагается равномерным. То есть, в данной задаче следует положить

$$P(H^{(m)}) = \text{const}(m) = 1/M, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Если принять байесовский постулат, то алгоритм (14) модифицируется к виду

$$m_{OA} = \arg \max_{m=1,2,\dots,M} \left\{ P_{\bar{X}_{pk}\bar{Y}_{pk}\bar{Z}_{pk}}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}/H^{(m)}) \right\}. \tag{15}$$

Этот алгоритм оперирует с функцией правдоподобия

$$L_{\bar{N}_{pk}}(H^{(m)}) \triangleq L_{\bar{X}_{pk}\bar{Y}_{pk}\bar{Z}_{pk}}(H^{(m)}) = P_{\bar{X}_{pk}\bar{Y}_{pk}\bar{Z}_{pk}}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}/H^{(m)}) \quad (16)$$

гипотезы $H^{(m)}$.

С учётом введённых обозначений алгоритм (15) запишется в виде

$$m_{OA} = \arg \max_{m=1,2,\dots,M} \{ L_{\bar{N}_{pk}}(H^{(m)}) \} \quad (17)$$

Полученный алгоритм (17) может быть реализован, если известен вид функции правдоподобия $L_{\bar{N}_{pk}}(H^{(m)})$ (16). Далее будем исходить из введённого выше (см. соотношение (1)) предположения, что результаты измерений координат x, y, z взаимно статистически независимы. Это предположение даёт основание представить многомерную п.р.в. наблюдений по координатам x, y, z в виде произведения

$$P_{\bar{X}_{pk}\bar{Y}_{pk}\bar{Z}_{pk}}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}/H^{(m)}) = P_{\bar{X}_{pk}}(\bar{U}/H^{(m)}) P_{\bar{Y}_{pk}}(\bar{V}/H^{(m)}) P_{\bar{Z}_{pk}}(\bar{W}/H^{(m)})$$

Соответственно функция правдоподобия

$$L_{\bar{N}_{pk}}(H^{(m)}) = L_{\bar{X}_{pk}}(H^{(m)}) L_{\bar{Y}_{pk}}(H^{(m)}) L_{\bar{Z}_{pk}}(H^{(m)}) \quad (18)$$

и алгоритм (17) принимает вид

$$m_{OA} = \arg \max_{m=1,2,\dots,M} \{ L_{\bar{X}_{pk}}(H^{(m)}) L_{\bar{Y}_{pk}}(H^{(m)}) L_{\bar{Z}_{pk}}(H^{(m)}) \} \quad (19)$$

$$\text{где } L_{\bar{X}_{pk}}(H^{(m)}) = P_{\bar{X}_{pk}}(\bar{U}/H^{(m)}), \quad L_{\bar{Y}_{pk}}(H^{(m)}) = P_{\bar{Y}_{pk}}(\bar{V}/H^{(m)}), \quad (20)$$

$$L_{\bar{Z}_{pk}}(H^{(m)}) = P_{\bar{Z}_{pk}}(\bar{W}/H^{(m)})$$

- функции правдоподобия гипотезы $H^{(m)}$ по координатам x, y, z соответственно.

Введенное предположение, дающее возможность представить функцию правдоподобия (16) в виде произведения (18), существенно упрощает дальнейшее рассмотрение. Следует отметить, что это предположение справедливо не всегда. Обычно в практике радиолокационных измерений взаимно независимыми являются измерения сферических координат – углов β (азимут), ε (угол места) и расстояния r до лоцируемых объектов. Значение прямоугольных координат x, y, z получаются соответствующим пересчётом сферических координат [1]. Поскольку при расчёте каждой из декартовых координат x, y, z используются одни и те же величины r, β, ε , появляется взаимная зависимость ошибок первичных оценок декартовых координат. Принятое выше допущение об отсутствии указанной зависимости, дающее возможность перехода от (16) к (18), оправдывается значительным упрощением процесса синтеза искомого алгоритма и конечного результата синтеза.

Принимая во внимание, что все последующие рассуждения и выкладки одинаковы по отношению к каждой из функций правдоподобия: $L_{\bar{X}_{pk}}(H^{(m)})$, $L_{\bar{Y}_{pk}}(H^{(m)})$, $L_{\bar{Z}_{pk}}(H^{(m)})$, далее рассмотрим подробно только одну из этих функций, например $L_{\bar{X}_{pk}}(H^{(m)})$.

Функцию правдоподобия $L_{\bar{X}_{pk}}(H^{(m)})$ представим в виде произведения

$$L_{\bar{X}_{pk}}(H^{(m)}) = L_{\bar{X}_k}(H^{(m)}) L_{\bar{X}_{30}/\bar{X}_k}(H^{(m)}) \quad (21)$$

где $L_{\bar{X}_k}(H^{(m)}) = P_{\bar{X}_k}(\bar{U}'/H^{(m)})$ - функция правдоподобия гипотезы $H^{(m)}$ по наблюдениям \bar{X}_k ;

$L_{\bar{X}_{30}/\bar{X}_k}(H^{(m)}) = P_{\bar{X}_{30}/\bar{X}_k}(U''/U', H^{(m)})$ - функция правдоподобия гипотезы $H^{(m)}$ по наблюдениям \bar{X}_{30} , вычисляемая при условии, что в распоряжении РЛС имеются наблюдения \bar{X}_k .

Функцию правдоподобия $L_{\bar{X}_k}(H^{(m)})$ можно представить в виде произведения

$$L_{\bar{X}_k}(H^{(m)}) = P_{\bar{X}_{pk}}(\bar{U}'/H^{(m)}) = \prod_{i=1}^k P_{\bar{x}_i}(\bar{u}_i - x_{ui}^{(m)}) \quad (22)$$

где $x_{ui}^{(m)}$ - истинное значение координаты x ВО при условии, что справедлива гипотеза $H^{(m)}$; $P_{\bar{x}_i}(\dots)$ - п. р. в. ошибок измерения координаты x на i -ом такте. Возможность представления (22) следует из этого факта, что ошибки измерений координат, выполняемых в различных моментах времени, взаимно статически независимы (см. (1)). Учитывая, что ошибки первичных измерений – гауссовские (см. соотношение (1)), получаем

$$\begin{aligned} L_{\bar{X}_k}(H^{(m)}) &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\bar{x}_i}} \exp\left\{-\frac{(u_i' - x_{ui}^{(m)})^2}{2\sigma_{\bar{x}_i}^2}\right\} = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^k \times \left(\prod_{i=1}^k \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_i}}\right) \exp\left\{-\sum_{i=1}^k \frac{(u_i' - x_{ui}^{(m)})^2}{2\sigma_{\bar{x}_i}^2}\right\} \end{aligned} \quad (23)$$

Функцию правдоподобия $L_{\bar{X}_{30}/\bar{X}_k}(H^{(m)})$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{\bar{X}_{30}/\bar{X}_k}(H^{(m)}) &= P_{\bar{X}_{30}/\bar{X}_k}(\bar{U}''/\bar{U}', H^{(m)}) = \\ &= P_{\bar{X}_{301}/\bar{X}_k}(\bar{U}_1''/\bar{U}', H^{(m)}) \times P_{x^{(m)}/\bar{X}_k}(u^{(m)}/\bar{U}', H^{(m)}, U_1'') = \\ &= L_{\bar{X}_{301}/\bar{X}_k}(H^{(m)}) \times L_{x^{(m)}/\bar{X}_k}(H^{(m)}) \end{aligned} \quad (24)$$

где $\bar{X}_{301} = \|x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(m-1)}x^{(m+1)}\dots x^{(M)}\|^T$ - вектор размера $((M-1)\times 1)$, отличающийся от вектора \bar{X}_{30} отсутствием элемента $x^{(m)}$;

$U_1'' = \|u^{(1)}u^{(2)}\dots u^{(m-1)}u^{(m+1)}\dots u^{(M)}\|$ - вектор размера $((M-1)\times 1)$ независимых переменных, отличающийся от вектора \bar{U}'' отсутствием элемента $u^{(m)}$.

Нетрудно видеть, что содержащийся в (24) множитель

$$\prod_{i=1}^M \left(\prod_{j=1}^n \left| \frac{\partial x_j^{(i)}}{\partial u_j^{(i)}} \right| \right) \quad (25)$$

где $P_{\bar{x}^{(i)}}(\dots) = N\left(0, \sigma_{\bar{x}^{(i)}}^2\right)$ - п. р. в. ошибок измерения координаты x объекта $3O^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, M$;

$\sigma_{\bar{x}^{(i)}}$ - среднеквадратическая ошибка измерения координаты x для $3O^{(i)}$. В свою очередь со-

множитель $L_{x^{(m)}/\bar{X}_k}(H^{(m)})$ имеет вид условной п. р. в.

$$\begin{aligned} L_{x^{(m)}/\bar{X}_k}(H^{(m)}) &= P_{x^{(m)}/\bar{X}_k}(u^{(m)}/\bar{U}', H^{(m)}, \bar{U}_1'') = \\ &= P_{x^{(m)}/\bar{X}_k}(u^{(m)}/\bar{U}', H^{(m)}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} D(x^{(m)}/\bar{X}_k, H^{(m)})} \exp\left\{-\frac{\left[x^{(m)} - M(x^{(m)}/\bar{X}_k, H^{(m)})\right]^2}{2D(x^{(m)}/\bar{X}_k, H^{(m)})}\right\} \end{aligned} \quad (26)$$

- условная гауссовская п. р. в. Параметры этого распределения:

$M[x^{(m)}/\bar{X}_k, H^{(m)}] \triangleq \hat{x}_{\text{ЭК}}^{(m)}$ - условное (апостериорное) математическое ожидание координаты x

объекта $3O^{(m)}$, вычисляемое по наблюдениям \bar{X}_k в предположении, что объектом угрозы является $3O^{(m)}$ - оптимальная среднеквадратическая экстраполяционная оценка координаты x объекта $3O^{(m)}$

$D[x^{(m)}/\bar{X}_k, H^{(m)}] \triangleq D_{\text{ЭК}}^{(m)}$ - апостериорная дисперсия экстраполяционной оценки $\hat{x}_{\text{ЭК}}^{(m)}$. Таким об-

разом, функция правдоподобия (21) наблюдений \bar{X}_{pk} относительно гипотезы $H^{(m)}$ может быть представлена произведением трех сомножителей

$$L_{\bar{X}_{pk}}(H^{(m)}) = L_{\bar{X}_k}(H^{(m)}) L_{\bar{X}_{\text{ЭК}}}(H^{(m)}) L_{x^{(m)}/\bar{X}_k}(H^{(m)}), \quad (27)$$

определяемых соответственно соотношениями (23), (25), (26). Действуя аналогично изложенно-

му выше, можно получить также функции правдоподобия $L_{\bar{Y}_{pk}}(H^{(m)})$ и $L_{\bar{Z}_{pk}}(H^{(m)})$, входящие

в виде сомножителей в соотношения (18) и (19). А именно, применительно к координате y :

$$L_{\bar{Y}_{pk}}(H^{(m)}) = L_{\bar{Y}_k}(H^{(m)}) \times L_{\bar{Y}_{\text{ЭК}}}(H^{(m)}) \times L_{y^{(m)}/\bar{Y}_k}(H^{(m)}), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned}
L_{\bar{y}_k}(H^{(m)}) &= P_{\bar{y}_k}(\bar{U}'/H^{(m)}) = \prod_{i=1}^k P_{\bar{y}_i}(u'_i - y_{ui}^{(m)}) = \\
&= \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\bar{y}_i}} \exp\left\{-\frac{(u'_i - y_{ui}^{(m)})^2}{2\sigma_{\bar{y}_i}^2}\right\} ; \tag{29}
\end{aligned}$$

$$P_{\bar{y}^{(i)}}(\dots) = N(0, \sigma_{\bar{y}^{(i)}}^2);$$

$$\begin{aligned}
L_{y^{(m)}/\bar{y}_k}(H^{(m)}) &= P_{y^{(m)}/\bar{y}_k}(u^{(m)}/\bar{U}', H^{(m)}, \bar{U}_1) = \\
&= P_{y^{(m)}/\bar{y}_k}(u^{(m)}/\bar{U}', H^{(m)}) ; \tag{31} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} D(y^{(m)}/\bar{Y}_k, H^{(m)})} \exp\left\{-\frac{[y^{(m)} - M(y^{(m)}/\bar{Y}_k, H^{(m)})]^2}{2D(y^{(m)}/\bar{Y}_k, H^{(m)})}\right\}
\end{aligned}$$

$\sigma_{\bar{y}^{(i)}}$ - среднеквадратическая ошибка первичного измерения координаты y в момент t_i ;

$M[y^{(m)}/\bar{Y}_k, H^{(m)}] \triangleq \hat{y}_{\varepsilon k}^{(m)}$ - апостериорное математическое ожидание координаты y защищаемого объекта $3O^{(m)}$, вычисляемое по наблюдениям \bar{Y}_k в предположении, что объектом угрозы является $3O^{(m)}$ - оптимальная среднеквадратическая экстраполяционная оценка координаты y объекта $3O^{(m)}$;

$D[y^{(m)}/\bar{Y}_k, H^{(m)}] \triangleq D_{y_{\varepsilon k}}^{(m)}$ - апостериорная дисперсия экстраполяционной оценки $\hat{y}_{\varepsilon k}^{(m)}$.

Аналогично применительно к координате z :

$$L_{\bar{z}_{pk}}(H^{(m)}) = L_{\bar{z}_k}(H^{(m)}) L_{\bar{z}_{3o1}/\bar{z}_k}(H^{(m)}) L_{z^{(m)}/\bar{z}_k}(H^{(m)}), \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{\bar{z}_{pk}}(H^{(m)}) &= P_{\bar{z}_{pk}}(\bar{U}'/H^{(m)}) = \prod_{i=1}^k P_{\bar{z}_i}(u'_i - z_{ui}^{(m)}) = \\
&= \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\bar{z}_i}} \exp\left\{-\frac{(u'_i - z_{ui}^{(m)})^2}{2\sigma_{\bar{z}_i}^2}\right\} ; \tag{33}
\end{aligned}$$

$$P_{\bar{z}^{(i)}}(\dots) = N(0, \sigma_{\bar{z}^{(i)}}^2);$$

$$\begin{aligned}
L_{z^{(m)}/\bar{z}_k}(H^{(m)}) &= P_{z^{(m)}/\bar{z}_k}(u^{(m)}/\bar{U}', H^{(m)}) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} D(z^{(m)}/\bar{Z}_k, H^{(m)})} \exp\left\{-\frac{[z^{(m)} - M(z^{(m)}/\bar{Z}_k, H^{(m)})]^2}{2D(z^{(m)}/\bar{Z}_k, H^{(m)})}\right\}; \tag{35}
\end{aligned}$$

$\sigma_{z^{(i)}}$ - среднеквадратическая ошибка первичного измерения координаты Z в момент t_i ;

$M[z^{(m)}/\bar{Z}_k, H^{(m)}] \triangleq \hat{z}_{\text{экс}}^{(m)}$ - апостериорное математическое ожидание координаты Z защищаемого объекта $30^{(m)}$, вычисляемое по наблюдениям \bar{Z}_k в предположении, что объектом угрозы является $30^{(m)}$ - оптимальная среднеквадратическая экстраполяционная оценка координаты Z объекта $30^{(m)}$ по наблюдениям \bar{Z}_k ;

$D[z^{(m)}/\bar{Z}_k, H^{(m)}] \triangleq D_{z_{\text{экс}}}^{(m)}$ - апостериорная дисперсия экстраполяционной оценки $\hat{z}_{\text{экс}}^{(m)}$.

Поскольку, как следует из (25), (29), (33), сомножители:

$L_{\bar{X}_{301}/\bar{X}_k}(H^{(m)})$, $L_{\bar{Y}_{301}/\bar{Y}_k}(H^{(m)})$, $L_{\bar{Z}_{301}/\bar{Z}_k}(H^{(m)})$ не зависят от гипотез $H^{(m)}$, они не влияют на решение (19) уравнения правдоподобия (6) и поэтому могут быть опущены. С учётом этого уравнение (19) имеет вид:

$$m_{OA} = \arg \max_{m=1,2,\dots,M} \{ L_{\bar{X}_k}(H^{(m)}) L_{x^{(m)}/\bar{X}_k}(H^{(m)}) L_{\bar{Y}_k}(H^{(m)}) \times L_{y^{(m)}/\bar{Y}_k}(H^{(m)}) L_{\bar{Z}_k}(H^{(m)}) L_{z^{(m)}/\bar{Z}_k}(H^{(m)}) \} \quad (36)$$

где сомножители в фигурных скобках определяются соотношениями (23), (26), (28), (30), (31), (35) соответственно.

Полученное решение (36) уравнения правдоподобия (6) – оптимальное при сделанных выше предположениях. Трудность его практического применения заключается в том, что для вычисления сомножителей $L_{\bar{X}_k}(H^{(m)})$, $L_{\bar{Y}_k}(H^{(m)})$, $L_{\bar{Z}_k}(H^{(m)})$ требуется знание истинной траектории ВО на $1,2,\dots,k$ -ом тактах его радиолокационного обнаружения. Поскольку истинные траектории ВО не могут быть известны, оптимальный алгоритм, основанный на решении (36), следует признать нереализуемыми. С учётом сказанного возникает задача синтеза приближённо оптимальных алгоритмов, которые могут быть реализованы при решении практических задач.

3. Приближённо оптимальный алгоритм.

Приближённо оптимальный алгоритм, не требующий знания истинной траектории атакующего ВО при гипотезах $H^{(m)}$, $m = 1,2,\dots,M$, можно получить в предположении, что первичные измерения координат АО выполняются с высокой точностью, т.е.

$$\sigma_{\tilde{x}_i} \rightarrow 0, \sigma_{\tilde{y}_i} \rightarrow 0, \sigma_{\tilde{z}_i} \rightarrow 0,$$

$i = 1,2,\dots$, при этом $x_i \rightarrow x_{ui}^{(m)}$, $y_i \rightarrow y_{ui}^{(m)}$, $z_i \rightarrow z_{ui}^{(m)}$. При таком предположении сомножители $L_{\bar{X}_k}(H^{(m)})$, $L_{\bar{Y}_k}(H^{(m)})$, $L_{\bar{Z}_k}(H^{(m)})$ в (36) перестают зависеть от гипотез $H^{(m)}$, $m = 1,2,\dots,M$

и поэтому могут быть опущены. Приближённо оптимальный вариант алгоритма (36), справедливый при сделанном выше предположении, имеет вид

$$m_{OA} = \arg \max_{m=1,2,\dots,M} \{ L_{x^{(m)}/\bar{X}_k}(H^{(m)}) \times L_{y^{(m)}/\bar{Y}_k}(H^{(m)}) \times L_{z^{(m)}/\bar{Z}_k}(H^{(m)}) \}, \quad (37)$$

$$\ln \left[L_{x^{(m)}/\bar{X}_k}(H^{(m)}) \right] = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi D_{x\partial k}^{(m)}}} \right) - \frac{(x^{(m)} - \hat{x}_{\partial k}^{(m)})^2}{2D_{x\partial k}^{(m)}},$$

$$\ln \left[L_{y^{(m)}/\bar{Y}_k}(H^{(m)}) \right] = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi D_{y\partial k}^{(m)}}} \right) - \frac{(y^{(m)} - \hat{y}_{\partial k}^{(m)})^2}{2D_{y\partial k}^{(m)}}, \quad (38)$$

$$\ln \left[L_{z^{(m)}/\bar{Z}_k}(H^{(m)}) \right] = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi D_{z\partial k}^{(m)}}} \right) - \frac{(z^{(m)} - \hat{z}_{\partial k}^{(m)})^2}{2D_{z\partial k}^{(m)}},$$

где функции правдоподобия представлены своими логарифмами, что не нарушает справедливости алгоритма. Алгоритм (37) может быть characterized как асимптотически оптимальный при условии реализации в рассматриваемой РЛС высокой точности первичных измерений координат x, y, z .

Далее учтем, что апостериорные дисперсии $D_{x\partial k}^{(m)}$, $D_{y\partial k}^{(m)}$, $D_{z\partial k}^{(m)}$ определяются только ошибками первичных измерений $\sigma_{\tilde{x}_i}$, $\sigma_{\tilde{y}_i}$, $\sigma_{\tilde{z}_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, а также конкретным видом алгоритма экстраполяции. Поскольку эти факторы действуют одинаково при всех гипотезах $H^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots, M$, указанные дисперсии могут быть исключены из алгоритма (36), (26), (30), (34), поскольку не влияют на выносимое на основе (36) решение. С учётом сделанного замечания искомый приближённо оптимальный алгоритм принятия решения об объекте угрозы по наблюдениям \bar{X}_k , \bar{Y}_k , \bar{Z}_k после несложных преобразований приводится к виду:

$$m_{OA} = \arg \min_{m=1,2,\dots,M} \left\{ (x^{(m)} - \hat{x}_{\partial k}^{(m)})^2 + (y^{(m)} - \hat{y}_{\partial k}^{(m)})^2 + (z^{(m)} - \hat{z}_{\partial k}^{(m)})^2 \right\}. \quad (39)$$

Полученный алгоритм имеет прозрачную трактовку. Введём обозначения:

$$x^{(m)} - \hat{x}_{\partial k}^{(m)} = \Delta_{x\partial k}^{(m)}, \quad y^{(m)} - \hat{y}_{\partial k}^{(m)} = \Delta_{y\partial k}^{(m)}, \quad z^{(m)} - \hat{z}_{\partial k}^{(m)} = \Delta_{z\partial k}^{(m)}$$

- расстояния между прогнозируемой и истинной точкой расположения $3O^{(m)}$ по координатам x, y, z ;

$$r_{\partial k}^{(m)} = \sqrt{\Delta_{x\partial k}^{(m)2} + \Delta_{y\partial k}^{(m)2} + \Delta_{z\partial k}^{(m)2}} - \text{расстояние между прогнозируемой и истинной точками расположения}$$

объекта $3O^{(m)}$. Таким образом, в соответствии с полученным алгоритмом (38) решение об

объекте угрозы выносятся по минимуму расстояния между прогнозируемой и известной точками расположения $3O^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots, M$. Поскольку прогнозируемая точка расположения объекта угрозы находится на поверхности земли, она представляет собой прогнозируемую точку падения ВО (см. рис.1).

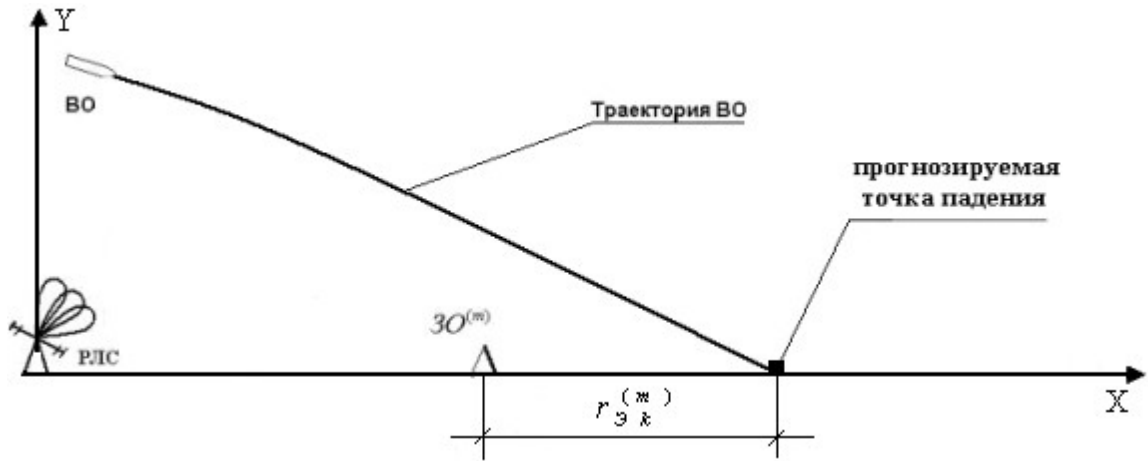


Рис.1. Траектория ВО

Введя обозначения: $(x_{ТП}, y_{ТП}, z_{ТП})$ - координаты точки падения и учитывая, что $3O^{(m)}$ $m = 1, 2, \dots, M$ находятся также на поверхности земли, можем записать:

$$x_{\text{Эк}}^{(m)} = M[x^{(m)} / \bar{X}_k, H^{(m)}] = M[x_{ТП} / \bar{X}_k, H^{(m)}];$$

$$y_{\text{Эк}}^{(m)} = M[y^{(m)} / \bar{Y}_k, H^{(m)}] = M[y_{ТП} / \bar{Y}_k, H^{(m)}];$$

$$z_{\text{Эк}}^{(m)} = M[z^{(m)} / \bar{Z}_k, H^{(m)}] = M[z_{ТП} / \bar{Z}_k, H^{(m)}];$$

$$m = 1, 2, \dots, M.$$

Нетрудно видеть, что оценки $\hat{x}_{\text{Эк}}^{(m)}$, $\hat{y}_{\text{Эк}}^{(m)}$, $\hat{z}_{\text{Эк}}^{(m)}$ формируются только на основе наблюдений \bar{X}_k , \bar{Y}_k , \bar{Z}_k , координаты \bar{X}_{3O} , \bar{Y}_{3O} , \bar{Z}_{3O} в их формировании не участвуют. Следовательно, эти оценки одинаковы для всех гипотез $H^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots, M$. С учётом сказанного справедливо:

$$x_{\text{Эк}}^{(m)} = M[x_{ТП} / \bar{X}_k, H^{(m)}] \triangleq \hat{x}_{ТП};$$

$$y_{\text{Эк}}^{(m)} = M[y_{ТП} / \bar{Y}_k, H^{(m)}] \triangleq \hat{y}_{ТП};$$

$$z_{\text{Эк}}^{(m)} = M[z_{ТП} / \bar{Z}_k, H^{(m)}] \triangleq \hat{z}_{ТП}.$$

Здесь $(\hat{x}_{ТП}, \hat{y}_{ТП}, \hat{z}_{ТП})$ - координаты прогнозируемой точки падения ВО, общей для всех гипотез. С учётом этого алгоритм (38) принимает вид

$$m_{OA} = \arg \min_{m=1, 2, \dots, M} \left\{ (x^{(m)} - \hat{x}_{ТП})^2 + (y^{(m)} - \hat{y}_{ТП})^2 + (z^{(m)} - \hat{z}_{ТП})^2 \right\} \quad (40)$$

Обозначая:

$$\Delta_{xTII}^{(m)} = x^{(m)} - \hat{x}_{TII}, \Delta_{yTII}^{(m)} = y^{(m)} - \hat{y}_{TII}, \Delta_{zTII}^{(m)} = z^{(m)} - \hat{z}_{TII}$$

- прогнозируемые расстояния от точки падения до объекта $ЗО^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots, M$,

получаем алгоритм (40) в более компактном виде

$$m_{OA} = \arg \min_{m=1,2,\dots,M} \left\{ \Delta_{xTII}^{(m)2} + \Delta_{yTII}^{(m)2} + \Delta_{zTII}^{(m)2} \right\}. \quad (41)$$

Учитывая, что

$$\sqrt{\Delta_{xTII}^{(m)2} + \Delta_{yTII}^{(m)2} + \Delta_{zTII}^{(m)2}} = r_{TII}^{(m)} - \text{расстояние между прогнозируемой точкой падения ВО и точкой}$$

стояния объекта $ЗО^{(m)}$, можем представить итоговый алгоритм в наиболее компактной форме

$$m_{OA} = \arg \min_{m=1,2,\dots,M} \left\{ r_{TII}^{(m)2} \right\}. \quad (42)$$

Полученный алгоритм, представленный в форме (40), (41) или (42), будем называть алгоритмом принятия решения об объекте угрозы по минимуму расстояния от защищаемых объектов до прогнозируемой точки падения ВО. Основной операцией, составляющей идейную основу этого алгоритма, является операция формирования прогнозной оценки координат ВО на некоторый момент времени $t_{ПР}$, соответствующий моменту падения ВО на землю.

Для получения оценок эффективности полученного алгоритма была разработана компьютерная модель, имитирующая основные процессы, протекающие при решении рассматриваемой задачи при наличии двух защищаемых объектов – $ЗО^{(1)}$ и $ЗО^{(2)}$. Ниже приведены некоторые результаты модельного эксперимента. На рис. 2 представлены зависимости вероятностей правильного и ложного предупреждения ЗО от величины среднеквадратических ошибок (СКО) первичных радиолокационных измерений координат ВО: σ_β (СКО азимута), σ_ε (СКО угла места), σ_R (СКО дальности).

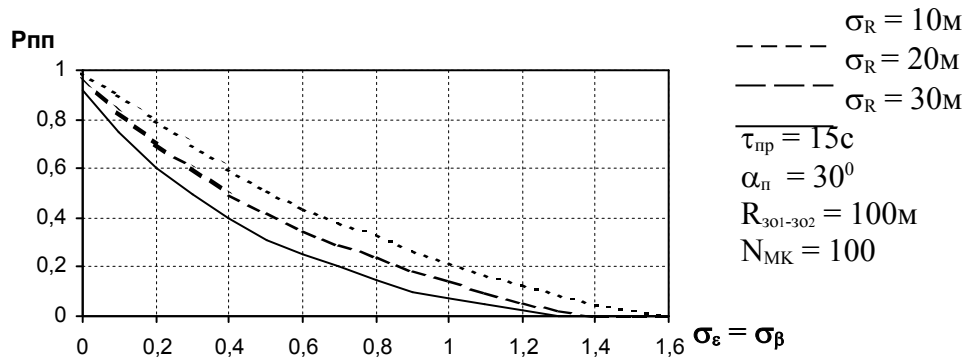


Рис. 2 а. Зависимость вероятности правильного предупреждения от величины ошибок первичных измерений РЛС

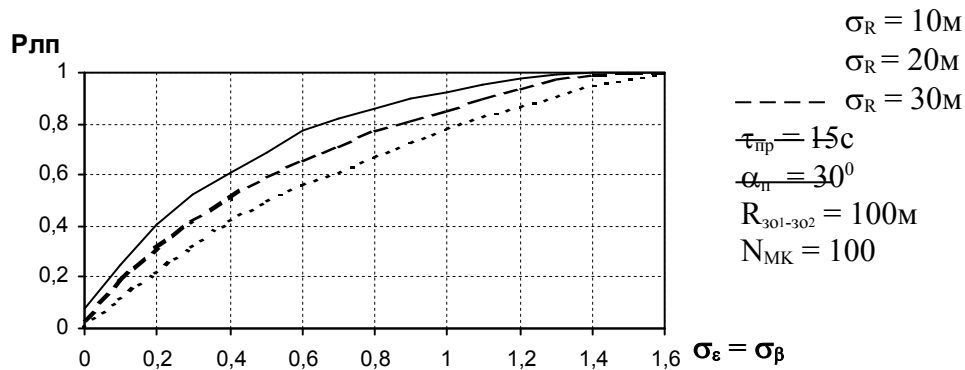


Рис. 2 б. Зависимость вероятности ложного предупреждения от величины ошибок первичных измерений РЛС

При эксперименте обеспечивалось $\sigma_{\beta} = \sigma_{\epsilon}$. Значения σ_{β} и σ_{ϵ} соответствуют расстоянию РЛС – ВО 30 км (граница зоны обнаружения РЛС). Важными параметрами задачи являются: момент $t_{пр}$ принятия решения об объекте угрозы, расстояние $R_{30^{(1)}-30^{(2)}}$ между защищаемыми объектами, угол $\alpha_{п}$ пикирования ВО (угол между вектором скорости ВО и поверхностью земли в плоскости траектории), а также ракурс угрозы $\alpha_{р}$ (угол между плоскостью траектории ВО и прямой, соединяющей $30^{(1)}$ и $30^{(2)}$, в горизонтальной плоскости. Момент $t_{пр}$ задается параметром $\tau_{пр}$, (время предупреждения), который представляет собой интервал времени от момента $t_{пр}$ до момента падения ВО. Вероятности оценивались методом Монте-Карло, число испытаний $N_{МК}=100$. Ракурс угрозы $\alpha_{р}$ при каждом очередном испытании выбирался равновероятно из сектора $(0-360)^\circ$.

На рис.3 представлены зависимости вероятностей правильного и ложного предупреждения от времени предупреждения.

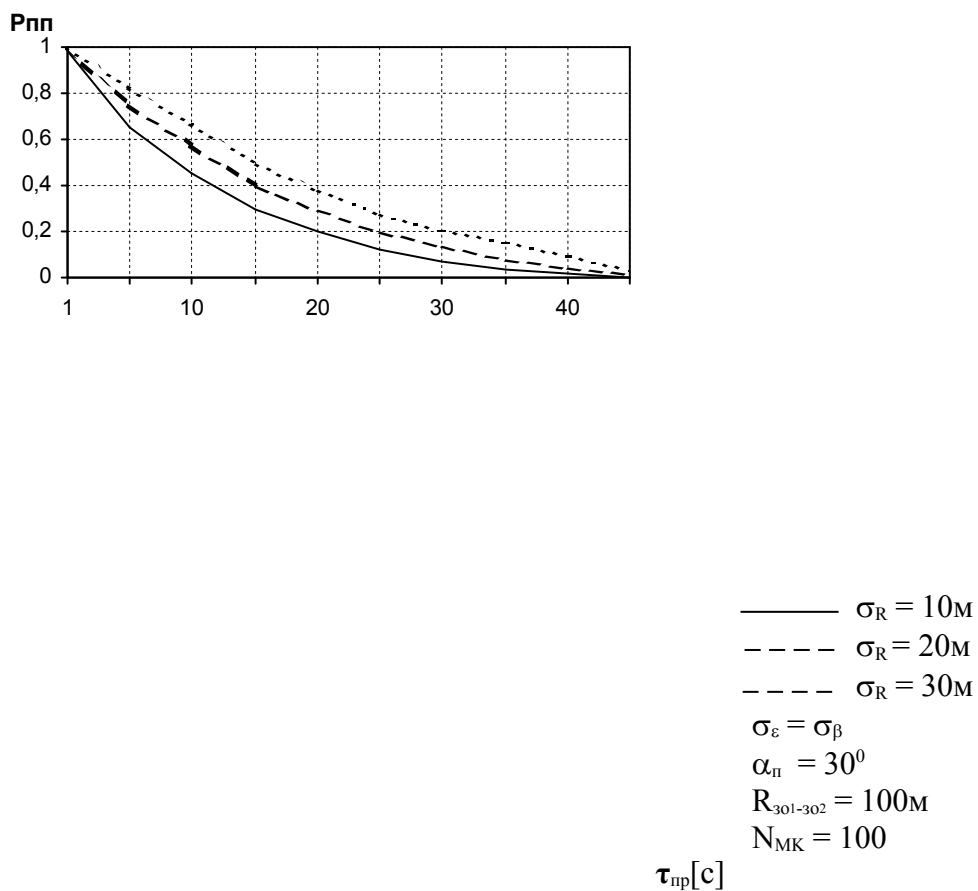


Рис. 3 а. Зависимость вероятности правильного предупреждения от времени предупреждения

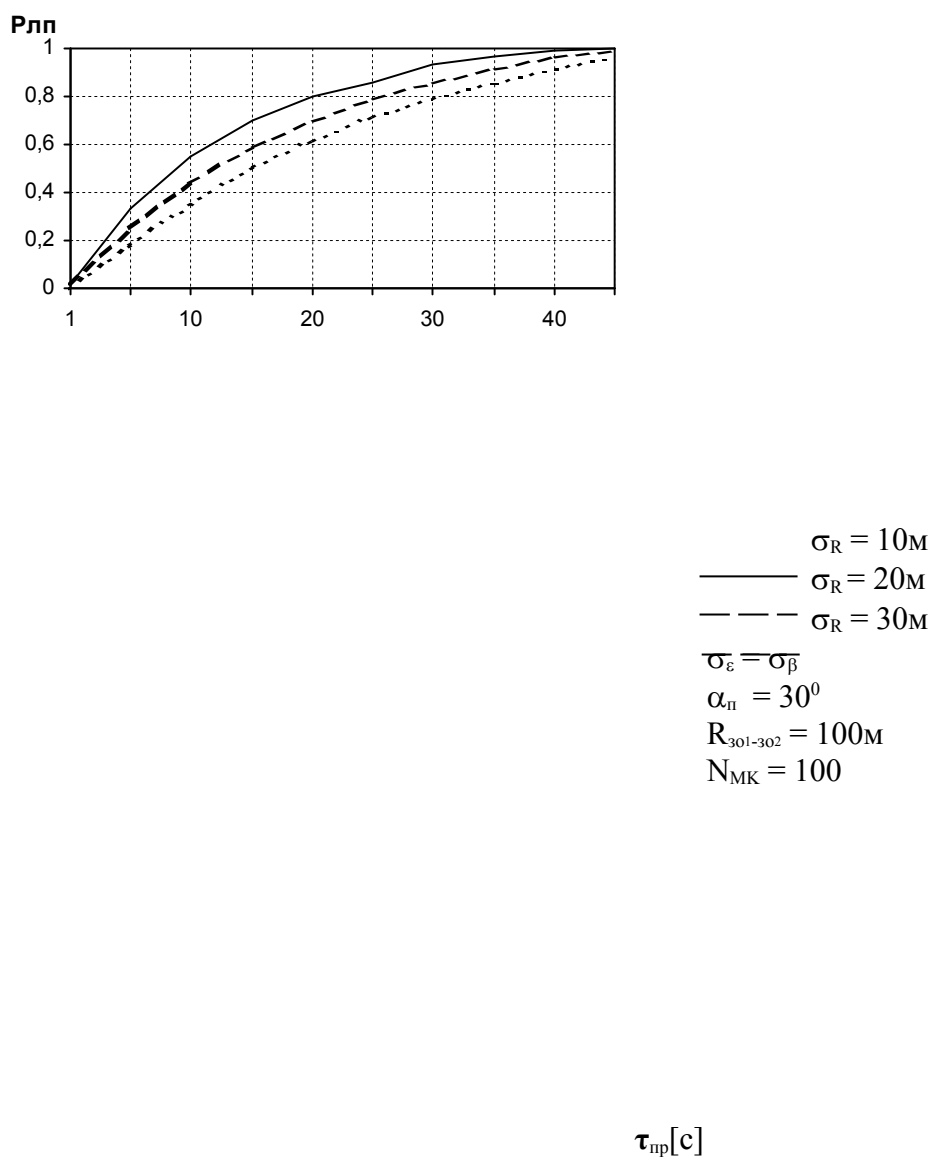


Рис. 3 б. Зависимость вероятности ложного предупреждения от времени предупреждения

Результаты экспериментальных исследований на имитационной модели позволяют оценить достижимую эффективность решения задачи защиты наземных объектов рассматриваемым методом, а также предъявить требования к основным параметрам РЛС предупреждения.

Заключение

Методами теории многоальтернативной проверки гипотез синтезирован приближенно оптимальный (при условии высокой точности первичных радиолокационных измерений) алгоритм

принятия решения об объекте воздушной угрозы. Алгоритм предполагает прогнозирование точки падения ВО по результатам первичных радиолокационных измерений. Решение об объекте угрозы принимается по минимуму расстояния от прогнозируемой точки падения до защищаемых объектов. Результаты модельного эксперимента показали высокую эффективность синтезированного алгоритма при реализуемых точностях первичных измерений и малых расстояниях между защищаемыми объектами.

Список литературы

1. Кузьмин С.З. Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации.-М.: Радио и связь, 1986. – 352с.
 2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники.-М.: Советское радио, 1969. – 752 с.
 3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. -М.: Наука, 1984.-831с.
-

Сведения об авторах

Юдин Василий Николаевич, профессор кафедры теоретической радиотехники Московского авиационного института (государственного технического университета), д.т.н.

Нгуен Зоан Хунг, аспирант кафедры теоретической радиотехники Московского авиационного института (государственного технического университета)